1. Постановка задачи о восстановлении функции по значениям в точках и предварительные сведения

1.1. **Постановка задачи.** Пусть $f\colon \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$, т.е. f — функция на булевом кубе. Предположим, что саму функцию мы не знаем, но знаем ее значения $f(x^1), \dots, f(x^N)$ в некоторых точках $x^1, \dots, x^N \in \{-1,1\}^n$. Нам бы хотелось научиться восстанавливать эту функцию как можно более точным образом, т.е. по набору значений $(x^1, f(x^1)), \dots, (x^N, f(x^N))$ строить функцию $h\colon \{-1,1\} \to \mathbb{R}$, близкую к f в некотором смысле.

На функциях $f\colon \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$ определена операция

$$\mathbb{E}[f] := \frac{1}{2^N} \sum_{x \in \{-1,1\}^n} f(x).$$

Эта операция линейная, а величину

$$\mathbb{E}[(f-g)^2] = \frac{1}{2^N} \sum_{x \in \{-1,1\}^n} (f(x) - g(x))^2$$

можно воспринимать, как квадрат усредненного Евклидова расстояния между векторами, соответствующими функциям f и g. Именно таким образом мы и будем мерить погрешность приближения.

Заметим, что, для $A \subset \{-1,1\}^n = \Omega$,

$$\mathbb{E}[I_A] = \frac{|A|}{|\Omega|},$$

т.е. эта величина совпадает с долей элементов, принадлежащих множеству A среди всех элементов из множества Ω. Такую величину можно принять за вероятность множества A.

1.2. **Вероятность.** Пусть $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$ — множество. Функцию $P\colon 2^\Omega \to [0,1]$ со свойствами

1) $P(\Omega) = 1$,
2) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

называют **вероятностью** или вероятностной мерой. Для $A \subset \Omega$ число $P(A)$ называют вероятностью события A. Задать вероятность P равносильно тому, чтобы задать набор элементарных вероятностей $\{p(\omega_j)\}$ со свойствами 1) $p(\omega_j) \ge 0$, 2) $\sum_{\omega_j \in \Omega} p(\omega_j) = 1$. В этом случае $P(A) := \sum_{\omega_j \in A} p(\omega_j)$. Пара (Ω, P) называется вероятностным пространством.

Простое, но важное свойство вероятностной меры — субаддитивность, а именно,

$$P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \le \sum_{j=1}^n P(A_j).$$

1.3. **Случайные величины.** Любая функция $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ называется **случайной величиной**. Вектор $X = (X_1, \dots, X_m)$, чьи компоненты являются случайными величинами называют случайным вектором. Каждая случайная величина (и случайный вектор) порождает новое веротяностное пространство $(X(\Omega), \{p_X\})$, где набор элементарных вероятностей $\{p_X\}$, который называется **распределением** случайной величины X, задан по правилу $p_X(x) := P(X = x)$ для каждого $x \in X(\Omega)$. Случайные величины $X_1, \dots, X_m$ называются **независимыми**, если

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_m = x_m) = P(X_1 = x_1) \cdot \ldots \cdot P(X_m = x_m)$$

для всех возможных наборов точек $x_1, \dots, x_m \in X_1(\Omega) \times \ldots \times X_m(\Omega)$.

Упражнение 1.1. Проверьте, что $X_1, \dots, X_m$ независимы тогда и только тогда, когда $P(X_1 \in A_1, \dots, X_m \in A_m) = P(X_1 \in A_1) \cdot \ldots \cdot P(X_m \in A_m)$ для всех возможных наборов множеств $A_1, \dots, A_m$.

Пример 1.1. Пусть $r_j\colon \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$, $j \in \{1,\dots,n\}$, $r_j(x) = x_j$. Тогда $P(r_j = \pm 1) = 1/2$ и случайные величины $(r_1,\dots,r_n)$ независимы.

Таким образом, $(r_1,\dots,r_n)$ — вектор, соответсвующий результатам независимых бросков правильной монеты. В случае, когда выпадает орел, пишем 1, если же выпадает решка, то пишем -1.

1.4. **Математическое ожидание и дисперсия случайной величины.** Для случайной величины X ее **математическим ожиданием** $\mathbb{E}[X]$ называется число

$$\mathbb{E}[X] := \sum_{x\in X(\Omega)} xP(X=x) = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)P(\{\omega\}).$$

Дисперсией случайной величины X называется число $\mathbb{D}[X] := \mathbb{E}\big[(X-\mathbb{E}[X])^2\big]$.

Свойства:
(i) $\mathbb{E}[aX+bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y]$;
(ii) $X \geq Y \Rightarrow \mathbb{E}X \geq \mathbb{E}Y$;
(iii) X и Y независимые $\Rightarrow \mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$.

Упражнение 1.2. Пусть $A_1,\dots,A_k$ — попрано не пересекаются и $A_1\cup\ldots\cup A_k = \Omega$. Пусть $X\Big|_{A_j} = a_j$. Тогда

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{j=1}^{k} a_j P(A_j).$$

Следствие 1.1. *Пусть X — случайный вектор, тогда*

$$\mathbb{E}[f(X)] = \sum_{x\in X(\Omega)} f(x)P(X=x).$$

1.5. **Неравенство Чебышева.** Пусть $X \geq 0$, $t > 0$. Тогда $X \geq tI_{\{X\geq t\}}$, откуда по свойству (ii) математического ожидания $\mathbb{E}[X] \geq t\mathbb{E}[I_{\{X\geq t\}}] = tP(X\geq t)$. Таким образом, имеет место следующее **неравенство Чебышева**:

$$P(X\geq t) \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{t}.$$

Как следствие, получается неравенство Чебышева с дисперсией

$$P(|X-\mathbb{E}[X]| \geq t) \leq \frac{D[X]}{t^2}.$$

Таким образом, каждая случайная величина в каком-то смысле сосредоточена вокруг своего среднего значения.

