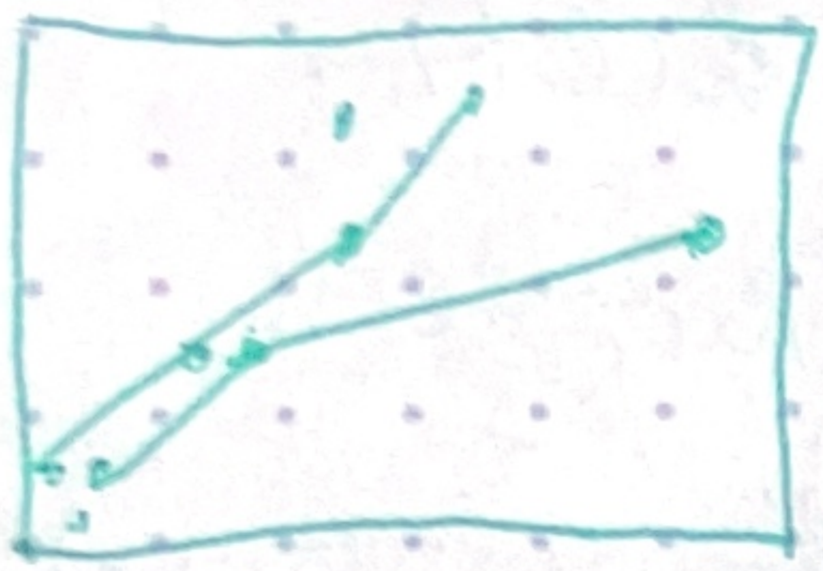
Лекция 2.



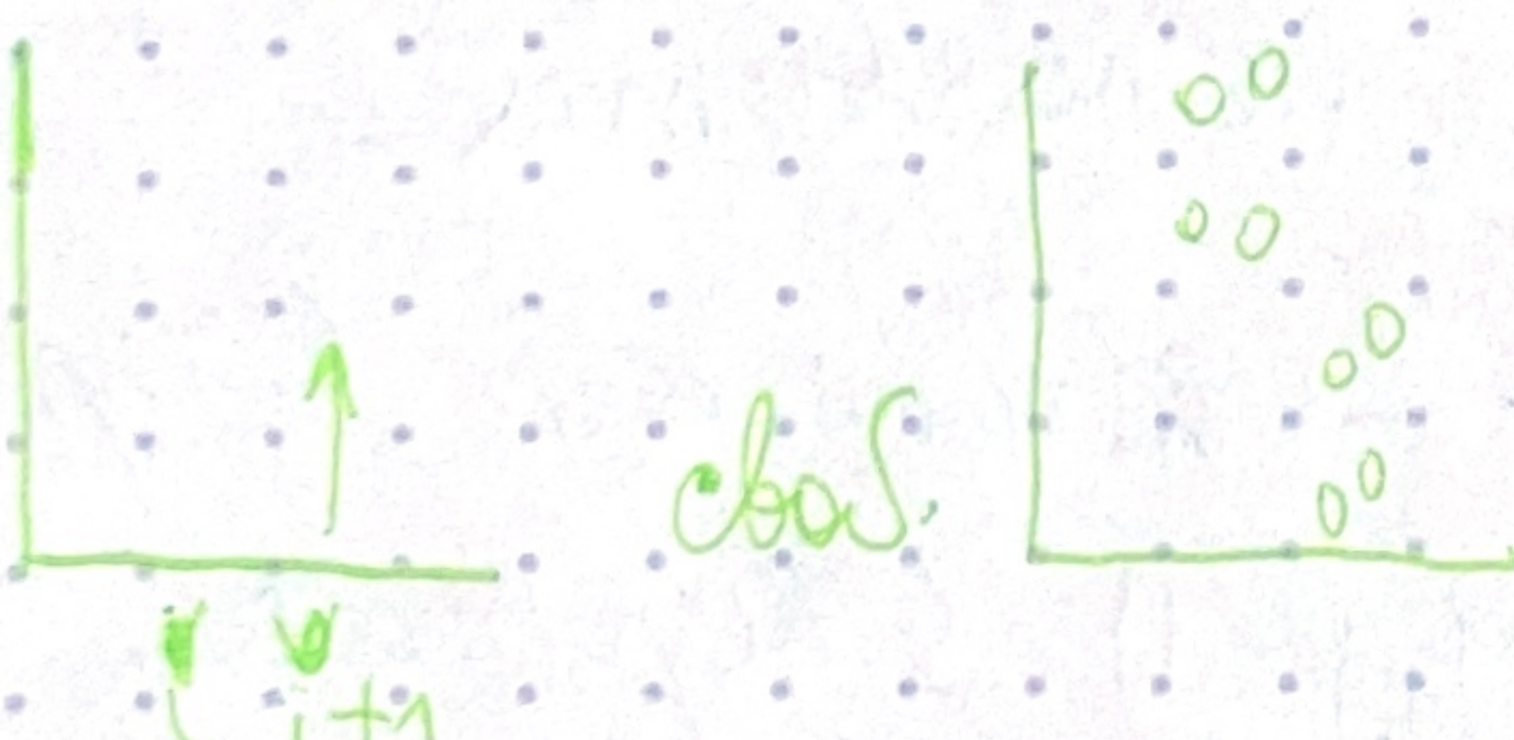
Устойчивое паросочет. для строк $j, j+1$. Идём по строке $j+1$ слева направо, "опора" для шара в кл. $(i, j+1)$ = самый правый своб. шар (k, j) с $k < i$.

