

Закятие №2

(1)

Уточн: $\mathfrak{a}_Y$ проста = нет нетривиальных идеалов + не однокмер.

① Полипрямая сумма $\mathfrak{a}_Y = \mathfrak{a}_{Y_1} \ltimes \mathfrak{a}_{Y_2}$

Прямая сумма $\mathfrak{a}_{Y_1} \oplus \mathfrak{a}_{Y_2} : [(x_1, y_1), (x_2, y_2)] = ([x_1, x_2], [y_1, y_2])$

Обобщение: $\varphi : \mathfrak{a}_{Y_1} \rightarrow \text{Der}(\mathfrak{a}_{Y_2}), x \mapsto \varphi_x$

$[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] = ([x_1, x_2], \varphi_{x_1}(y_2) - \varphi_{x_2}(y_1) + [y_1, y_2])$

Здесь $\{0\} + \mathfrak{a}_{Y_2}$ - идеал, а $\mathfrak{a}_{Y_1} + \{0\}$ - подалгебра

Эта сумма прямая $\Leftrightarrow \varphi = 0 \Leftrightarrow \mathfrak{a}_{Y_1}$ и $\mathfrak{a}_{Y_2}$ - идеалы в $\mathfrak{a}_Y$

Частный случай: Пусть $\mathfrak{a}_Y \xrightarrow{\pi} \mathfrak{a}_Y / \mathfrak{I}(V)$ - гомоморфизм алг. Ли.

Тогда V называется $\mathfrak{a}_Y$ -модулем. Рассмотрим V как коммут. алгебру Ли. Тогда V лин. оператор на V является дифференциров. и определена полипр. сумма

$\mathfrak{a}_Y \ltimes V; [(x_1, v_1), (x_2, v_2)] = ([x_1, x_2], x_1 v_2 - x_2 v_1)$

Здесь V - коммутативный идеал.

Напоминание: факторалгебра Ли $\mathfrak{a}_Y / \mathfrak{I}$: $[x + \mathfrak{I}, y + \mathfrak{I}] = [x, y] + \mathfrak{I}$

Например, $\mathfrak{a}_{Y_1} \ltimes \mathfrak{a}_{Y_2} / \mathfrak{a}_{Y_2} \cong \mathfrak{a}_{Y_1}$, в общем случае возникает проблема расширения

② Разрешимость и нильпотентность

$[\mathfrak{a}_Y, \mathfrak{a}_Y] := \langle [x, y], x, y \in \mathfrak{a}_Y \rangle = \mathfrak{a}_Y^{(1)}; \mathfrak{a}_Y^{(k)} = [\mathfrak{a}_Y^{(k-1)}, \mathfrak{a}_Y^{(k-1)}]$

$\mathfrak{a}_Y$ разрешима, если $\exists m: \mathfrak{a}_Y^{(m)} = 0$. Наименьш. m - ступень разреш.

$\mathfrak{a}_Y$ коммут. $\Leftrightarrow m = 1$.

Пример $\mathfrak{a}_Y = \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \right\}_{n \times n}, \mathfrak{a}_Y^{(1)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ Упр ступень разреш.
= наим. $m: 2^{m-1} > n-1$

Св-ва: • $\mathfrak{a}_Y$ разрешима $\Rightarrow$ её подалг. и гомом. образы разреш.

• $\mathfrak{I} \subset \mathfrak{a}_Y$ - разр. идеал и $\mathfrak{a}_Y / \mathfrak{I}$ разреш. $\Rightarrow \mathfrak{a}_Y$ разреш.

• $\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2 \subset \mathfrak{a}_Y$ - разр. идеалы $\Rightarrow \mathfrak{I}_1 + \mathfrak{I}_2$ - разр. идеал.

$\Rightarrow$ в $\mathfrak{a}_Y$ $\exists$ наибольший разр. идеал $\text{rad}(\mathfrak{a}_Y)$

Опр $\mathfrak{a}_Y$ простота, если $\text{rad}(\mathfrak{a}_Y) = 0$.

Упр Для любой алгебры Ли $\mathfrak{g}/\text{rad}(\mathfrak{g})$ индуцируется (2)

Нильпотентность: $\mathfrak{g}^{[1]} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, $\mathfrak{g}^{[k]} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{[k-1]}]$

$\mathfrak{g}$ нильпотентна, если $\exists s: \mathfrak{g}^{[s]} = \{0\}$. Наим. s = ступень нильпот.

Пример $\dim \mathfrak{g} = 2$, $[x, y] = x$, $\mathfrak{g}^{[1]} = \mathfrak{g}^{(1)} = \langle x \rangle = \mathfrak{g}^{[2]} = \dots$ - не нильп.

Центр $Z(\mathfrak{g}) = \{x \in \mathfrak{g} \mid [x, y] = 0 \quad \forall y \in \mathfrak{g}\}$ $\mathfrak{g}^{[2]} = 0$ - разрешима

Для нильпот $\mathfrak{g}$ имеем $\mathfrak{g}^{[s-1]} \subseteq Z(\mathfrak{g})$. В част., $Z(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$

Условия св-ва: • $\mathfrak{g}$ нильпот. $\Rightarrow \forall$ подалгебра и гом. образ нильпот.

