

В. В. Батырев

Занятие 1

Классический дискриминант многочлена n -ой степени

Рассмотрим многочлен n -ой степени

$$f(z) := a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n = \sum_{i=0}^n a_iz^i, \quad a_n \neq 0.$$

Иногда его коэффициенты a_i мы будем считать комплексными числами, а иногда просто независимыми переменными.

Нас будет интересовать классический дискриминант

$$\Delta_n(f) = \Delta_n(a_0, a_1, \dots, a_n).$$

Он представляет собой некоторое алгебраическое выражение, а точнее, некоторый многочлен от $n+1$ независимых переменных $a_0, \dots, a_n$, характеризующийся следующим свойством:

Если выбрать в качестве коэффициентов a_i некоторые комплексные числа, то получившийся многочлен $f(z) \in \mathbb{C}[z]$ будет иметь ровно n различных комплексных корней тогда и только тогда, когда значение дискриминанта $\Delta_n(a_0, a_1, \dots, a_n)$ не равно нулю.

Пример 1. $n = 2$. $f(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2$. В этом случае интересующий нас дискриминант хорошо известен в виде $\Delta_2(f) = a_1^2 - 4a_0a_2$ (дискриминант квадратного трехчлена).

Пример 2. $n = 3$. $f(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3$. Дискриминант кубического многочлена несколько менее известен:

$$\Delta_3(f) = a_1^2a_2^2 - 4a_1^3a_3 - 4a_0a_2^3 - 27a_0^2a_3^2 + 18a_0a_1a_2a_3a_3.$$

Чаще всего в математической литературе этот дискриминант появляется в более простом виде при рассмотрении специальных кубических трехчленов вида $z^3 + pz + q$ ($a_3 = 1, a_2 = 0, a_1 = p, a_0 = q$), и тогда он равен $-4p^3 - 27q^2$. Именно последнее выражение для дискриминанта возникает при нахождении корней кубического многочлена с помощью известных формул Кардано.

Пример 3. $n = 4$. $f(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 + a_4z^4$. Дискриминант многочлена четвертой степени ещё менее известен. Он состоит из суммы 16 одночленов (7 одночленов с положительным знаком, а 9 с отрицательным):

$$\begin{aligned} & a_1^2a_2^2a_3^2 + 16a_0a_2^4a_4 + 256a_0^3a_4^3 + 18a_0a_1a_2a_3^3 + 18a_1^3a_2a_3a_4 + 144a_0^2a_2a_3^2a_4 + 144a_0a_1^2a_2a_4^2 \\ & - 6a_0a_1^2a_3^2a_4 - 80a_0a_1a_2^2a_3a_4 - 128a_0^2a_2^2a_4^2 - 192a_0^2a_2a_3a_4^2 \\ & - 4a_0a_2^3a_3^2 - 4a_1^3a_3^3 - 4a_1^2a_2^3a_4 - 27a_0^2a_3^4 - 27a_1^4a_4^2. \end{aligned}$$

Упражнение 1. Подумайте, как выглядит в этом случае дискриминант для многочлена четвертой степени более специального вида $f(z) = z^4 + pz^2 + qz + r$?

Замечание 4. Может возникнуть естественный вопрос: почему бы не рассматривать дискриминант лишь только для многочленов с старшим коэффициентом $a_n = 1$? Ведь кажется, что условие $a_n = 1$ упрощает формулы, поскольку количество используемых коэффициентов многочлена уменьшается. Однако оказывается, что сохранение старшего коэффициента a_n неопределённым значением имеет два преимущества эстетического характера, которые уже явно видны из приведенных выше примеров:

- (1) Все одночлены в дискриминанте $\Delta_n(f)$ имеют одинаковую суммарную степень $2n - 2$. Здесь под суммарной степенью одночлена вида $a_0^{k_0} a_1^{k_1} \dots a_n^{k_n}$ понимается сумма $k_0 + k_1 + \dots + k_n$.
- (2) Выражение для дискриминанта $\Delta_n(a_0, a_1, \dots, a_n)$ не меняется при замене коэффициентов a_i на a_{n-i} одновременно для всех значений $i \in \{0, 1, \dots, n\}$. Иначе говоря, классические дискриминанты двух многочленов

$$a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n \quad \text{и} \quad a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$$

являются одинаковыми.