1.6. **Линейные функционалы от ограниченных случайных величин.** Посмотрим, что можно сказать про случайные величины вида $S := \sum_{j=1}^{m} a_j(X_j - \mathbb{E}X_j)$, $|X_j| \leq 1$. Пусть $Y_j := X_j - \mathbb{E}X_j$, $|Y_j| \leq 2$. Заметим, что $\mathbb{E}[S] = 0$ и

$$\mathbb{D}[S] = \mathbb{E}[(a_1Y_1 + \ldots a_mY_m)^2] = \sum_{j=1}^{m} a_j^2\mathbb{E}[Y_j^2] + \sum_{j\neq k} a_ja_k\mathbb{E}[Y_jY_k] \leq 4\sum_{j=1}^{m} a_j^2,$$

где мы воспользовались тем, что $Y_j^2 \leq 4$, $\mathbb{E}[Y_jY_k] = \mathbb{E}[Y_j]\mathbb{E}[Y_k] = 0$. По неравенству Чебышева

$$P\Big(\Big|\sum_{j=1}^{m} a_j(X_j - \mathbb{E}X_j)\Big| \geq t\Big) \leq \frac{4(a_1^2 + \ldots + a_m^2)}{t^2}.$$

Оказывается, в реальности, скорость убывания данной вероятности по t гораздо быстрее полиномиальной.

Теорема 1.1 (неравенство Хёфдинга–Чернова). *Пусть $X_1, \ldots, X_m$ — независимые случайные величины, причем $X_j \in [-1,1]$. Тогда*

$$P\Big(\Big|\sum_{j=1}^m a_j(X_j - \mathbb{E}X_j)\Big| \geq t\Big) \leq 2e^{-\frac{t^2}{8(a_1^2+\ldots+a_m^2)}}.$$

Доказательство. Пусть $t, \lambda > 0$, и пусть $Y_j := X_j - \mathbb{E}X_j$. Тогда

$$P\Big(\sum_{j=1}^m a_jY_j \geq t\Big) = P\Big(\exp\Big(\lambda\sum_{j=1}^m a_jY_j\Big) \geq e^{\lambda t}\Big) \leq e^{-\lambda t}\mathbb{E}\Big[\exp\Big(\lambda\sum_{j=1}^m a_jY_j\Big)\Big] = e^{-\lambda t}\prod_{j=1}^m \mathbb{E}\big[e^{\lambda a_jY_j}\big],$$

где во втором переходе мы применили неравенство Чебышева. Т.к. $X_j \in [-1,1]$, то $\mathbb{E}X_j \in [-1,1]$ и $Y_j = X_j - \mathbb{E}X_j \in [-2,2]$. Заметим, что для $y \in [-1,1]$

$$e^{\alpha y} = e^{\alpha\frac{1+y}{2}+(-\alpha)\frac{1-y}{2}} \leq \frac{1+y}{2}e^{\alpha} + \frac{1-y}{2}e^{-\alpha} = \operatorname{ch}\alpha + y\operatorname{sh}\alpha,$$

где мы использовали выпуклость экспоненты. Таким образом,

$$\mathbb{E}\big[e^{\lambda a_jY_j}\big] \leq \operatorname{ch}(2\lambda a_j) + \operatorname{sh}(2\lambda a_j)\mathbb{E}Y_j/2 = \operatorname{ch}(2\lambda a_j).$$

Заметим, что $\operatorname{ch}\alpha \leq e^{\frac{\alpha^2}{2}}$, т.к.

$$\operatorname{ch}\alpha = \frac{1}{2}(e^{\alpha}+e^{-\alpha}) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}\alpha^{2k} \leq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)!!}\alpha^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\Big(\frac{\alpha^2}{2}\Big)^k = e^{\frac{\alpha^2}{2}}.$$

Таким образом,

$$P\Big(\sum_{j=1}^m a_jY_j \geq t\Big) \leq e^{-\lambda t}\prod_{j=1}^m \mathbb{E}\big[e^{\lambda a_jY_j}\big] \leq e^{-\lambda t+2\lambda^2(a_1^2+\ldots+a_m^2)}.$$

Остается минимимзировать правую часть по параметру λ, т.е. найти точку минимума функции $\lambda \mapsto -\lambda t + 2\lambda^2(a_1^2+\ldots+a_m^2)$. Это точка $\lambda = \frac{t}{4(a_1^2+\ldots+a_m^2)}$, которую мы и подставляем в правую часть, чтобы получить оценку

$$P\Big(\sum_{j=1}^m a_jY_j \geq t\Big) \leq \exp\Big(-\frac{t^2}{8(a_1^2+\ldots+a_m^2)}\Big).$$

Аналогично,

$$P\Big(\sum_{j=1}^m a_jY_j \leq -t\Big) \leq \exp\Big(-\frac{t^2}{8(a_1^2+\ldots+a_m^2)}\Big)$$

и

$$P\Big(\Big|\sum_{j=1}^m a_jY_j\Big| \geq t\Big) \leq 2e^{-\frac{t^2}{8(a_1^2+\ldots+a_m^2)}},$$

что и было заявлено. □

1.7. **Неравенство Гельдера.**

Теорема 1.2. *Пусть $p \in (1,\infty)$, $p' = \frac{p}{p-1}$, тогда*

$$\mathbb{E}[XY] \leq (\mathbb{E}[|X|^p])^{1/p}(\mathbb{E}[|Y|^{p'}])^{1/p'}.$$

Доказательство. Для $a, b > 0$,

$$ab = e^{\frac{1}{p}\ln a^p + \frac{1}{p'}\ln b^{p'}} \leq \frac{1}{p}e^{\ln a^p} + \frac{1}{p'}e^{\ln b^{p'}} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'},$$

где мы мспользовали выпуклость экспоненты.

