

Уравнения степени 5 и выше

Дубна, 2025

Г.Б. Шабат

Лекция 2, 23 июля

Квинтики и икосаэдр

Предварительная краткая версия, 26 июля 2025

2.0. О конечных группах	1
...2.0.0. Простые группы и расширения	1
...2.0.1. О простых группах	2
...2.0.2. О расширениях	2
2.1. Неразрешимость квинтик в радикалах	2
...2.1.0. Краткая история	2
...2.1.1. Применение теории Галуа	3
...2.1.2. О топологических доказательствах	4
2.2. Квинтики в форме Бриоши	4
...2.2.0. Преобразование Чирнгауза	4
...2.2.1. Главное уравнение	4
...2.2.2. Форма Бриоши	4
2.3. Икосаэдр	5
...2.3.0. Изображение	5
...2.3.1. Группа изометрий	5
...2.3.2. Стереографическая проекция	5
...2.3.2. Вписанные октаэдры и раскраска	5
...2.3.3. Октаэдрические многочлены	6
2.4. Детские рисунки и функции Белого	6
...2.4.0. Общий обзор	6
...2.4.1. Функция Белого икосаэдра	6
2.5. Применение к квинтикам	6
Литература	7

2.0. О конечных группах

Конечные группы – одна из немногих областей математики, в которых построена в определённом смысле полная и весьма содержательная классификация. Мы коснёмся этой классификации в основном лишь в той мере, в которой она касается предмета нашего курса.

2.0.0. Простые группы и расширения. В применении к конкретной группе классификация начинается с вопроса

Существуют ли нетривиальные ЭПИморфизмы

из неё?

Если ответ отрицателен, то группа называется *простой*.

Если ответ положителен, то группа в некотором смысле изготовлена из двух групп меньшего порядка. Она называется *расширением* одной помощью другой.

Традиционное обозначение расширений – E от слова *Extension*. По определению, для каждого расширения существует хотя бы один эпиморфизм¹

$$E \xrightarrow{\pi} G, \quad (2.0.0a)$$

где $1 < \#G < \#E$.

У эпиморфизма π существует *ядро*

$$N := \ker \pi,$$

где $1 < \#N < \#E$; из равенства

$$(\#N)(\#G) = \#E$$

следует, что *любая группа простого порядка проста*.

Группу N принято рассматривать не как Нормальную подгруппу группы E , а как существующую отдельно, но вложенную в E мономорфизмом²

$$N \xrightarrow{\iota} E \quad (2.0.0b)$$

Морфизмы (2.0.0a) и (2.0.0b) обычно соединяют в *короткую точную последовательность* групп

$$\boxed{1 \rightarrow N \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{\pi} G \rightarrow 1}. \quad (2.0.0c)$$

Если группа E может быть вставлена в точную последовательность (2.0.0c) то она называется *расширением группы G с помощью группы N* (или наоборот...).

Таким образом, *любая конечная группа либо проста, либо изоморфна расширению одной меньшей группы с помощью другой*.

2.0.1. О простых группах. Прежде всего, как уже было отмечено, к простым группам относятся все группы простых порядков. Нетрудно доказать, что все они – циклические, и мы получаем первую *серию*

$$C_p := \frac{\mathbb{Z}^+}{p\mathbb{Z}^+},$$

где $p \in \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$ – простое число.

Установлено (см., например, [Gorenstein1986]), что оставшиеся простые конечные группы состоят из

- 16 бесконечных семейств групп *Лиевского типа* – например, $\mathrm{PSL}_n(\mathbb{F}_q)$;
- Знакопеременные группы A_n при $n \geq 5$;
- 26 sporadicических групп.

В нашем курсе встретится лишь A_5 . Доказательство её простоты можно прочитать, например, в [Вавилов2010].

¹ π – греческий аналог буквы p , первой буквы слова *projection*.

² ι – греческий аналог буквы i , первой буквы слова *injection*.