Точное математическое определение классического дискриминанта $\Delta_n(a_0, \dots, a_n)$ как некоторого неприводимого многочлена в кольце многочленов $\mathbb{Z}[a_0, a_1, \dots, a_n]$ от $n + 1$ независимых переменных может быть получено двумя способами.

Первый способ определения Δ_n использует корни $\rho_1, \dots, \rho_n$ многочлена $f(z) = a_n \prod_{i=1}^n (z - \rho_i)$. Этим способом классический дискриминант определяется формулой

$$\Delta_n(f) = a_n^{2n-2} \prod_{i < j} (\rho_j - \rho_i)^2 = (-1)^{n(n-1)/2} \prod_{i \neq j} (\rho_j - \rho_i),$$

правая часть которой является симметрическим многочленом от корней $\rho_1, \dots, \rho_n$. Согласно основной теореме о симметрических многочленах, эта правая часть может быть однозначно выражена в виде некоторого многочлена от элементарных симметрических многочленов $s_1 = \sum_{i=1}^n \rho_i, \dots, s_n = \prod_{i=1}^n \rho_i$ от корней многочлена f . Теперь остается воспользоваться теоремой Виета и равенствами $s_i = (-1)^i a_{n-i}/a_n$ ($1 \leq i \leq n$). Однако при этом еще остается не совсем очевидным тот факт, что в результате после умножения на a_n^{2n-2} положительные степени a_n в знаменателе исчезнут, и мы получим обычный многочлен от $a_0, a_1, \dots, a_n$ с целыми коэффициентами.

Пример 5. $n = 2$, $s_1 = \rho_1 + \rho_2$, $s_2 = \rho_1 \rho_2$.

$$\begin{aligned} \Delta_2(a_0, a_1, a_2) &= a_2^2 (\rho_1 - \rho_2)^2 = a_2^2 [(\rho_1 + \rho_2)^2 - 4\rho_1 \rho_2] = \\ &= a_2^2 \left[\left(\frac{a_1}{a_2} \right)^2 - 4 \frac{a_0}{a_2} \right] = a_1^2 - 4a_0 a_2 \end{aligned}$$

Упражнение 2. Пользуясь аналогичным методом получите при $n = 3$ формулу для дискриминанта $\Delta_3(a_0, a_1, a_2, a_3)$ кубического многочлена из примера 2 из симметричного многочлена от корней ρ_1, ρ_2, ρ_3 вида

$$a_3^4 (\rho_1 - \rho_2)^2 (\rho_1 - \rho_3)^2 (\rho_2 - \rho_3)^2.$$

Второй способ определения Δ_n использует характеризацию кратных корней многочлена f как общих корней f и его производной f' . Имеет место простое утверждение:

Предложение 3. Многочлен $f(z)$ не имеет кратных корней тогда и только тогда, когда f и его производная f' не имеют общих корней.

Теперь можно воспользоваться понятием **результанта двух произвольных многочленов** f и g , который сам по себе очень полезен при отыскании их общих корней.

Определение 6. Результантом $R(f, g)$ двух многочленов f и g , где

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n, \quad g(z) = b_0 + b_1 z + \dots + b_m z^m, \quad a_n b_m \neq 0,$$

называется **определитель Сильвестра** следующей квадратной матрицы размера $n + m$:

$$(7) \quad R(f, g) := \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n & 0 & \cdots \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_{m-1} & b_m & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & b_0 & \cdots & b_{m-2} & b_{m-1} & b_m & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

Теорема 4. Два многочлена $f, g \in \mathbb{C}[z]$ не имеют общих корней тогда и только тогда, когда $R(f, g) \neq 0$.

Упражнение 5. Вычислите результат линейного многочлена $f(z) = a_0 + a_1 z$ и произвольного многочлена $g(z) = b_0 + b_1 z + \cdots + b_m z^m$.

Упражнение 6. Вычислите результат двух произвольных квадратичных многочленов $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2$ и $g(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2$.