Пусть $\|X\|_p := (\mathbb{E}[|X|^p])^{1/p}$, $\|Y\|_{p'} := (\mathbb{E}[|Y|^{p'}])^{1/p'}$. При каждом $\omega \in \Omega$

$$\frac{|X(\omega)|}{\|X\|_p} \cdot \frac{|Y(\omega)|}{\|Y\|_{p'}} \le \frac{1}{p} \cdot \frac{|X(\omega)|^p}{\|X\|_p^p} + \frac{1}{p'} \cdot \frac{|Y(\omega)|^{p'}}{\|Y\|_{p'}^{p'}}.$$

Взяв с обеих сторон ожидание, получаем

$$\frac{\mathbb{E}[|XY|]}{\|X\|_p\|Y\|_{p'}} \le \frac{1}{p} \cdot \frac{\mathbb{E}[|X|^p]}{\|X\|_p^p} + \frac{1}{p'} \cdot \frac{\mathbb{E}[|Y|^{p'}]}{\|Y\|_{p'}^{p'}} = 1.$$

□

Упражнение 1.3. Используя неравенство Гельдера, докажите неравенство Минковского

$$\|X+Y\|_p \le \|X\|_p + \|Y\|_p,$$

где $\|X\|_p := (\mathbb{E}[|X|^p])^{1/p}$, $p \in [1, +\infty)$.

1.8. **Неравенство Хинчина.**

Теорема 1.3 (Хинчин). *При* $p \in [1, \infty)$,

$$c_p\Big(\sum_{j=1}^m a_j^2\Big)^{p/2} \le \mathbb{E}\Big|\sum_{j=1}^m a_j r_j\Big|^p \le C_p\Big(\sum_{j=1}^m a_j^2\Big)^{p/2}.$$

Доказательство. Пусть $S_m := \sum\limits_{j=1}^m a_j r_j$, $\|a\|_2 := \big(\sum_{j=1}^m a_j^2\big)^{1/2}$. Тогда

$$\mathbb{E}|S_m|^p = \sum_{k=0}^\infty \mathbb{E}\big[|S_m|^p I_{\{k\|a\|_2 \le |S_m| \le (k+1)\|a\|_2\}}\big] \le 2\|a\|_2^p \sum_{k=0}^\infty (k+1)^p e^{-k^2/8}.$$

Остается заметить, что

$$\sum_{k=0}^\infty (k+1)^p e^{-k^2/8} \le \sum_{k=0}^\infty 2^{pk} e^{-k^2/8} \le \sum_{k=0}^\infty e^{pk-k^2/8} \le \sum_{k<8(p+1)} e^{pk-k^2/8} + \sum_{k\ge 8(p+1)} e^{pk-k^2/8}$$

$$\le (8p+8)e^{8p(p+1)} + \sum_{k\ge 8(p+1)} e^{-k} \le (2p+2)e^{8p(p+1)} + \sum_{k=1}^\infty e^{-k} = C_p.$$

Правое неравенство доказано.

Докажем теперь левое неравенство. Пусть $p \in [1, 2)$. Заметим, что

$$\|a\|_2^2 = \mathbb{E}|S_m|^2 = \mathbb{E}\big[|S_m|^{p\cdot\frac{2}{4-p}} \cdot |S_m|^{4\cdot\frac{2-p}{4-p}}\big] \le \big(\mathbb{E}\big[|S_m|^p\big)^{\frac{2}{4-p}} \cdot \big(\mathbb{E}\big[|S_m|^4\big]\big)^{\frac{2-p}{4-p}} \le \big(\mathbb{E}\big[|S_m|^p\big)^{\frac{2}{4-p}} \big(C_4\|a\|_2^4\big)^{\frac{2-p}{4-p}}.$$

И, таким образом,

$$\|a\|_2^p \le C_4^{\frac{2-p}{2}} \mathbb{E}\big[|S_m|^p\big].$$

□

2. Теорема Эскеназиса–Иванишвили

Легко видеть, что

$$\mathbb{E}[f \cdot g] = \sum_{S\subset\{1,\dots,n\}} \hat{f}(S)\hat{g}(S),$$

где

$$f = \sum_{S\subset\{1,\dots,n\}} \hat{f}(S)\prod_{j\in S} r_j, \quad g = \sum_{S\subset\{1,\dots,n\}} \hat{g}(S)\prod_{j\in S} r_j.$$

В частности,

$$\mathbb{E}\Big[f \cdot \prod_{j\in S} r_j\Big] = \hat{f}(S).$$

Теорема 2.1 (Eskenazis–Ivanisvili, 2022). *Пусть* $f\colon \{-1,1\}^n \to [-1,1]$ *— ограгиченный многочлен степени* d, *т.е.*

$$f = \sum_{\substack{S\subset\{1,\dots,n\}\\|S|\le d}} \hat f(S)\prod_{j\in S} r_j.$$

Тогда для каждого

$$N \ge C(d)\varepsilon^{-d-1}\ln(n\delta^{-1})$$

и набора значений $(X^1, f(X^1)),\dots,(X^N, f(X^N))$ *для независимых* $X^1,\dots,X^N$ *равномерно распределенных на* $\{-1,1\}^n$, *можно построить такую функцию* $h\colon \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$, *что погрешность приближения* $\mathbb{E}[(f-h)^2] \le \varepsilon$ *с вероятностью не менее* $1-\delta$.

