

**Задачи Г.Б. Шабата к лекции 1, часть 2-я.**

**1.10.** Докажите, что график любого кубического многочлена обладает центральной симметрией.

**1.11.** Составьте несколько кубических уравнений с целыми коэффициентами. Пользуясь доступными компьютерными средствами, попытайтесь решить их с помощью формулы Кардано.

**1.12.** Формула Кардано (в удачных случаях) даёт ОДИН корень кубического уравнения. Воспользовавшись теоремой Безу, найдите остальные два.

**1.13.** Упростите формулу Кардано в случае, когда дискриминант – квадрат (разумеется, основного поля  $\mathbb{k}$ ).

**1.14.** Докажите, что дискриминант любого многочлена инвариантен относительно сдвига аргумента.

**1.15.** Вычислите дискриминанты следующих (возникших в теории эллиптических кривых с *комплексным умножением* в поле  $\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$ ) многочленов:

$$\begin{aligned}x^3 - x^2 - 2x + 1, \\x^3 - 8x^2 + 5x + 1, \\x^3 - 15x^2 + 12x + 1.\end{aligned}$$

**1.16.** Проверьте, что  $2 \cos \frac{\pi}{7}$  – корень уравнения  $x^3 - x^2 - 2x + 1$ . Найдите остальные два корня.

**1.17\*.** Попробуйте выразить корни многочленов  $x^3 - 8x^2 + 5x + 1$  и  $x^3 - 15x^2 + 12x + 1$  через косинусы  $\pi$ -рациональных аргументов. Если не получится, обратитесь к Г.А. Мерзону.

**1.18.** Составьте наугад несколько уравнений 4-й степени с целыми коэффициентами. Пользуясь доступными компьютерными средствами, сведите их к кубическим. Решите их в радикалах и проверьте результаты численно.