

Занятие 3

(1)

① Почти странная алгебра Ли Пусть $W_n := \text{Der}(\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n])$

Посмотрим на W_1 : $[f \frac{\partial}{\partial x}, g \frac{\partial}{\partial x}] = (fg' - f'g) \frac{\partial}{\partial x}$

Лемма $fg' = f'g \Leftrightarrow$ мн-ны f и g пропорцион.

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = 0 \Rightarrow \frac{f}{g} = \text{const}$$

□ Пусть $f = f_1 d, g = g_1 d$ и $(f_1, g_1) = 1$. Тогда

$$f_1 d(g_1' d + g_1 d') = (f_1' d + f_1 d') g_1 d \Rightarrow f_1 g_1' = f_1' g_1$$

Но любой корень мн-на f_1 имеет слева кратность больше чем справа $\Rightarrow f_1 = \text{const}$. Аналогично $g_1 = \text{const}$ ■

Положим $v(f) = \max d: x^d | f$. Тогда:

$$\bullet v(fg) = v(f) + v(g); \bullet v(f+g) \geq \min(v(f), v(g))$$

Утв В алгебре Ли $ay = x^2 \mathbb{C}[x] \frac{\partial}{\partial x} \subseteq W_1$ все конечномер. подалгебры Ли одномерны.

□ Пусть $f \in ay$ - конечномер. подалгебра. и $f \frac{\partial}{\partial x}, g \frac{\partial}{\partial x} \in f$ - два линейно независимых элемента. Достаточно д-ть, что в f есть эл-ты $h \frac{\partial}{\partial x}$, где мн-н h может иметь сколь угодно большую "степень" $\Rightarrow$ тогда f бесконечномерна.

$$[f \frac{\partial}{\partial x}, g \frac{\partial}{\partial x}] = h \frac{\partial}{\partial x}, h = fg' - f'g$$

$$v(h) \geq \min\{v(fg'), v(f'g)\} = v(f) + v(g) - 1 > \max(v(f), v(g))$$

так как $v(f) \geq 2, v(g) \geq 2$.

$\Rightarrow$ значение v возрастает при взятии коммутатора ■

Нетривиальные бесконечномер. подалгебры и идеалы в этой алгебре Ли есть.

② Алгебра Ли $sl_n(\mathbb{C})$ порожд. двумя элементами.

$$\text{Пусть } x = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}, \sum \alpha_i = 0, \text{ и } y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Тогда } (\text{ad } x)^m \cdot y = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \alpha_i - \alpha_j \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \times (\alpha_i - \alpha_j)^m$$

Рассмотрим матрицы $y, (adx)y, (adx)^2y, \dots, (adx)^ky$ (2)

$k = n^2 - n - 1$. Это $n^2 - n$ матриц лежащие в $(n^2 - n)$ -мерном пространстве матриц с нулевой диагональю. Выпишем матрицу координат (по строкам) таких матриц в базисе матричных единиц $E_{ij}, i \neq j$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 - \alpha_2 & \alpha_1 - \alpha_3 & \dots & (\alpha_{n-1} - \alpha_n) \\ (\alpha_1 - \alpha_2)^2 & (\alpha_1 - \alpha_3)^2 & \dots & (\alpha_{n-1} - \alpha_n)^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\alpha_1 - \alpha_2)^k & (\alpha_1 - \alpha_3)^k & \dots & (\alpha_{n-1} - \alpha_n)^k \end{pmatrix}$$

Напоминание: определитель Вандермонда

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_m \\ \beta_1^2 & \beta_2^2 & \dots & \beta_m^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_1^{m-1} & \beta_2^{m-1} & \dots & \beta_m^{m-1} \end{pmatrix} = \prod_{j>i} (\beta_j - \beta_i)$$

В нашем случае появляются разности

$$(\alpha_i - \alpha_j) - (\alpha_s - \alpha_p) = \alpha_i + \alpha_p - \alpha_j - \alpha_s, \quad \begin{matrix} i \neq j \\ s \neq p \\ (i,j) \neq (s,p) \end{matrix}$$

Можно подобрать набор $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, чтобы все попарные разности были попарно различны.

$\Rightarrow$ матрица невырожден. $\Rightarrow$ через эти $n^2 - n$ матрич. ед.

$E_{ij}, i \neq j$, выраж. как лнн. комбинации

$$\text{Наконец, } [E_{12}, E_{21}] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ в подалгебре, порожден. x и y , лежат все matr.

вида $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ все диаг. матрицы $\Rightarrow x$ и y порож. sl_n с следом 0.