Доказательство. Пусть $X_1,\dots,X_{N_b}$ — независимые случайные векторы равномерно распределенные на $\{-1,1\}^n$. Для $S\subset\{1,\dots,n\}$, $|S|\le d$, положим

$$\alpha_S := \frac{1}{N_b}\sum_{k=1}^{N_b} f(X^k)\prod_{j\in S} r_j(X^k).$$

Заметим, что случайные величины $\{f(X^k)\prod_{j\in S} r_j(X^k)\}_{k=1}^{N_b}$ независимы и принимают значения в отрезке $[-1,1]$. По неравенству Хёфдинга–Чернова,

$$P(|\alpha_s - \mathbb{E}\alpha_s| \ge b) \le 2e^{-\frac{N_b b^2}{8}}.$$

Заметим, что

$$\mathbb{E}\alpha_s = \frac{1}{N_b}\sum_{k=1}^{N_b}\mathbb{E}\big[f(X_k)\prod_{j\in S} r_j(X_k)\big] = \mathbb{E}\big[f\prod_{j\in S} r_j\big] = \hat f(S).$$

Пусть

$$G_b := \big\{|\alpha_s - \hat f(S)| < b \text{ для всех } S\subset\{1,\dots,n\}, |S|\le d\big\}.$$

Тогда,

$$P\big(|\alpha_s - \hat f(S)| < b \text{ для всех } S\subset\{1,\dots,n\}, |S|\le d\big) = 1 - P\Big(\bigcup_{\substack{S\subset\{1,\dots,n\}\\|S|\le d}}\{|\alpha_s - \mathbb{E}\alpha_s| \ge b\}\Big)$$

$$\ge 1 - \sum_{\substack{S\subset\{1,\dots,n\}\\|S|\le d}} P(|\alpha_s - \mathbb{E}\alpha_s| \ge b) \ge 1 - 2\sum_{k=0}^{d} C_n^k e^{-\frac{N_b b^2}{8}} \ge 1-\delta$$

где мы вабираем N_b так, чтобы

$$2\sum_{k=0}^{d} C_n^k e^{-\frac{N_b b^2}{8}} < \delta,$$

т.е.

$$N_b > \frac{8}{b^2}\ln\Big(\frac{2}{\delta}\sum_{k=0}^{d} C_n^k\Big).$$

Зафиксируем число $a > b$. Пусть

$$\mathcal{S}_a := \{S\subset\{1,\dots,n\}, |S|\le d\colon |\alpha_S| \ge a\}$$

и пусть

$$h_{a,b}(x) := \sum_{S\in\mathcal{S}_a}\alpha_S\prod_{j\in S} r_j(x) \quad \forall x\in\{-1,1\}^n.$$

Заметим, что для $\omega\in G_b$ выполнено

$$|\hat f(S)| \le |\hat f(S) - \alpha_S| + |\alpha_S| < b + a \quad \forall S\notin\mathcal{S}_a$$

и

$$|\hat{f}(S)| \geq |\alpha_S| - |\hat{f}(S) - \alpha_S| \geq a - b \quad \forall S \in \mathcal{S}_a.$$

Зафиксируем $p \in [1,2)$. Тогда, для $\omega \in G_b$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[|f - h_{a,b}|^2\big] &= \sum_{\substack{S\subset\{1,\ldots,n\}\\ |S|\leq d}} |\hat{f}(S) - \widehat{h_{a,b}}(S)|^2 = \sum_{S\in\mathcal{S}_a} |\hat{f}(S) - \alpha_S|^2 + \sum_{S\notin\mathcal{S}_a} |\hat{f}(S)|^2 \\ &\leq b^2 \sum_{S\in\mathcal{S}_a} 1 + \sum_{S\notin\mathcal{S}_a} |\hat{f}(S)|^2 \leq b^2(a-b)^{-p} \sum_{S\in\mathcal{S}_a} |\hat{f}(S)|^p + (a+b)^{2-p} \sum_{S\notin\mathcal{S}_a} |\hat{f}(S)|^p \\ &\leq \max\{b^2(a-b)^{-p}, (a+b)^{2-p}\} \sum_{\substack{S\subset\{1,\ldots,n\}\\ |S|\leq d}} |\hat{f}(S)|^p.\end{aligned}$$

Возьмем для простоты $a = 2b$. Тогда

$$\mathbb{E}\big[|f - h_{a,b}|^2\big] \leq 2^{2-p} b^{2-p} \sum_{\substack{S\subset\{1,\ldots,n\}\\ |S|\leq d}} |\hat{f}(S)|^p.$$

Предположим, что для некоторого $p(d) \in [1,2)$ имеет место оценка

$$\sum_{\substack{S\subset\{1,\ldots,n\}\\ |S|\leq d}} |\hat{f}(S)|^{p(d)} \leq C(d) \big(\max_{x\in\{-1,1\}^n} |f(x)|\big)^{p(d)}.$$

