Краткое содержание курса «Алгебра Стинрода и кольца многочленов»
Ф.Ю.Попеленский

(1) $R = \mathbb{F}_2[x_1, \ldots, x_n]$, $R^{(d)}$ — однородные многочлены степени d, включая нулевой многочлен.

(2) (полный квадрат Стинрода) $SQ : R \to R$ — кольцевой гомоморфизм, определенный на образующих как $SQ(x_j) = x_j + x_j^2$.

(3) (k-й квадрат Стинрода) $f \in R^{(d)}$, $SQ(f) = \sum_{k\geq 0} Sk^k(f)$, где $Sk^k(f) \in R^{d_k}$.

(4) (Формула Картана) $Sq^k(fg) = \sum_{i+j=k} (Sq^i f)(Sq^j g)$

(5) $Sq^k(x^d) = \binom{d}{k} x^{k+d}$

(6) Пусть $A \in M_n(\mathbb{F}_2)$, $f \in R$. Определим $(f \cdot A)(x_1, \ldots, x_n) = f(\ldots, \underbrace{\sum_j a_{ij}x_j}_{i-\text{е место}}, \ldots)$. Тогда $(SQ(f)) \cdot A = SQ(f \cdot A)$, $(f \cdot A) \cdot B = f \cdot (AB)$. В частности, Sq^k сохраняет симметричность многочленов.

(7) (формула Ву) $Sq^k \sigma_m = \sum_{i=0}^{k} \binom{k-m}{i} \sigma_{k-i}\sigma_{m+i} = \sum_{i=0}^{k} \binom{m-k-1+i}{i} \sigma_{k-i}\sigma_{m+i}$

Набросок доказательства: проверить, что $\sigma_s\sigma_t = \sum_{a=0}^{s} \binom{b}{s-a} Sq^a(\sigma_{a+b})$, в которой считается, что $2a+b = s+t$. Заменами $s = k-i$, $t = m+i$ это равенство приводится к виду $\sigma_{k-i}\sigma_{m+i} = \sum_{a=0}^{k-i} \binom{k+m-2a}{k-i-a} Sq^a(\sigma_{k+m-a})$. Домножить каждое такое равенство на соответствующий биномиальный коэффициент $\binom{k-m}{i}$ и просуммировать по $i = 0, \ldots, k-a$. Затем упростить правую часть до $Sq^k\sigma_m$.

(8) Пусть $R_{a,b} = Sq^a Sq^b + \sum_i \binom{b-i-1}{a-2i} Sq^{a+b-i} Sq^i$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $Sq^a = 0$ при $a < 0$. Тогда $R_{a,b} f = 0$ для любого $f \in R$. (Обсуждение доказательства отложили)

(9) Чем меньше переменных (чем меньше n), тем больше соотношений между квадратами Стинрода, см. задачу 17.

(10) Алгебра Стинрода $A_2 (= A)$ — ассоциативная (некоммутативная) алгебра с 1 над $\mathbb{F}_2$, порожденная символами Sq^k, $k \geq 0$, $Sq^0 = 1$ (для удобства можно рассматривать $Sq^k = 0$ для отрицательных k) и *соотношениями Адема* $R_{a,b} = 0$ при $0 < a < 2b$:

$$Sq^a Sq^b = \sum_{i=0}^{[a/2]} \binom{b-i-1}{a-2i} Sq^{a+b-i} Sq^i, \quad 0 < a < 2b.$$

(11) Если m не есть степень двойки, то Sq^m представляется в виде суммы нетривильных произведений квадратов Стинрода Sq^k с меньшими номерами $0 < k < m$. Говорят, что такой Sq^m разложим. Для $m = 2^k$ такого представления не существует. Говорят, что Sq^{2^k} неразложим.

Алгебра A порождается элементами Sq^{2^k}, причем это минимальной порождающее множество. С другой стороны, даже между этими элементами есть соотношения, например, $Sq^2Sq^2 = Sq^1Sq^2Sq^1$, см. задачу 20.

(12) Последовательность положительных целых чисел $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ и соответствующих моном $Sq^{i_1}Sq^{i_2}\ldots Sq^{i_k}$ называются допустимыми, если для всех пар соседних индексов выполнено $i_j \geq 2i_{j+1}$.

(13) Любой элемент $\theta \in A$ записывается в виде суммы допустимых мономов.

