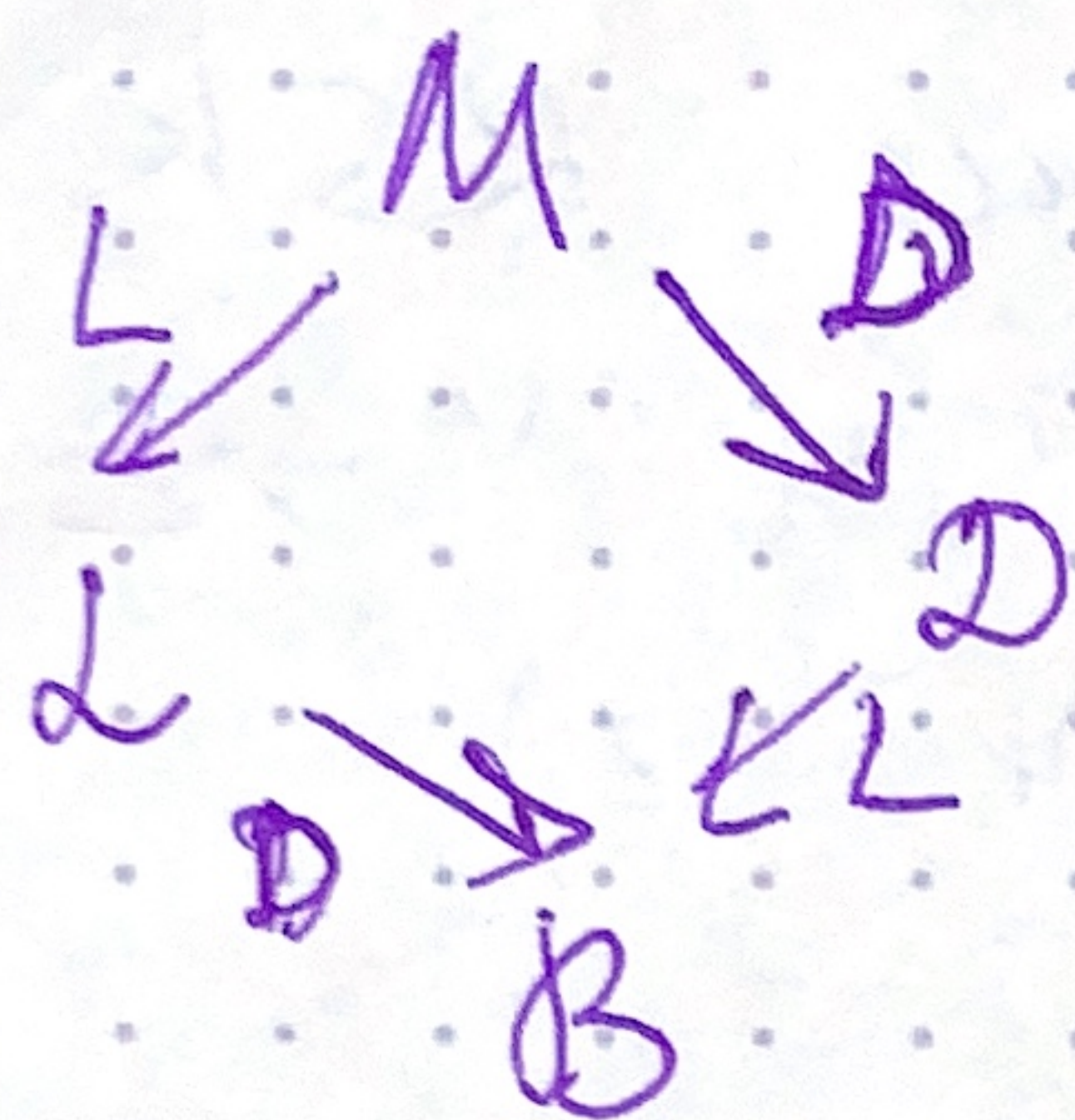




Δ Дост. показать, что
отобр. $M \rightarrow L \times B$
 $a \mapsto (La, Da)$

взаимно однозначна

Инъективность. Пусть для

a, a' будет $La = La'$ и $Da = Da'$. Значит,

слово Λ , эррективно ун. $Da = Da'$

всего. Тогда Λ эрр. действует на a и

на a' . $La = La' = La' = La'$. Тогда

$a = \Lambda^{-1}(La) = \Lambda^{-1}(La') = a'$, что и треб.

Теперь сюръект. Возьмем пару (a_e, a_d) ,

где a_e может быть, a_d может быть,

$Da_e = La_d$. Пусть слово Λ эрр. ун. всего

a_d до La_d . Слово Λ^{-1} эрр. действ. на

$La_d = Da_e$, значит, оно эрр. действ.

на a_e . Положим $a = \Lambda^{-1}a_e$. Тогда

$La = a_e$ (операции из слова Λ сделают

из a L -мощный массив) и $Da =$

$= D\Lambda^{-1}a_e = \Lambda^{-1}Da_e = \Lambda^{-1}La_d = a_d$. $\blacktriangle$

Собираем урожай

Графики отображений и SYT.

Отобр. $a: I \rightarrow J$ - массив, в катг. столбцов один шарик. Т.е. шарик в кл. $(i, a(i))$.

По Теореме катг.-такой массив $\leadsto$ пара (a_e, a_d) , при этом форма массива $a = \text{diagr. Юнга } \lambda, |\lambda| = n$; строчный вес $a_d = (1, 1, \dots, 1)$, строчная развёртка массива $a_d =$ табл. Юнга формы λ , занонт. $\{1, 2, \dots, n\}$ ровно по 1 разу,

столбц.-развёртка массива $a_e =$ SSYT формы λ , занонт. $\{1, 2, \dots, m\}$.