Операции D_j и U_j.

D_j опускает самый правый своб. шар в строке $j+1$, U_j поднимает самый левый своб. шар в строке j. Если $D_j a \neq 0$, то
$U_j D_j a = a$.
действует эфф.

Δ Устойч. паросоч. между строками j и $j+1$ для a и для $D_j a$ отлич. на этот шар ▲

Операции L_i и R_i



L_i сдвиг. влево верхний своб. шар из столбца $i+1$

R_i сдвиг. вправо нижн. своб. шар из столбца i.

Лемма Можно установить между строками j и $j+1$ устойчивое паросочетание и указать в строке $j+1$ (последний) свободный шарик (либо сказать, что его нет) так, что после примен. L_i тот же шарик будет исп. роль последнего свободного и те же шарики будут участв. в (строчном) паросочет. (между j и $j+1$)
(не предполагаем действие L_i эфф.)

Δ Если L_i неэфф, то очевидно. Если L_i эфф, но двигает шарик не из строк j, $j+1$, то для этих строк ничего не изм., и утв. верно. Если L_i двигает шарик из строки $j+1$, то в вертик. паросоч. шарик из $(i+1, j+1)$ был своб. $\Rightarrow$ $a_{i,j} < a_{i+1,j+1}$ и при гориз. паросоч. все шарики из $c_{i,j}$ заняты шариками из $(i+1, j+1)$. Если L_i не трогало последний своб. шарик строки $j+1$, утв. верно. Если последний своб. шарик был в $(i+1, j+1)$ и их было хотя бы 2, назовём выделенным тот, который не сдвинуло L_i. Если он один, то после примен. L_i он сместится влево, но ост. своб. и последним.

Если L_i двигает шарик $(i+1, j)$, то в вертик. паросоч. все шарики выше него были заняты, т.е. у всех шариков в $(i+1, j+1)$ есть пара в (i, j). Тогда для гориз. паросоч. пары не нарушатся (либо двигаемый шарик был чей-то парой и останется, либо был без пары и пару не обретёт: шары в $(i+1, j+1)$ все уже заняты). Посл. своб. шар строки $j+1$ не изм.

Утв. $L_i D_j = D_j L_i$.

Δ Для L_i и D_j отметим своб. шары, как в лемме. Если кто-то из L_i и D_j нетрив., шар будет макс один, утв. верно.
Если будут выбраны два разл. шара, то и $L_i D_j$, и $D_j L_i$ двигают эти шары.
Если выбран один и тот же шар, то он сместится вниз и влево в результате обеих операций в $\forall$ порядке. $\blacktriangle$

Опр Столбцовый вес и строчный вес


Следствие слово H, сост. из гориз. опер., тогда и только тогда эфф. действует на массив a, когда оно эфф-действует на любой массив, получ. из a вертик. операциями (и симметрично)

△ Дост. проверить, $\forall i, j$ L_i эфф.-действует на $a \Leftrightarrow$ эфф действует на $D_j a$ и на $U_j a$. Если $L_i a = a \Rightarrow$

$L_i D_j a = D_j L_i a = D_j a$, $L_i U_j a = U_j L_i a = U_j a$.