Тогда

$$\mathbb{E}\big[|f - h_{a,b}|^2\big] \leq C_1(d) b^{2-p(d)}$$

и выбирая $b = (C_1(d))^{-\frac{1}{2-p(d)}} \varepsilon^{\frac{1}{2-p(d)}}$ мы получаем заявленную точность приближения.
Неравенство Боненбласта–Хилле (Bohnenblust–Hille inequality) для многочлена

$$f = \sum_{\substack{S\subset\{1,\ldots,n\}\\ |S|\leq d}} \hat{f}(S) \prod_{j\in S} r_j$$

дает оценку

$$\Big(\sum_{\substack{S\subset\{1,\ldots,n\}\\ |S|\leq d}} |\hat{f}(S)|^{\frac{2d}{d+1}}\Big)^{\frac{d+1}{2d}} \leq C(d) \max_{x\in\{-1,1\}^n} |f(x)|.$$

Таким образом, мы можем взять $p(d) = \frac{2d}{d+1}$ и $\frac{1}{2-p(d)} = \frac{d+1}{2}$.
Напомним, что

$$N_b > \frac{8}{b^2} \ln\Big(\frac{2}{\delta} \sum_{k=0}^{d} C_n^k\Big).$$

Остается заметить, что

$$\sum_{k=0}^{d} C_n^k = \sum_{k=0}^{d} \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} \leq \sum_{k=0}^{d} \frac{n^k}{k!} = \sum_{k=0}^{d} \frac{d^k}{k!}\Big(\frac{n}{d}\Big)^k \leq \Big(\frac{en}{d}\Big)^d \leq (en)^d.$$

$\square$

3. Неравенство Боненбласта–Хилле

Лемма 3.1. *Пусть*

$$f = \sum_{S \subset \{1,\ldots,n\}} \hat{f}(S) \prod_{j \in S} r_j.$$

Тогда

$$\mathbb{E}\Big[\prod_{j=1}^{n}(1 + h_j r_j) f\Big] = \sum_{S \subset \{1,\ldots,n\}} \hat{f}(S) \prod_{j \in S} h_j.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[\prod_{j=1}^{n}(1 + h_j r_j)\Big(\sum_{S \subset \{1,\ldots,n\}} \hat{f}(S) \prod_{j \in S} r_j\Big)\Big] \\
&= \sum_{S \subset \{1,\ldots,n\}} \hat{f}(S) \mathbb{E}\Big[\prod_{j=1}^{n}(1 + h_j r_j) \prod_{j \in S} r_j\Big] \\
&= \sum_{S \subset \{1,\ldots,n\}} \hat{f}(S) \prod_{j \in S} h_j.
\end{aligned}$$

□

Пусть

$$\beta(x^1, \ldots, x^k) = \sum_{1 \le j_1, \ldots, j_k \le n} a(j_1, \ldots, j_k) x^1_{j_1} \cdot \ldots \cdot x^k_{j_k},$$

причем $a(j_1, \ldots, j_k) = a(\sigma(j_1), \ldots, \sigma(j_k))$ для произвольной перестановки σ и $a(j_1, \ldots, j_k) = 0$ если хотя бы два из каких-то индексов $\{j_1, \ldots, j_k\}$ совпали.

Теорема 3.1.

$$\max_{x^1, \ldots, x^k \in \{-1,1\}^n} |\beta(x^1, \ldots, x^k)| \le k^k \max_{x \in \{-1,1\}^n} \Big| \sum_{1 \le j_1 < \ldots < j_k \le n} a(j_1, \ldots, j_k) r_{j_1}(x) \ldots r_{j_k}(x) \Big|.$$

Доказательство. Заметим, что

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[r_1 \ldots r_k \beta\Big(\sum_{i=1}^{k} r_i x^i, \ldots, \sum_{i=1}^{k} r_i x^i\Big)\Big] \\
&= \sum_{1 \le j_1, \ldots, j_k \le n} a(j_1, \ldots, j_k) \mathbb{E}\Big[r_1 \ldots r_k \Big(\sum_{i=1}^{k} r_i x^i_{j_1}\Big) \cdot \ldots \cdot \Big(\sum_{i=1}^{k} r_i x^i_{j_k}\Big)\Big] \\
&= \sum_{1 \le j_1, \ldots, j_k \le n} a(j_1, \ldots, j_k) \sum_{1 \le i_1, \ldots, i_k \le k} x^{i_1}_{j_1} \cdot \ldots \cdot x^{i_k}_{j_k} \mathbb{E}[r_1 \ldots r_k r_{i_1} \ldots r_{i_k}] = k! \beta(x^1, \ldots, x^k).
\end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{k!}\beta(h, \ldots, h) = \sum_{1 \le j_1 < \ldots < j_k \le n} a(j_1, \ldots, j_k) h_{j_1} \ldots h_{j_k} \\
&= \big(\max_{1 \le j \le n} |h_j|\big)^k \mathbb{E}\Big[\prod_{j=1}^{n}\Big(1 + \frac{h_j}{\max_{1 \le j \le n} |h_j|} r_j\Big)\Big(\sum_{1 \le j_1 < \ldots < j_k \le n} a(j_1, \ldots, j_k) r_{j_1} \ldots r_{j_k}\Big)\Big].
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\frac{1}{k!}|\beta(h,\dots,h)|$$

$$\le \big(\max_{1\le j\le n}|h_j|\big)^k \mathbb{E}\Big[\Big|\prod_{j=1}^n\Big(1+\frac{h_j}{\max_{1\le j\le n}|h_j|}r_j\Big)\Big|\Big]\max_{x\in\{-1,1\}^n}\Big|\sum_{1\le j_1<\ldots<j_k\le n}a(j_1,\dots,j_k)r_{j_1}(x)\dots r_{j_k}(x)\Big|$$

$$=\big(\max_{1\le j\le n}|h_j|\big)^k\max_{x\in\{-1,1\}^n}\Big|\sum_{1\le j_1<\ldots<j_k\le n}a(j_1,\dots,j_k)r_{j_1}(x)\dots r_{j_k}(x)\Big|,$$