Обозн $d_\lambda(m) = \# \text{ SSYT формы } \lambda,$
занонт. $\{1, 2, \dots, m\}$

$d_\lambda \# = \# \text{ SYT, т.е. } |\lambda| = n, \text{ они зан-}$
числами $1, 2, \dots, n$ по 1 разу

Всевозм. массивов m^n , получ

$$m^n = \sum_{\lambda, |\lambda| = n} d_\lambda \cdot d_\lambda(m)$$

График биекции. $|I|=|J|=n$, а массив
 со строки весов и столбцов - весов $= (1, 1, \dots, 1)$

$$n! = \sum_{\lambda, |\lambda|=n} d_{\lambda}^2$$

Ф. Бернсайда
 предст. S_n

Это наз. соответствием Робинсона -
 Шенстеда: $\forall$ n -та группы S_n ему
 сопост. пара таблиц Юнга (SYT)
 одинаковой формы.

Назовем:

1) Пусть σ сопост. пара таблиц (P, Q) .

Что сопост. σ^{-1} ?

2) Длина макс. возр. под. в $(\sigma(1), \dots, \sigma(n))$ равна
 длине первой ^{то столбца} строки Q (т.е. λ_1^Q).

3) $\sum_{\lambda, |\lambda|=n} d_{\lambda} = |\{\sigma \in S_n \mid \sigma^2 = 1\}|$

Потг. Келли $\sum_{\lambda} s_{\lambda}(x) s_{\lambda}(y) = \prod_{i,j} \frac{1}{1-x_i y_j}$

Докажем:

$$\prod_{1 \leq i \leq n} \prod_{1 \leq j \leq m} \frac{1}{1-x_i y_j} = \sum s_{\lambda}(x_1 \dots x_n) s_{\lambda}(y_1 \dots y_m)$$

Кажд. в кл. (i, j) - мономи $x_i y_j$.

Сумма $\prod$ мономов для всех массивов фикс. формы λ
 все кл. массива

равна $S_\lambda(x_1 \dots x_n) S_\lambda(y_1 \dots y_m)$.

Далее возьмем сумму по вообще всем массивам, это $\prod_{1 \leq i \leq n} \prod_{1 \leq j \leq m} (1 + x_i y_j + (x_i y_j)^2 + \dots)$

$$\text{т.е. } \sum_{\lambda, \text{ длины } \leq \min(m, n)} S_\lambda(x_1 \dots x_n) S_\lambda(y_1 \dots y_m) = \prod_{1 \leq i \leq n} \prod_{1 \leq j \leq m} \frac{1}{1 - x_i y_j}$$

Огранич. на λ и на i, j можно отбросить!!!
(градуировка, $m=n$, где канг. град-канг.
 $\exists N$, надо брать $n > N$)

Есть еще теория Шура

ДУ-многообразия и ДУ-орбиты

ДУ-ин-во: замкн. отн. D, U

ДУ-орбита: — и действие D_j и U_j
по всем j транз.

В любой орбите есть д-многообразий
массив a , будем наз. его нижними ~~концами~~ ^{массивом}.

Утв Объед., пересеч. и разности ДУ-ин-во
также явл. ДУ-ин-вами. Всякое ДУ-ин-во
явл. дизъюнктными объед. ДУ-орбит.

Δ Пусть A', A'' ДУ-ин-во, и $a' \in A' \setminus A''$.

Если $\phi_j a' \in A''$, то D_j действ. эррр $\Rightarrow \exists_j D_j a' \in A''$,
но $a' \notin A''$, пр-е $\blacktriangle$

Опр Стандартной орбитой будем наз-
ДУ-орбиту бикомпл. массива λ .

Любая орбита ^{уплотн. влево} $\rightsquigarrow$ станд. орб-
(м.о. биекции) (приним. слово ^{уплотн. влево})

Для любой орб. $\mathcal{O}$ наз λ -ее тип.

Сегодня $\bar{x}^a = (x_1^{\text{строчн вес}(1)}, x_2^{\text{стр вес}(2)}, \dots, x_m^{\text{стр вес}(m)})$

Пусть $\mathcal{O}$ -нек. ДУ-орбита,

$\sum_{a \in \mathcal{O}} \bar{x}^a = S_\lambda(x_1, \dots, x_m)$, где λ -форма
орбиты $\mathcal{O}$.

Правило Литтлвуда - Рунгардсона.
 Для произведения многоугольника
 верна ф-ла $S_\lambda S_\mu = \sum_{\nu} c_{\lambda\mu}^{\nu} S_\nu$, $c_{\lambda\mu}^{\nu} \in \mathbb{Z} \geq 0$,
 сгруппирование идёт по всем диагр.
 Юнга ν , получающимся из λ добавлением
 $|\mu|$ клеток. Которое $c_{\lambda\mu}^{\nu}$ равен числу
 способов заполнить эти добавл. кл.
 μ_1 единицами, μ_2 двойками и т.д. так,
 чтобы получ. косая табл. Юнга
 формы $\nu \setminus \lambda$, являющаяся одновр.
 текстом яматуги, (1934: форм. б/док)

доказано: Уиттенберге '77
 Томас '74

Из этой формулировки не видно,
 что $c_{\lambda\mu}^{\nu} = c_{\mu\lambda}^{\nu}$