(14) Для последовательности положительных чисел $I = (i_1, \ldots, i_k)$ определены степень $\deg(I) = \sum\limits_j i_j$ и длина $\ell(I) = k$.

(15) Нашли старший моном многочлена $Sq^5Sq^2(x_1x_2\ldots x_7)$.

(16) Допустимые мономы образуют базис алгебры A, рассматриваемой как векторное пространство над $\mathbb{F}_2$; с учетом пункта (13) достаточно проверить, что любая (нетривиальная) сумма допустимых мономов не равна 0 в A.

Предположим, что какая-то линейная комбинация $\theta = \sum\limits_{\deg(I)=d} a_I Sq^I$ равна 0 в $A^{(d)}$.

Запишем ее в виде

$$\sum_{\deg(I)=d,\ell(I)=\ell_0} a_I Sq^I + \sum_{\deg(I)=d,\ell(I)=\ell_0} a_I Sq^I.$$

Проведем двойную индукцию по ℓ_0 и по d.

Вычислим θ на $\sigma_n = x_1x_1\ldots x_n$, где $n \geq d$, и отследим слагаемые с максимально возможной степенью x_1. Мы показали, что эта степень в точности равна 2^{ℓ_0}:

$$\sum_{\deg(I)=d,\ell(I)=\ell_0} a_I x^{2^{\ell_0}} Sq^{I-(2^{\ell_0-1},2^{\ell_0-2},\ldots,2,1)}(x_2\ldots x_n).$$

Эта сумма равна 0, значит, по предположению индукции $a_I = 0$ при $\ell(I) = \ell_0$. Оставшиеся слагаемые в θ имеют длину меньше ℓ_0 и ту же степень, по предположению индукции они тоже равны 0.

База индукции: $\ell_0 = 1$ или $d = 1$ проверяется легко.

(17) Рассмотрим отображение вычисления $A^{(d)} \to R^{(n+d)}$: $\theta \mapsto \theta(\sigma_n) = \theta(x_1\ldots x_n)$. Из пункта (16) следует, что при $n \geq d$ оно является вложением векторных пространств.

(18) Пусть A — векторное пространство над полем $\Bbbk$. Обсудили:

• $(m : A \otimes_{\Bbbk} A \to A, \eta : \Bbbk \to A)$ — структура алгебры;

• $(\Delta : A \to A \otimes_{\Bbbk} A, \varepsilon : A \to \Bbbk)$ — структура коалгебры;

• биалгебра: одновременно заданы структура алгебры и коалгебры с условиями согласованности Δ с η, m с ε, η с ε (эти условия мы не обсуждали), а также самое важное для нас условие согласованности m и Δ:

$$\Delta(m(a \otimes_{\Bbbk} b)) = m(\Delta(a) \otimes_{\Bbbk} \Delta(b)).$$

Здесь $m((a_1 \otimes_{\Bbbk} b_1) \otimes_{\Bbbk} (a_2 \otimes_{\Bbbk} b_2)) = m(a_1 \otimes_{\Bbbk} a_2) \otimes_{\Bbbk} m(b_1 \otimes_{\Bbbk} b_2)$ (покомпонентое умножение элементов вида $a \otimes_{\Bbbk} b$)

(19) Пример $\Bbbk[x]\otimes_{\Bbbk}\Bbbk[y] = \Bbbk[x,y]$. Записали $\sum_{i,j} a_{ij}x^i y^j$ в виде элемента $\Bbbk[x]\otimes_{\Bbbk}\Bbbk[y]$ разными (но эквивалентными) способами.

(20) $\Bbbk[x]$ — биалгебра, где (m,η) — стандартные, определим $\varepsilon : \Bbbk[x] \to \Bbbk$ формулой $\varepsilon(f(x)) = f(0)$, и определим $\Delta \Bbbk[x] \to \Bbbk[x] \otimes_{\Bbbk} \Bbbk[x]$ формулами $\Delta(1) = 1 \otimes_{\Bbbk} 1, \Delta(x) = 1 \otimes_{\Bbbk} x + x \otimes_{\Bbbk} 1$. Тогда из условия согласования m и Δ легко найти значения $\Delta(x^k)$. Также нужно проверить аксиомы коассоциативности и коединицы. См. задачу 28.