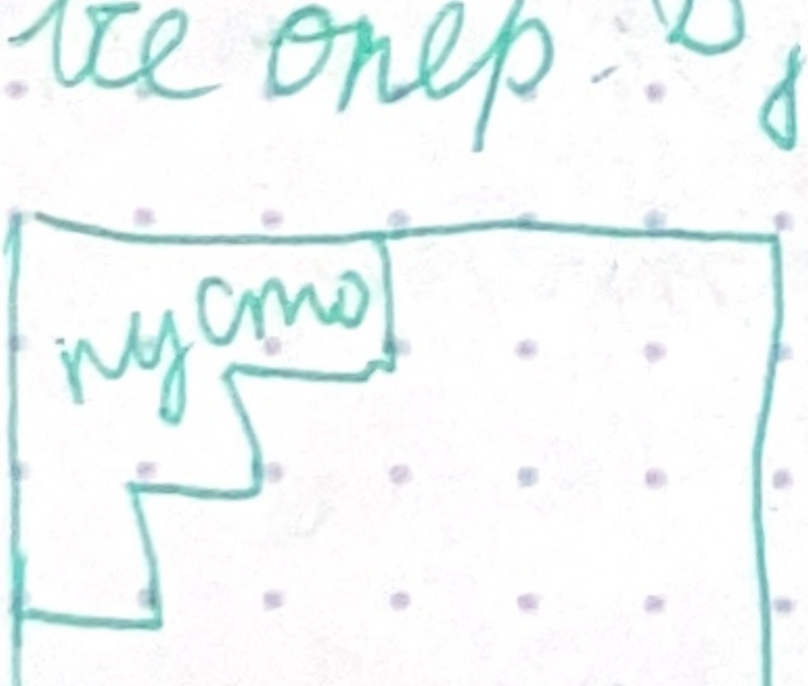
Если $L_i a \neq a$, то у столбц. веса коэф. i увел.

Но D_j и U_j не меняют столбц. вес

$\Rightarrow L_i D_j a = D_j L_i a \neq D_j a$, $L_i U_j a = U_j L_i a \neq U_j a$ ▲

Плотные массивы

Опр Массив наз. плотным вниз, если все опер. D_j действуют на нём тожд.



! за конечное число примен. разл. D_j из $\forall$ массива получ. плотный вниз.

Аналогично опр. плотность влево (вверх, вправо)