2.0.2. О расширениях. Для заданных групп G и N введём множество

$$\mathcal{E}(N, G) := \frac{\{\text{группы } E \mid \exists 1 \mapsto N \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{\pi} G \mapsto 1\}}{\text{изоморфизм}}.$$

Очевидно, такие множества покрывают классы изоморфизма всех непростых групп.

Все множества $\mathcal{E}(N, G)$ непусты, поскольку содержат класс прямого произведения $N \times G$. Каждое из них допускает полное описание в терминах вторых и третьих когомологий группы G с коэффициентами в центре группы N , см. [Браун1987].

2.1. Неразрешимость квинтик в радикалах

2.1.0. Краткая история. Первый текст, претендующий на доказательство теоремы о неразрешимости уравнений 5-й степени в радикалах – [Ruffini1813]. Современники в основном не нашли его убедительным, но О. Коши одобрил.

По-видимому, текст Паоло Руффини (1765–1822) действительно содержал пробелы; безупречно было доказательство в [Abel1824].

Оба текста трудны для чтения. Начиная с середины XIX века они относятся в основном к истории математики: после того как распространилась *теория Галуа*³, доказательство обсуждаемой неразрешимости для профессионалов стало уместаться в один абзац (см. ниже).

Во второй половине XX века стали распространяться не требующие знания теории Галуа популярные изложения теоремы о неразрешимости уравнений пятой степени. Часто эта традиция связывается с именем В.И. Арнольда, ср. цитату из [Bartlett2024]:

In 1963, the Russian mathematician Vladimir Arnold gave an alternative topological proof of the unsolvability of the quintic in a series of lectures to high school kids in Moscow.

Подробное изложение устных лекций Арнольда (со ссылкой на него) можно найти в книге [Алексеев1976].

2.1.1. Применение теории Галуа. Расширим наши обозначения. Когда мы обсуждаем ВСЕ уравнения данной степени n , *основным* полем естественно считать

$$\mathcal{K} := \mathbb{K}(c_1, \dots, c_n).$$

Теперь для многочлена

$$f = x^n + c_1 x^{n-1} + \dots + c_{n-1} x + c_n$$

естественно понимание

$$f \in \mathcal{K}[x]_n$$

вместе с почти очевидным

$$f \in \mathcal{K}[x]_n^{\text{irr}}.$$

³Тот же О. Коши "потерял" рукопись Галуа. Работы Галуа начали приобретать известность лишь через 14 лет после его гибели на дуэли, в основном благодаря [Liouville1846].

Теперь обсуждаемый результат о неразрешимости является весьма частным случаем следующего.

Теорема. Расширение полей

$$\frac{\mathcal{K}[x]}{\langle f \rangle} \supset \mathcal{K}$$

реализуется присоединением радикалов тогда и только тогда, когда группа Галуа многочлена f разрешима.

Теорема Руффини-Абеля вытекает из этой теоремы как частный случай $n = 5$ с учётом неразрешимости группы A_5 .

В последние десятилетия появилось огромное количество популярных изложений теории Галуа. Я бы, однако, рекомендовал начинающему основательно вникнуть в эту теорию по какому-либо профессиональному изложению, например, [Jacobson2023].

В интернете легко найти также менее обработанные, но более современные изложения. Среди них есть прекрасные; не пытаюсь их назвать, поскольку слушатели могут подобрать их (один, несколько или много) по вкусам.

2.1.2. О топологических доказательствах. Их тоже огромное количество, и тоже не пытаюсь выбрать. Они относятся к частному случаю $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ и связаны с топологическим анализом накрытия

$$\mathbb{C}^{5 \times} \xrightarrow{/S_5} \mathbb{C}_1[z]_5;$$

решающую роль, как и в алгебраическом случае, играет неразрешимость группы A_5 .