Таким образом мы приходим к другому эквивалентному определению классического дискриминанта в виде

$$(8) \quad \Delta_n(f) := (-1)^{n(n-1)/2} \frac{1}{a_n} R(f, f') = (-1)^{n(n-1)/2} \frac{1}{a_n} \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n & 0 & \cdots \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & 2a_1 & \cdots & (n-1)a_{n-1} & na_n & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & a_1 & \cdots & (n-2)a_{n-2} & (n-1)a_{n-1} & na_n & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

Пример 9. Рассмотрим случай $n = 2$, $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2$. Тогда

$$\frac{-1}{a_2} \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & 2a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & 2a_2 \end{vmatrix} = \frac{-1}{a_2} (4a_0 a_2^2 + a_1^2 a_2 - 2a_1^2 a_2) = a_1^2 - 4a_0 a_2.$$

Упражнение 7. Проверьте равенство 8 для $n = 3$:

$$\frac{-1}{a_3} \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & 2a_2 & 3a_3 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 2a_2 & 3a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 2a_2 & 3a_3 \end{vmatrix} = a_1^2 a_2^2 - 4a_1^3 a_3 - 4a_0 a_2^3 - 27a_0^2 a_3^2 + 18a_0 a_1 a_2 a_3 a_3.$$

Отметим, что второй подход к определению дискриминанта также немедленно показывает, что классический дискриминант $\Delta_n(f)$ является однородным многочленом степени $2n - 2$. То есть выполнено условие

$$(10) \quad \Delta_n(\lambda f) = \lambda^{2n-2} \Delta_n(f) \quad \forall \lambda \neq 0$$

Замечание 11. С помощью компьютера количество мономов в $\Delta_n(f)$ подсчитано к настоящему времени для всех $n \leq 17$. Это количество для $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7$ равно соответственно 2, 5, 16, 59, 246, 1103, а для $n = 17$ это количество уже близко к $2 \cdot 10^{10}$.

Упражнение 8. Пользуясь подходящим определением, докажите следующие свойства классического дискриминанта:

- (1) $\Delta_n(f(\lambda z)) = \lambda^{n(n-1)} \Delta_n(f(z))$ для любых $\lambda \neq 0$.
- (2) $\Delta_n(f(z)) = \Delta_n(z^n f(z^{-1}))$. Обратим внимание, что первое свойство показывает, что все мономы в Δ_n имеют одинаковый суммарный вес $n(n-1)$, если приписать каждой отдельной переменной a_i вес i .

Для доказательства эквивалентности двух определений классического дискриминанта Δ_n полезно использовать формулу, описывающую результат $R(f, g)$ через корни многочленов f и g :

Теорема 9. Пусть $f(z) = a_n(z - \alpha_1) \cdots (z - \alpha_n)$ и $g(z) = b_m(z - \beta_1) \cdots (z - \beta_m)$. Тогда Имеет место следующие равенства

$$R(f, g) = a_n^m b_m^n \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (\alpha_i - \beta_j) = a_n^m \prod_{i=1}^m g(\alpha_i) = (-1)^{nm} \prod_{j=1}^m f(\beta_j).$$

Упражнение 10. Покажите, что

$$\Delta_n(a_0 + a_n z^n) = (-1)^{n(n-1)/2} n^n a_0^{n-1} a_n^{n-1}.$$

Замечание 12. Отметим, что для каждого $n \geq 2$ в классическом дискриминанте Δ_n имеются следующие два монома $\prod_{i=1}^{n-1} a_i^2$ и $(-1)^{n(n-1)/2} n^n a_0^{n-1} a_n^{n-1}$.

Гипотеза 13. Число n^n – максимальный по модулю коэффициент в Δ_n . Этот максимум достигается в точности на единственном мономе $(-1)^{n(n-1)/2} n^n a_0^{n-1} a_n^{n-1}$.

Определение 14. Пусть

$$\Delta_n(f) = \sum_k c_k a_0^{k_0} a_1^{k_1} \cdots a_n^{k_n}.$$

Многогранником Ньютона $Newt(\Delta_n)$ классического дискриминанта $\Delta_n(f)$ называется выпуклая оболочка в $\mathbb{R}^{n+1}$ всех целых точек $k = (k_0, k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ для которых моном $a^k := a_0^{k_0} a_1^{k_1} \cdots a_n^{k_n}$ присутствует в $\Delta_n(f)$ с ненулевым коэффициентом c_k .