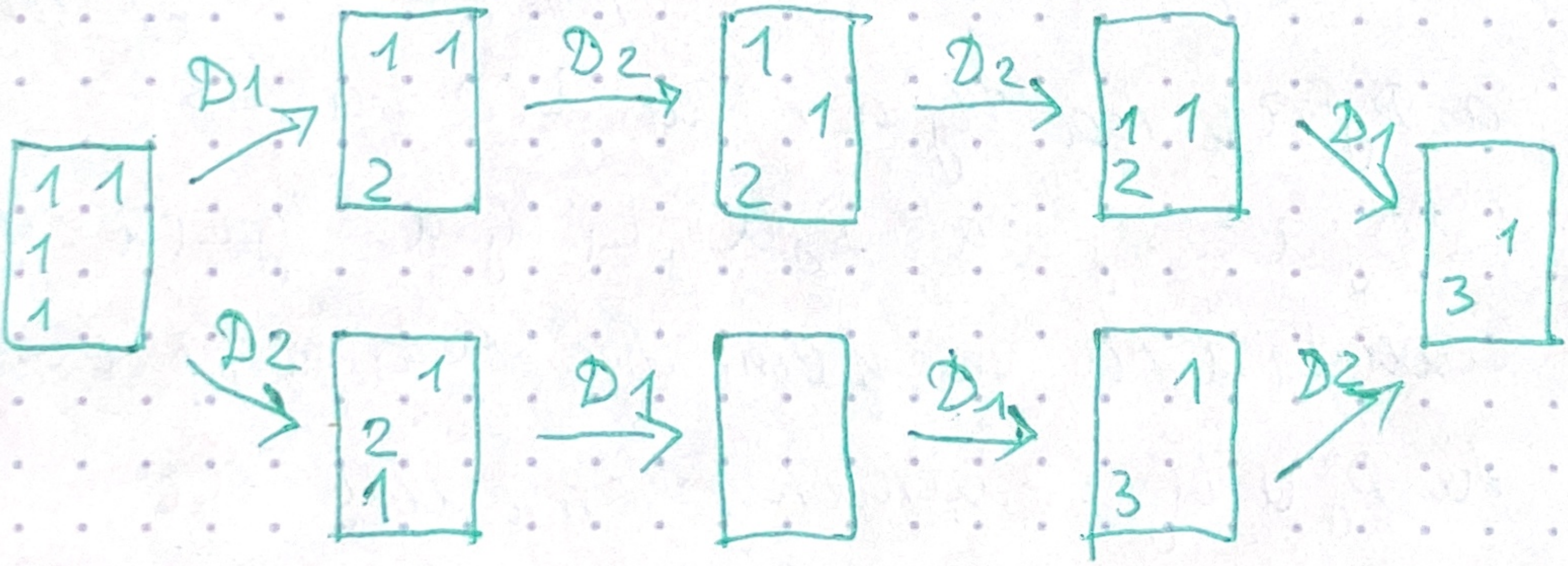
! В любом плотном влево массиве

<u>Опр.</u> Биплотный = плотный вниз и влево.

! из ∀ массива м.д. биплотный

$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots$

Пример



<u>Предложение</u> Результат D-(L-)уплотнения не зависит от выбора посл. уплотн. опер.

Δ Докажем для D-уплотнения.

Случай 0: исходный массив L-плотный. Его D-уплотнение будет биплотно, его столбцовый вес известен ⇒ эти знач. и будут стоять по диаг.

Случай 1: массив a произволен, пусть $a' = L_{i_k} \dots L_{i_1} a$ будет L-плотен (эфф). Пусть $D_{j_m} \dots D_{j_1} a = \forall$ (эфф.) способ уплотнить a вниз.

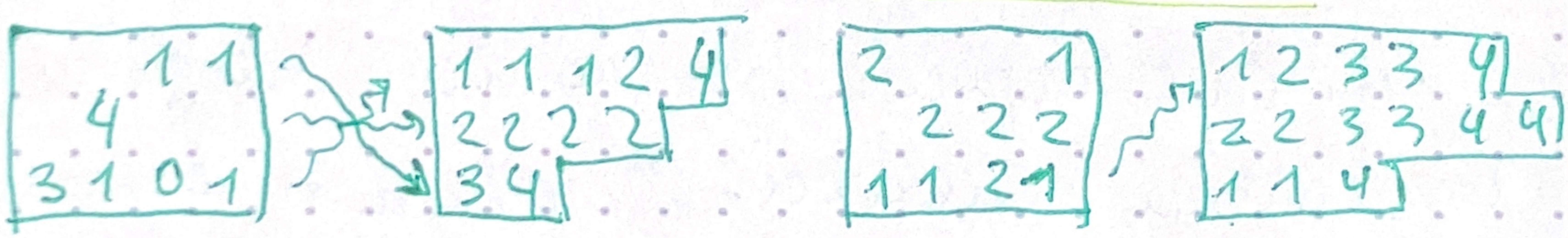
Тогда $\underbrace{L_{i_k} \dots L_{i_1}}_{\text{эфф.}} (D_{j_m} \dots D_{j_1} a)$ биплотен.

$$D_{j_m} \dots D_{j_1} a = (L_{i_k} \dots L_{i_1})^{-1} L_{i_k} \dots L_{i_1} D_{j_m} \dots D_{j_1} a = (R_{i_1} \dots R_{i_k}) \underbrace{D_{j_m} \dots D_{j_1} (L_{i_k} \dots L_{i_1} a)}_{\text{случай 0}}$$

не завис. от способа упл.

т.е. уплотнение a вниз не завис. от способа $D_{j_m} \dots D_{j_1}$. ▲

Строчная развёртка D-плотных массивов и таблицы Юнга.



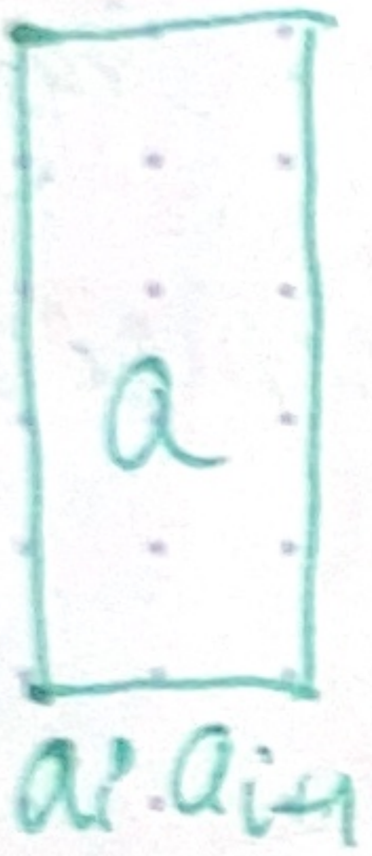
Условие плотности массива вниз = = это диагр. Юнга, и она полустанд. заполн. $1, 2, \dots, n$!!!