2.2. Квинтики в форме Бриоши

2.2.0. Преобразование Чирнгауза. Согласно [Прасолов2003], стр. 187, преобразование Чирнгауза уравнения

$$f = x^n + c_1 x^{n-1} + c_n \equiv (x - x_1) \dots (x - x_n) = 0$$

осуществляется любой рациональной функцией $\boxed{\varphi \in \mathbb{k}(x)}$, знаменатель которой взаимно прост с f . Результатом преобразования называется уравнение "на y " той же степени

$$\text{Числитель} \left(\prod_{i=1}^n (y - \varphi(x_i)) \right) = 0.$$

В нашем случае удастся ограничиться многочленами $\boxed{\Phi \in \mathbb{k}[x]}$.

2.2.1. Главное уравнение. Так называется уравнение

$$x^5 + c_3 x^2 + c_4 x + c_5 = 0.$$

Переход к нему от общего уравнения пятой степени осуществляется одним из простейших преобразований Чирнгауза, но и он настолько громоздок, что, по-видимому, немислим вручную в XXI веке.

Формулы (легко ПРОВЕРЯЕМЫЕ на компьютере) можно найти, например, в недавней легко читаемой работе [BARSAN2022], содержащей к тому же интересные примеры уравнений пятой степени физического происхождения.

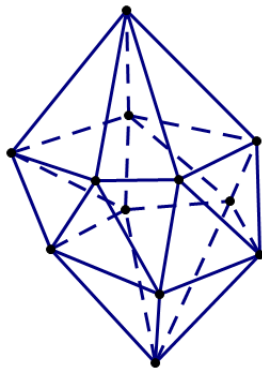
2.2.2. Форма Бриоши. Так называется уравнение пятой степени, в которое неизвестная входит только в нечётных степенях. Традиционная нормировка такова:

$$w^5 + 10B^3w^3 + 45B^2w + B^2 = 0$$

Переход к ней описан в работе [Bessels2006] на стр. 48-50. Однако изложение в ней таково, что слушателям, собравшимся овладеть темой, настоятельно рекомендуется создать собственный софт.

2.3. Икосаэдр

2.3.0. Изображение. Не претендуя ни на метрическую правильность, ни на эстетику, отобразим комбинаторику.



2.3.1. Группа изометрий. Хорошо известно, что это – знакопеременная группа A_5 . В лекции 3 будет приведена ещё одна реализация этой группы.

2.3.2. Стереографическая проекция. В результате её осуществления при помещении одной из вершин в ∞ вершинный многочлен V , рёберный многочлен E (корни которого – середины рёбер) и "столичный" многочлен (корни которого – центры граней-треугольников) принимают вид

$$V := z(z^{10} + 11z^5 - 1), \quad (2.3.2a)$$

$$E := z^{30} + 522z^{25} - 10005(z^{20} + z^{10}) - 522z^5 + 1, \quad (2.3.2b)$$

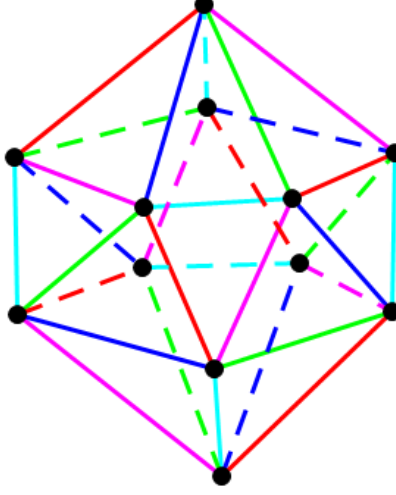
$$F = -z^{20} + 228z^{15} - 494z^{10} - 228z^5 - 1. \quad (2.3.2c)$$

Они связаны соотношением

$$F^3 = 1728V^5 - E^2. \quad (2.3.2d)$$

2.3.2. Вписанные октаэдры и раскраска. Со времён Кеплера известно, что таких октаэдров с вершинами в центрах граней – пять. Изобразить даже один из них нелегко.