т.к. $1+\frac{h_j}{\max_{1\le j\le n}|h_j|}r_j\ge 0$ и

$$\mathbb{E}\Big[\Big|\prod_{j=1}^n\Big(1+\frac{h_j}{\max_{1\le j\le n}|h_j|}r_j\Big)\Big|\Big]=\mathbb{E}\Big[\prod_{j=1}^n\Big(1+\frac{h_j}{\max_{1\le j\le n}|h_j|}r_j\Big)\Big]=1.$$

Наконец, для $x^1,\dots,x^k\in\{-1,1\}^n$,

$$|\beta(x^1,\dots,x^k)|=\frac{1}{k!}\Big|\mathbb{E}\Big[r_1\dots r_k\beta\Big(\sum_{i=1}^k r_ix^i,\dots,\sum_{i=1}^k r_ix^i\Big)\Big]\Big|\le\frac{1}{k!}\mathbb{E}\Big[\Big|\beta\Big(\sum_{i=1}^k r_ix^i,\dots,\sum_{i=1}^k r_ix^i\Big)\Big|\Big]$$

$$\le k^k\max_{x\in\{-1,1\}^n}\Big|\sum_{1\le j_1<\ldots<j_k\le n}a(j_1,\dots,j_k)r_{j_1}(x)\dots r_{j_k}(x)\Big|,$$

что и дает заявленную оценку. □

Напомним, что

$$\mathbb{E}[f\cdot g]=\sum_{S\subset\{1,\dots,n\}}\hat f(S)\hat g(S),$$

где

$$f=\sum_{S\subset\{1,\dots,n\}}\hat f(S)\prod_{j\in S}r_j,\quad g=\sum_{S\subset\{1,\dots,n\}}\hat g(S)\prod_{j\in S}r_j.$$

Определение 3.1. Сверткой функций f и g, определенных выше, называется функция

$$f*g(x):=\mathbb{E}[f_xg],$$

где

$$f_x(y):=f(x\cdot y),\quad x\cdot y:=(x_1y_1,\dots,x_ny_n).$$

Предложение 3.1.

$$\widehat{f*g}(S)=\hat f(S)\hat g(S),\quad S\subset\{1,\dots,n\}.$$

Доказательство. Заметим, что

$$\widehat{f*g}(S)=\mathbb{E}\Big[f*g\prod_{j\in S}r_j\Big]=\mathbb{E}_y\Big[g(y)\mathbb{E}_x\Big[f(x\cdot y)\prod_{j\in S}x_j\Big]\Big]$$

$$=\mathbb{E}_y\Big[g(y)\prod_{j\in S}y_j\mathbb{E}_x\Big[f(x\cdot y)\prod_{j\in S}y_jx_j\Big]\Big]=\mathbb{E}_y\Big[g(y)\prod_{j\in S}y_j\mathbb{E}_z\Big[f(z)\prod_{j\in S}z_j\Big]\Big]=\hat f(S)\hat g(S).$$

□

Следствие 3.1.

$$\max_{x\in\{-1,1\}^n}\Big|\sum_{\substack{S\subset\{1,\dots,n\}\\|S|=k}}\hat f(S)\prod_{j\in S}r_j(x)\Big|\le C(d)\max_{x\in\{-1,1\}^n}\Big|\sum_{\substack{S\subset\{1,\dots,n\}\\|S|\le d}}\hat f(S)\prod_{j\in S}r_j(x)\Big|.$$

Доказательство. Пусть
$$f = \sum_{\substack{S\subset\{1,\dots,n\}\\ |S|\le d}} \hat{f}(S)\prod_{j\in S} r_j.$$
Заметим, что
$$|\hat{f}(\emptyset)| = |\mathbb{E}[f]| \le \mathbb{E}[|f|] \le \max_{x\in\{-1,1\}^n} |f(x)|.$$
Хотим построить $g_{d,k}$ так, чтобы $\widehat{g_{d,k}}(S) = 1$, при $|S| = k$, $\hat{g_{d,k}}(S) = 0$ при $|S| \in \{0, k-1, k+1, \dots, d\}$. Тогда $\widehat{f * g_{d,k}}(S) = \hat{f}(S)\widehat{g_{d,k}}(S)$ и
$$f * g_{d,k} = \sum_{\substack{S\subset\{1,\dots,n\}\\ |S|=k}} \hat{f}(S)\prod_{j\in S} r_j,$$
а значит
$$\max_{x\in\{-1,1\}^n}\Big|\sum_{\substack{S\subset\{1,\dots,n\}\\ |S|=k}} \hat{f}(S)\prod_{j\in S} r_j(x)\Big| = \max_{x\in\{-1,1\}^n}\big|f * g_{d,k}(x)\big| \le \max_{x\in\{-1,1\}^n}\big|f(x)\big|\mathbb{E}[|g_{d,k}|].$$

