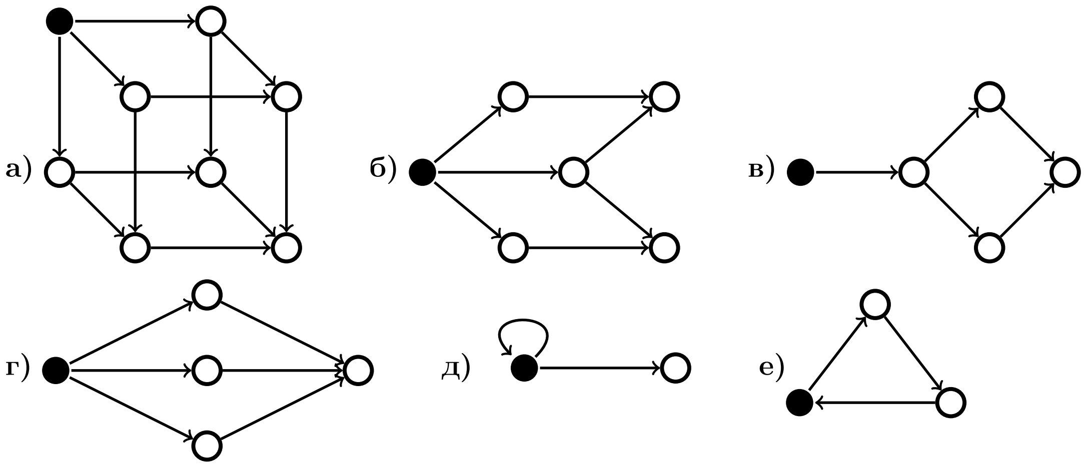
Задачи к курсу «$\boldsymbol{\lambda}$-исчисление»
Дубна, ЛШСМ-2025, лектор С. Л. Кузнецов

1. Определим термы, соответствующие логическим константам «истина» и «ложь» следующим образом: $\mathbf{t} = \lambda x.\lambda y.x$ и $\mathbf{f} = \lambda x.\lambda y.y$. Постройте термы, выражающие конструкцию «если ... то ... иначе» и логические операции «и», «или», «не». (Терм **if** K **then** M **else** N должен редуцироваться к M при $K = \mathbf{t}$ и к N при $K = \mathbf{f}$; термы вида **and** M N, **or** M N и **not** M — к соответствующим значениям при подстановке **t** или **f** вместо M и N: например, **or f t** $\to_\beta^*$ **t**, **not t** $\to_\beta^*$ **f** и т.п.)

2. Постройте пример слабо, но не сильно нормализуемого λ-терма.

3. Постройте пример λ-терма, для которого существует бесконечная цепь редукций, состоящая из различных термов.

4. Может ли λ-терм иметь (в точности) следующий граф β-редукций? (Исходный терм отмечен закрашенной точкой.)



5. а) Существуют ли такие термы M_1 и M_2, что $M_1 =_\beta M_2$, но при этом M_1 сильно нормализуем, а M_2 — нет? **б)** Тот же вопрос для слабой нормализуемости.

6. Существует ли такой слабо нормализуемый λ-терм M, что его последовательность редукций по нормальной стратегии не менее, чем в 100 раз длиннее, чем кратчайшая возможная последовательность редукций к нормальной форме?

7. Существуют ли такие термы M и N, что оба M и N не слабо нормализуемы, а терм (MN) слабо нормализуем?

8. Существуют ли такие термы M и N, что $M[x := N]$ слабо нормализуем, а сам M — нет?

9. Рассмотрим следующую алгоритмическую задачу. Даны два λ-терма P и Q. Выяснить, существует ли такой λ-терм R, что $P \to_\beta^* R$ и $Q \to_\beta^* R$. Является ли эта задача алгоритмически разрешимой?

10. Пусть $? = \lambda abcdefghijklmnopqstuvwxyzr.r(thisisafixedpointcombinator)$ и $F = ??????????????????????????$. Докажите, что F является комбинатором неподвижной точки, т.е. для любого терма X верно $FX =_\beta X(FX)$.

11. Пусть M — комбинатор неподвижной точки, т.е. для любого терма F верно $MF =_\beta F(MF)$. Докажите, что M не имеет нормальной формы (т.е. не слабо нормализуем)?

12. а) Докажите, что существует такой λ-терм M, что для любого λ-терма N верно $MN =_\beta MM$. **б)** Докажите, что не существует такого λ-терма F, что для любых двух λ-термов M и N верно $F(MN) =_\beta M$.