В работе [Bessels2006] октаэдрам присваиваются цвета, и рёбра икосаэдра раскрашиваются в соответствии с цветами лежащих на них вписанных октаэдров. Результат прекрасно визуализируем:



2.3.3. Октаэдрические многочлены. Воспользуемся снова стереографической проекцией. Поскольку бесконечная точка сферы Римана занята вершиной, все середины рёбер можно считать комплексными числами.

Для каждого из цветов $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ введём монический многочлен

$$O_i \in \overline{\mathbb{Q}}[z]_6$$

с корнями в серединах рёбер соответствующего цвета. Эти многочлены мы и будем называть *октаэдрическими*.

Выполняется важное соотношение

$$\prod_{i=1}^5 (w - O_i) = w^5 - 10Vw^3 + 45V^2w - E.$$

Обратим внимание на сходство его правой части с формой Бриоши.

2.4. Детские рисунки и функции Белого

2.4.0. Общий обзор. См., например, [Shabat2018].

2.4.1. Функция Белого икосаэдра. Из полученных формул следует, что *обратная* к ней (то есть функция Белого *додикаэдра*) имеет вид

$$\frac{1}{\beta} = \frac{F^3}{V^5} = 1728 - \frac{E^2}{V^5}.$$

2.5. Применение к квинтикам

Надлежащим образом понимаемое решение задаётся формулами

$$x_i = -\frac{V^2}{E} O_i$$

при $i \in \{1, \dots, 5\}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [Abel1824] Niels Henrik Abel, *Mémoire sur les équations algébriques ou on démontre l'impossibilité de la résolution de l'équation générale du cinquième degré*. Brochure imprimée chez Grøndahl, Christiania 1824.
- [BARSAN2022] VICTOR BARSAN, *AN IMPROVED ALGORITHM FOR SOLVING THE QUINTIC EQUATION*. Romanian Reports in Physics 74, 117 (2022).
- [Bartlett2024] Bruce Bartlett, *The Quintic, the Icosahedron, and Elliptic Curves*. NOTICES OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY VOLUME 71, NUMBER 4, APRIL 2024.
- [Bessels2006] Sander Bessels, *One step beyond the solvable equation. The theory of the solvable and unsolvable quintic featuring Galois theory, Klein's icosahedron and elliptic curves*. Graduate thesis in mathematics, Utrecht University, 2006.
- [Gorenstein1986] D. Gorenstein, *Classifying the finite simple groups*. American Mathematical Society. Bulletin. New Series. — 1986. — vol. 14, No. 1. — Pp. 1–98.
- [Jacobson2023] Nathan Jacobson, *Lectures in abstract algebra*. Reprint of the ed. published by Van Nostrand.
- [Liouville1846] J. Liouville (ed.), *Oeuvres Mathématiques d'Évariste Galois*. Journal de Mathématiques pures et appliquées, XI (1846), 381–444.
- [Ruffini1813] Paolo Ruffini, *Riflessioni intorno alla soluzione delle equazioni algebriche generali*. Presso la Societa Tipografica, 1813.
- [Ruffini1813] Paolo Ruffini, *Riflessioni intorno alla soluzione delle equazioni algebriche generali*. Presso la Societa Tipografica, 1813.
- [Shabat2018] George Shabat, *Counting Belyi pairs over finite fields*, In 2016 MATRIX Annals (eds, David R. Wood, Jan de Gier, Cheryl E. Praeger, Terence Tao). MATRIX Book Series, Volume 1, p. 305–322, 2018.
- [Алексеев1976] В.Б. Алексеев, *ТЕОРЕМА АБЕЛЯ в задачах и решениях*. М.: Наука, 1976.
- [Браун1987] К. С. Браун, *Когомологии групп*. М.: Наука, 1987.
- [Вавилов2010] Н.А. Вавилов, *Простые алгебры Ли, простые алгебраические группы и простые конечные группы*. Математика XX века. Взгляд из Петербурга / Под ред. А. М. Вершика. — М. : МЦНМО, 2010.
- [Прасолов2003] В.В.Прасолов, *Многочлены*. М. : МЦНМО, 2003.