Чистопольская '18: У нильпот. $x \neq 0$ $\exists$ нильп. y : $Lie(x, y) = sl_n$

3) Однозначность сложения

(3)

Пусть $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ - алгебры $\mathcal{M}$ и $\varphi: \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2$ - биекция, сохраняющая коммутатор, то есть $\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)] \forall x, y \in \mathcal{A}_1$.

Правда ли, что $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) \forall x, y$?

Теорема (Рикард'1948, Стефенсон'1969). Пусть R - произв. ассоу. кольцо с 1 и $n \geq 2$. Тогда $\forall$ ассоу. кольцо S и $\forall$ биекции $\varphi: \text{Mat}_{n \times n}(R) \rightarrow S$, такой что $\varphi(AB) = \varphi(A) \cdot \varphi(B)$ $\forall$ матриц A, B мы имеем $\varphi(A+B) = \varphi(A) + \varphi(B)$.

Опр Алгебра $\mathcal{M}$ $\mathcal{A}$ назыв. кольцом $\mathcal{M}$ с однознач. сложением (УА), если $\forall$ биекция $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}_1$, сохр. коммут., сохр. и сложение.

Упр Это равнос. тому, что на $\mathcal{A}$ $\exists$ единств. сложение $+$, для которого $\mathcal{A}$ с $+$ и $1, 3$ - кольцо $\mathcal{M}$.

Теорема Алгебра $\mathcal{M}$ $\mathcal{S}_n(\mathbb{C})$ [и $\forall$ полупрост. алг. $\mathcal{M}$] явл. УА.

На самом деле, здесь есть ровно два результата:

1) отрицательный: Пусть $|\mathcal{A}| > 4$, $[\mathcal{A}, \mathcal{A}] \neq \mathcal{A}$, $Z(\mathcal{A}) \neq \{0\}$ и если $Z(\mathcal{A}) \cap [\mathcal{A}, \mathcal{A}] = \{0\}$, то $|Z(\mathcal{A})| > 2$. Тогда $\mathcal{A}$ не УА.

2) положительный: централизатор $C(x) = \{y \in \mathcal{A} \mid [x, y] = 0\}$ если $\exists x, y \in \mathcal{A} : C(x) \cap C(y) = \{0\}$, то $\mathcal{A}$ УА.

Вопросы (1) Явл. ли $\mathcal{S}_3(\mathbb{Z}_2)$ УА?

(2) Бывают ли не УА с нулевым центром?

(3) Любая ли инъекция $\varphi: \mathcal{S}_n \rightarrow \mathcal{A}$, сохр. коммут., сохр. и сложение?

Про отрицательное: • Если $(A, +)$ - коммут. группа, $|A| > 4$, $a \neq b \in A \setminus \{0\}$, то биекция $\varphi: a \leftrightarrow b, \varphi(x) = x, x \neq a, b$ не сохраняет сложение. Это решает случай коммут. $\mathcal{A}$.

• Если $\mathcal{A}$ не коммут. и $Z(\mathcal{A}) \cap [\mathcal{A}, \mathcal{A}] = \{0\}$, то возьмем

$z_1, z_2 \in Z(\mathcal{A}), z_1 \neq z_2$, и $a \in [\mathcal{A}, \mathcal{A}] \setminus \{0\}$, и положим $\varphi: a \neq z_1 \leftrightarrow a + z_2$

- Если $Z(\mathfrak{a}_1) \cap [\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2] \neq \{0\}$, возьмем $z \in Z(\mathfrak{a}_1) \cap [\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2] \setminus \{0\}$ (4)
и $a \notin [\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2] \setminus \{0\}$, и положим $\varphi: a \mapsto a + z$

Проположительное:

Лемма Титова Если $\varphi: \mathfrak{a}_1 \rightarrow \mathfrak{a}_2$ — биекция, сохр. коммут.

и $C(x) \cap C(y) = \{0\}$, то $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$.

□ Пусть $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) + \varphi(z)$. Тогда

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = \varphi([x, y]) = \varphi([x+y, y]) = [\varphi(x+y), \varphi(y)] = \\ = [\varphi(x) + \varphi(y) + \varphi(z), \varphi(y)] = [\varphi(x), \varphi(y)] + [\varphi(z), \varphi(y)]$$

Аналогично $[\varphi(z), \varphi(x)] = 0 \Rightarrow [z, y] = [z, x] \stackrel{=0}{=} 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow z \in C(x) \cap C(y) \Rightarrow z = 0 \Rightarrow \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$. □