Замечание 15. Пусть

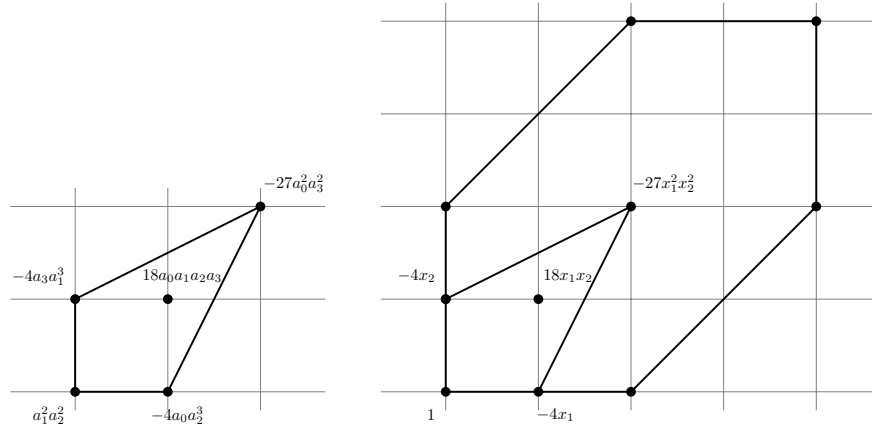
$$\Delta_n(f) = \sum_k c_k a_0^{k_0} a_1^{k_1} \cdots a_n^{k_n},$$

тогда для всех $k = (k_0, k_1, \dots, k_n)$ со свойством $c_k \neq 0$ выполнены два линейных соотношения

$$\sum_{i=0}^n k_i = 2n - 2 \text{ and } \sum_{i=0}^n i k_i = n(n - 1).$$

Поэтому многогранник Ньютона $Newt(\Delta_n) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ лежит в $(n - 1)$ -мерном линейном аффинном подпространстве $L \subset \mathbb{R}^{n+1}$, заданном двумя линейными условиями:

$$\sum_{i=0}^n x_i = 2n - 2 \text{ and } \sum_{i=0}^n i x_i = n(n - 1).$$



Пример 16. $Newt(\Delta_2)$ — это отрезок с концами $(1, 0, 1)$ и $(0, 2, 0)$. Направляющий вектор этого отрезка равен $(1, -2, 1)$. Если положить $x_1 = a_0 a_2 / a_1^2$, то получим

$$\frac{\Delta_2(a_0, a_1, a_2)}{a_1^2} = 1 - 4x_1.$$

Пример 17. $Newt(\Delta_3)$ — это четырехугольник вершинами $(0, 2, 2, 0)$, $(2, 0, 0, 2)$, $(0, 3, 0, 1)$, $(1, 0, 3, 0)$. Удобно ввести целочисленный базис в плоскости $L \subset \mathbb{R}^4$, состоящий из разностей векторов $(0, 3, 0, 1) - (0, 2, 2, 0) = (0, 1, -2, 1)$ и $(1, 0, 3, 0) - (0, 2, 2, 0) = (1, -2, 1, 0)$. Если положить $x_1 = a_0 a_2 / a_1^2$ и $x_2 = a_1 a_3 / a_2^2$, то получим

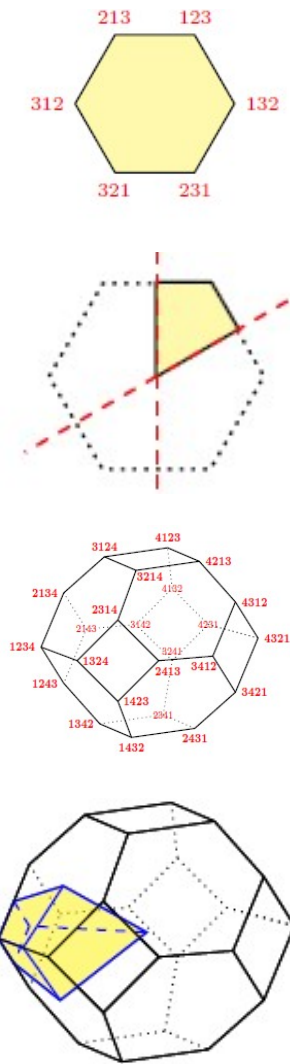
$$\frac{\Delta_3(f)}{a_1^2 a_2^2} = 1 - 4x_1 - 4x_2 + 18x_1 x_2 - 27x_1^2 x_2^2.$$

Пример 18. $Newt(\Delta_4)$ — это трехмерный многогранник, который комбинаторно эквивалентен трехмерному кубу. В частности, $Newt(\Delta_4)$ имеет 8 вершин, которые соответствуют мономам:

$$a_1^2 a_2^2 a_3^2, -4a_0 a_2^3 a_3^2, -4a_1^3 a_3^3, -4a_1^2 a_2^3 a_4, -27a_0^2 a_3^4 - 27a_1^4 a_4^2, 16a_0 a_2^4 a_4, 256a_0^3 a_4^3.$$