• если $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$ нильпот., то $\mathfrak{g}$ нильпот.

Условие нильпотентности: $[x_1, [x_2, \dots, [x_s, y], \dots]] = 0$

Опр $\forall x \in \mathfrak{g} \text{ ад } x: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \quad \forall x_1, \dots, x_s, y \in \mathfrak{g}.$
 $y \mapsto [x, y]$

$\Rightarrow$ для нильпот. $\mathfrak{g}$ и $\forall x \in \mathfrak{g}$ оператор $(\text{ад } x)^s = 0$ - нильпот.

Теорема Энгеля Если $\dim \mathfrak{g} < \infty$ и все операторы $\text{ад } x$, $x \in \mathfrak{g}$ нильпотентны, то $\mathfrak{g}$ нильпот.

□ 1) $x \in \mathfrak{g} \cap \mathfrak{gl}(V)$ - нильпот. $\Rightarrow \text{ад } x$ нильпот.

□ $[x, y] = x \cdot y - y \cdot x$ - разность коммут. нильпот. опера.

2) в $\mathfrak{g}$ есть идеал ℓ коразм. 1 (~~индуцируется св-ва св-ва~~)

3) Если $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ состоит из нильпот., то $\exists 0 \neq v \in V: \mathfrak{g} \cdot v = 0$

□ инд. по $\dim \mathfrak{g}$: пусть $V_0 = \{v \in V \mid \ell \cdot v = 0\}$ и $\mathfrak{g}/\ell \supseteq V_0$

4) Док-во теор. индук. по $\dim \mathfrak{g}$: $\text{ад}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{gl}(\ell) \exists x \in \ell: [\mathfrak{g}, x] = 0$

т.е. $x \in Z(\mathfrak{g}) \leadsto Z(\mathfrak{g}) \neq \{0\} \Rightarrow$ пред. инд. $\mathfrak{g}/Z(\mathfrak{g})$ ■

③ Теорема Ли

Следствие $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ - нильпот. $\Rightarrow \exists$ базис в V , где $\mathfrak{g} \subseteq \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

□ $V \leadsto V/\langle v \rangle$ ■

Теорема Ли $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ - разрешима $\Rightarrow \exists$ базис в V , где $\mathfrak{g} \subseteq \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$

□ 1) $\exists$ идеал $\ell \in \mathfrak{g}$ коразм. 1; 2) для операторов из $\ell \exists$ общий собст.

вектор; 3) $\mathfrak{g}$ сохр. инвар-во таких вект.; 4) $\mathfrak{g} = \langle z \rangle \times \ell$ и z имеет тем собст. вектор.

Следств. 1 $\mathfrak{a}$ разрешим $\Rightarrow \exists$ цепочка идеалов

(3)

$$0 = \mathfrak{a}_0 \subseteq \mathfrak{a}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathfrak{a}_n = \mathfrak{a}, \dim \mathfrak{a}_i = i$$

Следств. 2 $\mathfrak{a}$ разрешима $\Rightarrow [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]$ нильпотентна.

(4) Филидрормные алгебры Ли

Лемма Если $\mathfrak{a}$ нильпот. и $\dim \mathfrak{a} \geq 2$, то $\dim \mathfrak{a} / [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] \geq 2$.

□ От противного: $\mathfrak{a} = \langle x \rangle \oplus [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]$

Тогда $\forall y, z \in \mathfrak{a}$

↑ прямая сумма вект. пространств.

$$y = \alpha x + y_0, \quad \alpha, \beta \in K, \quad y_0, z_0 \in [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}].$$

$$z = \beta x + z_0$$

Тогда $[y, z] = \alpha [x, z_0] + \beta [x, y_0] + [y_0, z_0] \in \mathfrak{a}^{[2]}$

Но $\mathfrak{a}$ разрешима и $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] \neq \mathfrak{a}^{[2]}$ — противоречие

Поскольку $\mathfrak{a} \supsetneq \mathfrak{a}^{[1]} \supsetneq \dots \supsetneq \mathfrak{a}^{[s-1]} \supsetneq \mathfrak{a}^{[s]} = \{0\}$,

то из леммы следует, что ступень нильпот. $s \leq \dim \mathfrak{a} - 1$.

Опр Нильпот. алгебра Ли $\mathfrak{a}$ называется

филидрормной, если ступень нильпотентности

$$s = \dim \mathfrak{a} - 1.$$

Пример Модельная филидрормная алгебра Ли

$$\mathfrak{a} = \langle e_1, \dots, e_n \rangle, \quad [e_i, e_j] = e_{i+j}, \quad 1 \leq i \leq n, \text{ остал. базиса коммут. равны нулю.}$$

$$\text{Здесь } \mathfrak{a}^{[k]} = \langle e_{k+2}, \dots, e_n \rangle, \quad \mathfrak{a}^{[n-1]} = \{0\}.$$

Есть много других филидрормных алгебр Ли.