Построим $g_{d,k}$. Пусть
$$\varrho = \prod_{j=1}^{n}(1 + \tfrac{1}{2}r_j).$$
Тогда $\hat{\varrho}(S) = 2^{-|S|}$. Пусть $\varrho^j := \varrho^{j-1} * \varrho$. Тогда $\widehat{\varrho^j}(S) = 2^{-j|S|}$ и
$$\widehat{\sum_{j=0}^{d} a_j\varrho^j}(S) = \sum_{j=0}^{d} a_j(2^{-|S|})^j = Q(2^{-|S|}),$$
$$Q(t) = \sum_{j=0}^{d} a_j t^j.$$
Остается подобрать коэффициенты многочлена так, чтобы $Q(0) = 0$, $Q(2^{-k}) = 1$, $Q(2^{-m}) = 0$ при $m \in \{0, k-1, k+1, \dots, d\}$. □

Теорема 3.2. *Пусть*
$$\beta(x^1, \dots, x^k) = \sum_{1\le j_1,\dots,j_k\le n} a(j_1, \dots, j_k)x^1_{j_1} \cdot \ldots \cdot x^k_{j_k}.$$
Тогда
$$\Big(\sum_{1\le j_1,\dots,j_k\le n} |a(j_1, \dots, j_k)|^{\frac{2k}{k+1}}\Big)^{\frac{k+1}{2k}} \le c_k \max_{x^1,\dots,x^k\in\{1,1\}^n} |\beta(x^1, \dots, x^k)|.$$

Доказательство. База. Для $x \in \{-1, 1\}^n$ пусть
$$F_x := (1 + r_1(x)r_1) \cdot \ldots \cdot (1 + r_n(x)r_n).$$
Тогда
$$F_x \ge 0 \quad \text{и} \quad \mathbb{E}|F_x| = \mathbb{E}F_x = \prod_{j=1}^{n} \mathbb{E}(1 + r_j(x)r_j) = 1$$
и для
$$\beta = \sum_{j=1}^{n} a(j)r_j$$

имеет место оценка

$$\Big|\sum_{j=1}^n a(j)r_j(x)\Big| = |\beta(x)| = \Big|\mathbb{E}[\beta F_x]\Big| \le \max_{\{-1,1\}^n} |\beta|\mathbb{E}|F_x| = \max_{\{-1,1\}^n} |\beta|.$$

Выбирая теперь $x \in \{-1,1\}^n$ таким образом, чтобы

$$r_j(x) = \operatorname{sgn} a(j),$$

получаем

$$\sum_{j=1}^n |a(j)| = \Big|\sum_{j=1}^n a(j)r_j(x)\Big| \le \max_{\{-1,1\}^n} |\beta|.$$

Переход. Пусть теперь

$$\beta(x^1,\dots,x^k) = \sum_{1\le j_1,\dots,j_k\le n} a(j_1,\dots,j_k) r_{j_1}(x^1)\cdot\ldots\cdot r_{j_k}(x^k),$$

причем $a(j_1,\dots,j_k) = a(\sigma(j_1),\dots,\sigma(j_k))$ для произвольной перестановки σ и $a(j_1,\dots,j_k) = 0$ если хотя бы два из каких-то индексов $\{j_1,\dots,j_k\}$ совпали. По предположению индукции

$$\begin{aligned}
&(c_{k-1} \max_{x^1,\dots,x^k\in\{-1,1\}^n} |\beta(x^1,\dots,x^k)|)^{\frac{2k-2}{k}} \\
&= \Big(c_{k-1} \max_{x^k\in\{-1,1\}^n} \max_{x^1,\dots,x^{k-1}\in\{-1,1\}^n} \Big| \sum_{1\le j_1,\dots,j_{k-1}\le n} \Big(\sum_{j_k=1}^n a(j_1,\dots,j_k) r_{j_k}(x^k)\Big) r_{j_1}(x^1)\cdot\ldots\cdot r_{j_{k-1}}(x^{k-1})\Big|\Big)^{\frac{2k-2}{k}} \\
&\ge \max_{x^k\in\{-1,1\}^n} \sum_{1\le j_1,\dots,j_{k-1}\le n} \Big|\sum_{j_k=1}^n a(j_1,\dots,j_k) r_{j_k}(x^k)\Big|^{\frac{2k-2}{k}} \ge \sum_{1\le j_1,\dots,j_{k-1}\le n} \mathbb{E}\Big[\Big|\sum_{j_k=1}^n a(j_1,\dots,j_k) r_{j_k}\Big|^{\frac{2k-2}{k}}\Big] \\
&\ge C_1(k) \sum_{1\le j_1,\dots,j_{k-1}\le n} \Big(\sum_{j_k=1}^n |a(j_1,\dots,j_k)|^2\Big)^{\frac{2k-2}{2k}} = C_1(k) \sum_{1\le j_1,\dots,j_{k-1}\le n} \Big(\sum_{j_k=1}^n |a(j_1,\dots,j_k)|^2\Big)^{\frac{k-1}{k}},
\end{aligned}$$

где при последнем переходе было применено неравенство Хинчина.
Кроме того,

$$\begin{aligned}
&c_1 \max_{x^1,\dots,x^k\in\{-1,1\}^n} |\beta(x^1,\dots,x^k)| \\
&\ge \max_{x^1,\dots,x^{k-1}\in\{-1,1\}^n} \sum_{j_k=1}^n \Big| \sum_{1\le j_1,\dots,j_{k-1}\le n} a(j_1,\dots,j_k) r_{j_1}(x^1)\cdot\ldots\cdot r_{j_{k-1}}(x^{k-1})\Big| \\
&\ge \sum_{j_k=1}^n \mathbb{E}_{x_1}\ldots\mathbb{E}_{x_{k-1}}\Big[\Big| \sum_{1\le j_1,\dots,j_{k-1}\le n} a(j_1,\dots,j_k) r_{j_1}(x^1)\cdot\ldots\cdot r_{j_{k-1}}(x^{k-1})\Big|\Big] \\
&\ge C_2(k) \sum_{j_k=1}^n \Big(\sum_{1\le j_1,\dots,j_{k-1}\le n} |a(j_1,\dots,j_k)|^2\Big)^{1/2} \ge C_2(k) \Big(\sum_{1\le j_1,\dots,j_{k-1}\le n} \Big(\sum_{j_k=1}^n |a(j_1,\dots,j_k)|\Big)^2\Big)^{1/2},
\end{aligned}$$

где на предпоследнем шаге было использовано $(k-1)$-мерное неравенство Хинчина (Упражнение).