Задачи к курсу «Алгебра Стинрода и кольца многочленов»

Обозначения: $R = \mathbb{F}_2[x_1, \ldots, x_n]$, $R^{(d)}$ — пространство однородных многочленов степени d (нулевой многочлен принадлежит $R^{(d)}$)

Задача 1. Найдите размерность пространства однородных многочленов степени d от n переменных, она же — число мономов степени d от n переменных.

Задача 2. Пусть $f \in R^{(d)}$ — однородный многочлен степени d. Докажите, что $Sq^0(f) = f$ и $Sq^d(f) = f^2$.

Задача 3. Докажите, что для любого $x \in R^{(1)}$ выполнено $SQ(x) = x + x^2$

Задача 4. Докажите, что для любого $x \in R^{(1)}$ выполнено $Sq^k(x^d) = \binom{d}{k} x^{d+k}$

Задача 5. Если f — моном от некоторых переменных из набора $x_1, \ldots, x_n$, то $Sq^k(f)$ — сумма, в которой с ненулевыми коэффициентами присутствуют мономы, состоящие в точности из того же набора переменных.

Задача 6. Докажите, что $Sq^k(f^2) = \begin{cases} (Sq^{k/2}(f))^2, & \text{если } k \text{ — четное;} \\ 0, & \text{если } k \text{ — нечетное.} \end{cases}$

Задача 7. Проверьте, что для всех $f \in R$ выполнены равенства $Sq^1 Sq^{2k}(f) = Sq^{2k+1}(f)$ и $Sq^1 Sq^{2k+1}(f) = 0$

Задача 8. Проверьте, что если $f \in R^{(d)}$, $d \geq 1$, то $Sq^1 f = 0$ тогда и только тогда, когда $f = Sq^1 g$ для некоторого $g \in R^{(d-1)}$.

Задача 9. Проверьте, что для любого $f \in R$ и $i = 1, \ldots, n$ выполнено $Sq^k(\frac{\partial}{\partial x_i} f) = \frac{\partial}{\partial x_i}(Sq^k(f))$.

Задача 10. Пусть $D = \sum\limits_i x_i^2 \frac{\partial}{\partial x_i}$ — дифференциальный оператор. Тогда $Sq^1 f = D(f) \mod 2$.

Задача 11. Определим $\vee$-произведение дифференциальных операторов как композицию, в которой операторы не действуют на коэффициенты других операторов в композиции. Например $D \vee D = \sum\limits_{i,j} x_i^2 x_j^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}$. Проверьте, что $\frac{1}{k!} \underbrace{D \vee \ldots \vee D}_{k \text{ штук}}$ — оператор с целыми коэффициентами и что $Sq^k f = \frac{1}{k!} \underbrace{D \vee \ldots \vee D}_{k \text{ штук}}(f) \mod 2$.

Задача 12. Проверьте, что формулы, выведенные на лекции для $k = 1, 2$:

$$Sq^1 \sigma_m = \begin{cases} \sigma_1 \sigma_m, & \text{если } m \text{ нечетное;} \\ \sigma_1 \sigma_m + \sigma_{m+1}, & \text{если } m \text{ четное,} \end{cases}$$

$$Sq^2 \sigma 1 = 0, Sq^2 \sigma_2 = \sigma_2^2,$$

согласуются с формулой Ву:

$$Sq^k \sigma_m = \sum_{i=0}^{k} \binom{k-m}{i} \sigma_{k-i} \sigma_{m+i} = \sum_{i=0}^{k} \binom{m-k-1+i}{i} \sigma_{k-i} \sigma_{m+i}$$

Здесь σ_m — m-ый элементарный симметрический многочлен от n переменных.

Задача 13. Напомним, что $(f \cdot A)(x_1, \ldots, x_n)$ — это многочлен, полученный из $f(x_1, \ldots, x_n)$ подстановкой $\sum a_{ij} x_j$ вместо x_i для каждого $i = 1, \ldots, n$. Проверьте, что $(f \cdot A) \cdot B = f \cdot (AB)$.

Задача 14. Проверьте без формулы Ву, что $Sq^2\sigma_m = \sigma_1\sigma_m + m\sigma_1\sigma_{m+1} + \frac{m^2+m+2}{2}\sigma_{m+2}$. Затем проверьте, что формула Ву дает такой же результат.