подробнее

Действие симметрич. группы S_n на LR-множествах.

$S_n = \{$ все перест. мн-ва $\{1, 2, \dots, n\}\}$

$|i, i+1\rangle$ на массивах? a = массив $(a_1, \dots, a_n)$ — столб. вес



$a_i > a_{i+1}$

s_i

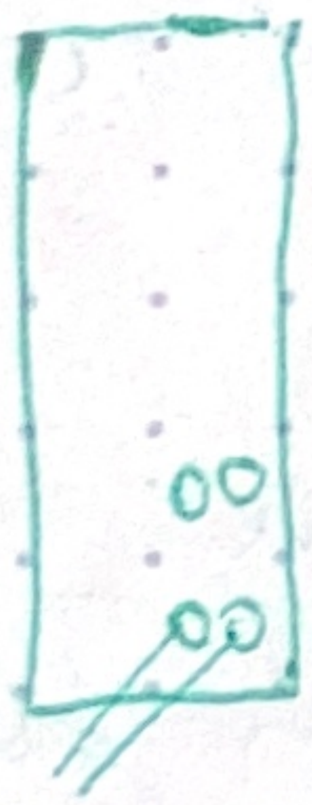
$|i, i+1\rangle a = R_i^{a_i - a_{i+1}}$

$a_i < a_{i+1}$ $\quad |i, i+1\rangle a = L_i^{a_{i+1} - a_i}$

$(|i, i+1\rangle)^2 = Id$

при $|k - i| \geq 2$ $\quad |i, i+1\rangle |k, k+1\rangle = |k, k+1\rangle |i, i+1\rangle$

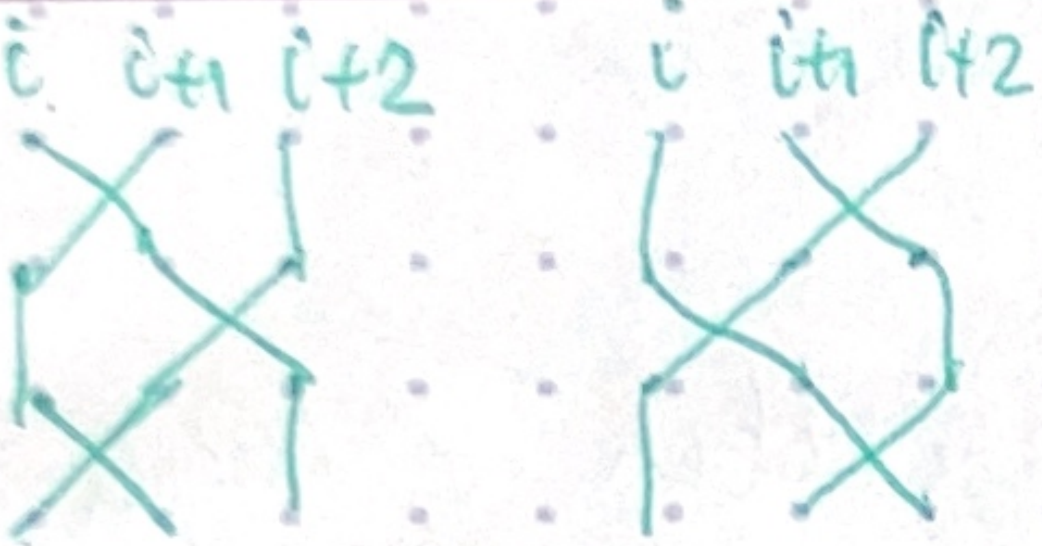
! склеить массив в кольцо!



