

Дубна, 21.07.2025

Алгебры. ЛМ

(1)

• Что такое алгебра? Вектор. пр-во (над полем K) + коассоциатив.

$$V \times V \rightarrow V \text{ билинейно: } (\lambda a + \mu b)c = \lambda ac + \mu bc \\ a(\lambda b + \mu c) = \lambda ab + \mu ac$$

и больше ничего

Задание $V = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$ и таблица умнож.: $e_i \cdot e_j = V_{ij}$
 $\uparrow$ базис $\uparrow$ произвол. n^2 векторов

$$\text{Или } e_i \cdot e_j = \sum_k c_{ij}^k e_k$$

$\uparrow$ структур. константы, n^3 чисел.

Для модулей тензоров: структура алгебры на $V \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow V \otimes V \rightarrow V \Leftrightarrow$ точка в пр-ве $V^* \otimes V^* \otimes V$
 $\uparrow$ л.и. отображ.

• Когда две алгебры изоморфны?

Тогда, когда $\exists$ оператор $A \in GL(V)$, переводящий одну алгебру в другую: $A(v_1 \cdot v_2) = (Av_1) * (Av_2)$. Классы изоморфизма алгебр = $GL(V)$ -орбиты на мн-ве таблиц умнож. $\Leftrightarrow$ на пр-ве структур. констант $\Leftrightarrow$ на пр-ве $V^* \otimes V^* \otimes V$

Автоморфизмы алгебры $\mathcal{A}$: $\text{Aut}(\mathcal{A}) = \{A \in GL(V) : (Av_1)(Av_2) = A(v_1 \cdot v_2)\}$

Достаточно: $(Ae_i)(Ae_j) = A(e_i \cdot e_j) \quad \forall i, j$

$\hookrightarrow$ подгруппа $\text{Aut}(\mathcal{A})$ в $GL(V)$ задана конечным числом полином. уравнений. Такие подгруппы называются алгебраическими. у них есть структурная теория.

Изучают ли произв. алгебры? Да

- классы изоморфизма, мн-ва модулей;
- "типичные" алгебры;
- мн-ва идемпотентов ($a^2 = a$), геом. подмн-й в $\mathcal{A}$ и в пр-ве стр. конст.

Примеры алгебр $K[x_1, \dots, x_n]$, $\text{Mat}_{n \times n}(K)$, $\mathcal{F}(M, K)$, ...

- часто коммутативны ($ab = ba$), всегда ассоциат. ($a(bc) = (ab)c$), $u \in 1$.

бывают не такие? Да, алгебры Ли

(2)

Marius Sophus Lie (1842-1899), вся жизнь в Норвегии

Опр Алгебра Ли $\mathfrak{g} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}, (x, y) \mapsto [x, y]$:

• антикоммут: $[x, y] = -[y, x] \Leftarrow [x, x] = 0$ ($\Rightarrow$ если $\text{char } K = 2$)

• тождество Якоби: $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$

$$\Leftrightarrow [x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]] \leadsto (fg)' = f'g + fg' \quad (\text{правило Лейбница})$$

Примеры:

а) коммут. алгебра Ли: $[x, y] = 0 \forall x, y \in \mathfrak{g}$. В $\forall$ алгебре Ли $\forall$ 1-мер. подар-во это коммут. подалгебра.

1) Если A - ассоц. алгебра, то $L(A) : [a, b] = ab - ba$

Например, $A = \text{Mat}_{n \times n}(K) \leadsto L(A) = \mathfrak{gl}_n(K)$

2) линейные алгебры Ли = подалгебры Ли в $\mathfrak{gl}_n(K)$:

$$\mathfrak{sl}_n(K) (\text{tr} = 0), \mathfrak{so}_n(K) (A = -A^T), \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Теорема Адго (1935) [Игорь Дмитриевич Адго, ~~из~~ Казань]

$\dim \mathfrak{g} < \infty \Rightarrow \mathfrak{g} \hookrightarrow \mathfrak{gl}_n(K)$ для некот. n .

3) Алгебры Ли дифференцирования Пусть $\mathcal{A}$ - произв. алгебра

$$\text{и } \text{Der}(\mathcal{A}) = \left\{ D : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} : D(ab) = D(a)b + aD(b) \right\}$$

$\text{линейно} \quad \forall a, b \in \mathcal{A}$

Если $D_1, D_2 \in \text{Der}(\mathcal{A})$, то $[D_1, D_2] := D_1 D_2 - D_2 D_1 \in \text{Der}(\mathcal{A}) \Rightarrow$

Например, если $\mathcal{A} = K[x_1, \dots, x_n]$, то

$$\forall D = f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + f_n \frac{\partial}{\partial x_n} \text{ для } f_1, \dots, f_n \in \mathcal{A}. \quad / \text{бесконечномерна}$$

Зачем нужны алгебры Ли? Теория Ли

 $T_e G$ - алгебра Ли } соответствие Ли

G - группа Ли

Например, $\mathcal{A}$ - произв. конечномер. алгебра, $G = \text{Aut}(\mathcal{A})$ -

и $T_e G = \text{Der}(\mathcal{A})$.

-(алгебра) группа Ли

Структурная теория конечномерных алгебр Ли (3)

- коммутант $[a, b] = \langle [x, y], x, y \in a, b \rangle = a^{(1)}$;
- кратный коммутант $a^{(k)} := [a^{(k-1)}, a^{(k-1)}]$;
- a разрешима, если $\exists k : a^{(k)} = \{0\}$.
- идеал $I \subset a$ - подир-во + $[x, y] \in I \quad \forall x \in I, y \in a$.
- a проста, если в a нет нетривиальных идеалов.

Структурная теорема $K = \mathbb{C}, \dim a < \infty$. Тогда

(1) $a = a^{ss} \lt \underbrace{\text{rad } a}_{\text{наибольший разрешимый идеал}}$;

(2) $a^{ss} \cong a_1 \oplus \dots \oplus a_m$, a_i - просты

(3) $a_i \cong \mathfrak{sl}_n, \mathfrak{so}_n, \mathfrak{sp}_{2n}$ или

G_2	F_4	E_6	E_7	E_8
14	52	78	133	248

Свободные алгебры Ли: $\text{Lie}\langle x_1, \dots, x_n \rangle = \langle [x_i, [\dots [x_j, \dots]]] \rangle$

Теорема (Ширшов (1953) - Витт (1956)) Подалгебра свободности алгебры Ли свободна.

Открытые вопросы: 1) странная алгебра Ли (Кострикин, осн. структурная алгебра)

Есть ли бесконечномерная алгебра Ли a , у которой все собственные подалгебры Ли одномерны? $\Leftrightarrow a$ порожд. двумя некоторыми элементами $x, y \in a$

2) Гипотеза Если $\varphi: \text{Der}(K[x_1, \dots, x_n]) \rightarrow \text{Der}(K[x_1, \dots, x_n])$ - инъективный гомом, то φ биективен.

Эквивалентно гипотезе Якобиана (Куашков и Крафт-Регета)

3) Пусть $a = \text{Der}(K[x_1, \dots, x_n] / I)$. Правда ли, что a кон. кор.? Если $a = \text{Der}(K[x_1, \dots, x_n])$, то да!

4) Пусть $\varphi: a_1 \rightarrow a_2$ - биекция и $\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)] \quad \forall x, y \in a_1$. Правда ли, что $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) \quad \forall x, y \in a_1$?

Иногда да!