Задача 15. Проверьте равенство $\binom{b}{a} + \binom{b}{a+1} = \binom{b+1}{a+1}$ для всех целых a и всех b

Задача 16. * На лекции для $1 \le s \le t$ была получена формула $\sigma_s\sigma_t = \sum\limits_{a=0}^{s} \binom{b}{s-a} Sq^a(\sigma_{a+b})$, в которой считаются выполненными условия $2a + b = s + t$. Заменами $s = k - i$, $t = m + i$ это равенство приводится к виду

$$\sigma_{k-i}\sigma_{m+i} = \sum_{a=0}^{k-i} \binom{k+m-2a}{k-i-a} Sq^a(\sigma_{k+m-a})$$

Получили по одной одной для каждого $i = 0, \ldots, k$ для фиксированных k, m. Домножим i-ю формулу на $\binom{k-m}{i}$ и просуммируем по i. Докажите, что правая часть будет равна $Sq^k(\sigma_m)$.

Задача 17. Придумайте такую операцию Стинрода, которая действует на $\mathbb{F}_2[x_1]$ тождественным нулем, а на $\mathbb{F}_2[x_1, x_2]$ — нет.

Задача 18. * Придумайте такую операцию Стинрода, которая действует на $\mathbb{F}_2[x_1, x_2]$ тождественным нулем, а на $\mathbb{F}_2[x_1, x_2, x_3]$ — нет.

Задача 19. Запишем соотношение Адема ($0 < a < 2b$) в виде $Sq^aSq^b = \binom{b-1}{a}Sq^{a+b} + \sum\limits_{i=1}^{[a/2]} \binom{b-i-1}{a-2i} Sq^{a+b-i}Sq^i$. Покажите, что если коэффициент при Sq^{a+b} ненулевой, то $a + b$ не может быть степенью двойки.

Задача 20. Проверьте с помощью соотношений Адема, что $Sq^2Sq^2 = Sq^1Sq^2Sq^1$ в алгебре A.

Задача 21. С помощью формулы Ву докажите, что элементарный симметрический многочлен σ_m при m, не являющемся степенью двойки, выражается через элементарные симметрические многочлены с меньшими номерами с помощью применения квадратов Стинрода и операций сложения и умножения.

Докажите, что если $m = 2^p$, то σ_m так не выражается.

Задача 22. Пусть $J = (j_1, j_2, \ldots)$ — конечная последовательность неотрицательных целых чисел. Пусть $Sq^J = Sq^{j_1}Sq^{j_2}\ldots$, пусть $x \in R^{(1)}$. Покажите, что $Sq^Jx \ne 0$ тогда и только тогда, когда J имеет вид $(2^{m-1}, 2^{m-2}, \ldots, 2, 1)$ или получается из такой последовательности добавлением конечного числа нулей на произвольные места. Для такой последовательности J выполнено $Sq^Jx = x^{2^m}$.

Задача 23. Запишите $Sq^4Sq^2Sq^3$ в виде суммы допустимых мономов

Задача 24. Рассмотрим соотношения $R_{2,-1}$, $R_{3,-1}$, $R_{4,-1}$, $R_{4,2}$. Покажите прямым вычислением, что они либо тривиальны, либо следуют из соотношений Адема

Задача 25. $Sq^k(x^{2^m})$ не равно 0 только при $k = 0$ и $k = 2^m$

Задача 26. Найдите старший моном многочлена $Sq^{27}Sq^{12}Sq^5Sq^2(x_1 \ldots x_n)$, где n достаточно велико.

Задача 27. (Обобщение формулы Картана): $Sq^I(fg) = \sum\limits_{I'+I''=I} (Sq^{I'}f)(Sq^{I''}g)$. Здесь мультииндексы складываются покомпонентно: $(i'_1, i'_2, \ldots) + (i''_1, i''_2, \ldots) = (i'_1 + i''_1, i'_2 + i''_2, \ldots)$

Задача 28. Рассмотрим кольцо многочленов $\Bbbk[x]$. Коумножение на образующей зададим формулой $\Delta(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1$. Найдите $\Delta(x^n)$ исходя из предположения, что $\Bbbk[x]$ является биалгеброй. Проверьте, что Δ коассоциативно и что вместе с $\varepsilon : \Bbbk[x] \to \Bbbk, f(x) \mapsto f(0)$

мы получили структуру коалгебры на $\Bbbk[x]$. Проверьте, что умножение и коумножение согласованы. Если проверить соотношения, включающие единицу и коединицу, которые мы на лекции не выписывали, то это объяснит, что $\Bbbk[x]$ — биалгебра.