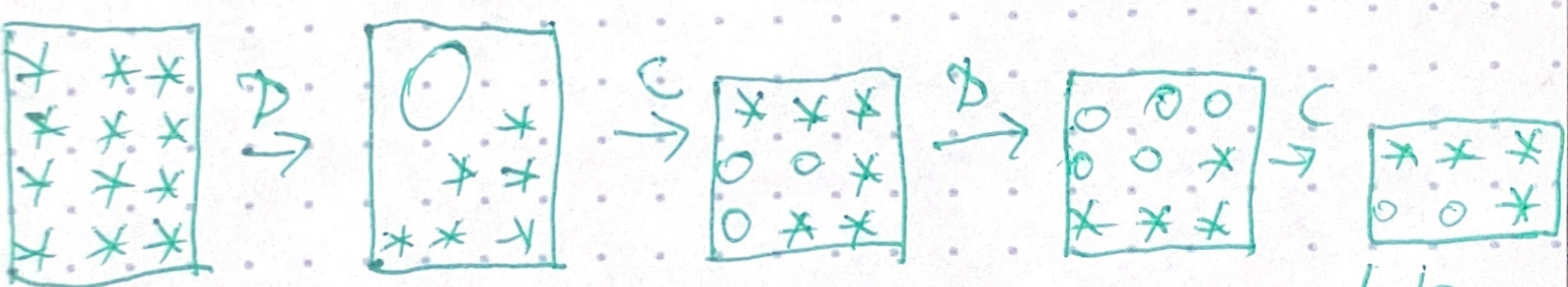
ищем пару = самый верхний своб. шар в столбце i

Устойч. паросоч. на „кольце" не завис. от места склейки. Останется ровно $|a_i - a_{i+1}|$ шаров, кот. и будут двигаться $|i, i+1\rangle$

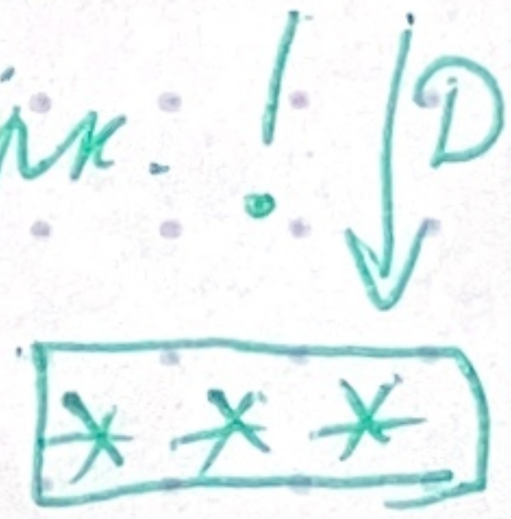
Для задания действия S_n дост. задать действие всех $|i, i+1\rangle$, т.ч. они инволютивны, вып. далёкое комм. и соотн. кос $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$



Для проверки соотн. кос считаем массив трёхстолбцовым. Есть уплотн. вниз D и цикл. сдвиг C (C и D комм. с L_i, L_{i+1}, R_i, R_{i+1})



нулевые строки можно вычёрк.!



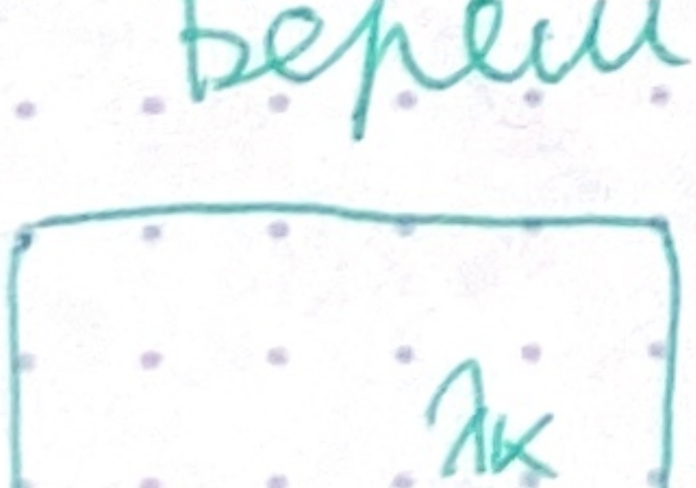
Соотн. кос ~ перест. a_i, a_{i+1}, a_{i+2}

т.е. выполняется!

Где брать многочлен Шура?

$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_{\cancel{k}}$ $(\cancel{k} \leq n,\ \leq m)$

Берём биплотн. массив и его



орбиту под действием L_i, R_i. Все получ. массивы будут D-плотными.

Все D-плотные массивы формы λ будут получены. На этом мн-ве массивов действует группа S_n.

Строим многоч. Шура: $\forall$ массива $\forall$ шара в столбце i ему соотв. x_i. Дано действие $S_n \rightsquigarrow$ многочлен симметрич. Биекция с SSYT $\rightsquigarrow$ это совп. с S_λ.

Задача. Пусть мы склеили массив в кольцо, то есть отождествили нижнюю и верхнюю границы прямоугольника. Докажите, что для вертикального устойчивого паросочетания с переходом через линию склейки результат не зависит от того, в каком месте проходит эта линия.