Аналогично предыдущим примерам полезно ввести три новые переменные $x_1 = a_0 a_2 / a_1^2$, $x_2 = a_1 a_3 / a_2^2$, $x_3 = a_2 a_4 / a_3^2$ и получить выражение от трех переменных

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_4(f)}{a_1^2 a_2^2 a_3^2} = & 1 - 4x_1 - 4x_2 - 4x_3 - 6x_1 x_2^2 x_3 + 16x_1 x_3 + 18x_1 x_2 + 18x_2 x_3 - 27x_1^2 x_2^2 - 27x_2^2 x_3^2 \\ & + 144x_1^2 x_2^2 x_3 + 144x_1 x_2^2 x_3^2 + 256x_1^3 x_2^4 x_3^3 - 80x_1 x_2 x_3 - 128x_1^2 x_2^2 x_3^2 - 192x_1^2 x_2 x_3^2. \end{aligned}$$



Наглядная взаимосвязь многогранника Ньютона $Newt(\Delta_n)$ с $(n-1)$ -мерным пермutoэдром для случаев $n = 3$ и $n = 4$ иллюстрирует общую теорему Михалкина-Степаненко-Циха о разложении срезов классического дискриминанта Δ_n :

Теорема 11. [3] Пусть Γ_i - одна из $(n-1)$ гиперграней многогранника Ньютона $Newt(\Delta_n)$, являющихся одновременно гипергранями объемлющего пермutoэдра Π_{n-1} . Тогда имеет место разложение

$$\Delta_n(a_0, a_1, \dots, a_n)|_{\Gamma_i} = a_i^2 \Delta_i(a_0, \dots, a_i) \Delta_{n-1-i}(a_i, \dots, a_n).$$

Теорема Гельфанда-Зелевинского-Капранова

Теорема 12. [1, 2] Многогранник Ньютона классического дискриминанта $\text{Newt}(\Delta_n)$ является $(n-1)$ -мерным комбинаторным кубом. Множество всех 2^{n-1} вершин многогранника $\text{Newt}(\Delta_n)$ взаимно однозначно соответствуют конечным подмножествам

$$I = \{i_1 < i_2 < \dots < i_s\} \subseteq \{1, 2, \dots, n-1\}, \quad (0 \leq s = |I| \leq n-1).$$

При этой биекции каждая целая вершина $\overline{k(I)} \in \mathbb{Z}^{n+1}$, соответствующая подмножеству $I = \{i_1 < i_2 < \dots < i_s\}$, имеет следующие $n+1$ координаты:

$$k_0 = i_1 - i_0 - 1, k_n = i_{s+1} - i_s - 1,$$

$$k_{i_p} = i_{p+1} - i_{p-1} \text{ если } i_p \in I,$$

$$k_i = 0 \text{ если } i \notin I \cup \{0, n\},$$

где $i_0 := 0, i_{s+1} := n$. Если обозначить $l_p := i_{p+1} - i_p$ ($0 \leq p \leq s$), то соответствующий этой вершине $k(I)$ экстремальный моном

$$a^{k(I)} = a_0^{l_0-1} a_{i_1}^{l_1+l_0} a_{i_2}^{l_2+l_1} \dots a_{i_{s-1}}^{l_{s-1}+l_{s-2}} a_{i_s}^{l_s+l_{s-1}} a_n^{l_s-1}$$

в дискриминанте Δ имеет коэффициент

$$c_{k(I)} = \prod_{p=0}^s (-1)^{l_p(l_p-1)/2} l_p^{l_p}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] I.M. Gelfand, M.M. Kapranov, A.V. Zelevinsky *Newton polytopes of the classical resultant and discriminant* Adv. Math. 84, No.2, 237-254 (1990).
- [2] Gelfand, I. M.; Zelevinski, A. V.; Kapranov, M. M. *Discriminants, resultants, and multidimensional determinants*, Mathematics: Theory & Applications. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1994.
- [3] E.N.Mikhalkin, V.A.Stepanenko, A.K.Tsikh, *Geometry of factorization identities for discriminants*, Dokl. Math., 102(2020), no. 1, 279–282.