С другой стороны

$$\sum_{1\le j_1,\dots,j_{k-1},j_k\le n} |a(j_1,\dots,j_k)|^{\frac{2k}{k+1}} = \sum_{1\le j_1,\dots,j_{k-1}\le n}\sum_{j_k=1}^{n} |a(j_1,\dots,j_k)|^{\frac{2k-2}{k+1}} |a(j_1,\dots,j_k)|^{\frac{2}{k+1}}$$

$$\le \sum_{1\le j_1,\dots,j_{k-1}\le n} \Big(\sum_{j_k=1}^{n} |a(j_1,\dots,j_k)|^2\Big)^{\frac{k-1}{k+1}} \Big(\sum_{j_k=1}^{n} |a(j_1,\dots,j_k)|\Big)^{\frac{2}{k+1}}$$

$$\le \bigg(\sum_{1\le j_1,\dots,j_{k-1}\le n} \Big(\sum_{j_k=1}^{n} |a(j_1,\dots,j_k)|^2\Big)^{\frac{k-1}{k}}\bigg)^{\frac{k}{k+1}} \bigg(\sum_{1\le j_1,\dots,j_{k-1}\le n} \Big(\sum_{j_k=1}^{n} |a(j_1,\dots,j_k)|\Big)^2\bigg)^{\frac{1}{k+1}}$$

$$\le \big(c_k \max_{x^1,\dots,x^k\in\{-1,1\}^n} |\beta(x^1,\dots,x^k)|\big)^{\frac{2k-2}{k+1}+\frac{2}{k+1}}.$$

□

Теорема 3.3 (k-мерное неравенство Хинчина)**.** *Пусть*

$$\beta(x^1,\dots,x^k) = \sum_{1\le j_1,\dots,j_k\le n} a(j_1,\dots,j_k) r_{j_1}(x^1)\cdot\ldots\cdot r_{j_k}(x^k),$$

Тогда при $p\in[1,\infty)$,

$$c_p(k)\Big(\sum_{1\le j_1,\dots,j_k\le n} a(j_1,\dots,j_k)^2\Big)^{p/2} \le \mathbb{E}[|\beta|^p] \le C_p(k)\Big(\sum_{1\le j_1,\dots,j_k\le n} a(j_1,\dots,j_k)^2\Big)^{p/2}.$$

Доказательство. Докажем правую оценку при $p>2$ по индукции.

$$\mathbb{E}_{x^1}\ldots\mathbb{E}_{x^n}\Big|\sum_{1\le j_1,\dots,j_{k-1}\le n}\sum_{j_k=1}^{n} a(j_1,\dots,j_k) r_{j_k}(x^k) r_{j_1}(x^1)\cdot\ldots\cdot r_{j_{k-1}}(x^k)\Big|^p$$

$$\le C_p(k-1)\mathbb{E}\bigg[\bigg(\sum_{1\le j_1,\dots,j_{k-1}\le n}\Big(\sum_{j_k=1}^{n} a(j_1,\dots,j_k) r_{j_k}\Big)^2\bigg)^{p/2}\bigg]$$

$$= C_p(k-1)\Bigg(\bigg(\mathbb{E}\bigg[\bigg(\sum_{1\le j_1,\dots,j_{k-1}\le n}\Big(\sum_{j_k=1}^{n} a(j_1,\dots,j_k) r_{j_k}\Big)^2\bigg)^{p/2}\bigg]\bigg)^{2/p}\Bigg)^{p/2}$$

$$\le C_p(k-1)\bigg(\sum_{1\le j_1,\dots,j_{k-1}\le n}\Big(\mathbb{E}\Big[\Big|\sum_{j_k=1}^{n} a(j_1,\dots,j_k) r_{j_k}\Big|^p\Big]\Big)^{2/p}\bigg)^{p/2}$$

$$\le C_p(k-1)C_p(1)\Big(\sum_{1\le j_1,\dots,j_{k-1}\le n}\sum_{j_k=1}^{n} a(j_1,\dots,j_k)^2\Big)^{p/2}.$$

Левая оценка теперь следует из правой таким же образом, как это было сделано при $k=1$. □

Следствие 3.2 (Bohnenblust–Hille inequality)**.** *Пусть*

$$f = \sum_{\substack{S\subset\{1,\dots,n\}\\ |S|\le d}} \hat f(S)\prod_{j\in S} r_j.$$

Тогда

$$\Big(\sum_{\substack{S\subset\{1,\dots,n\}\\ |S|\le d}} |\hat f(S)|^{\frac{2d}{d+1}}\Big)^{\frac{d+1}{2d}} \le C_d \max_{x\in\{-1,1\}^n} |f(x)|.$$

Доказательство. Пусть

$$f_k(x) := \sum_{\substack{S\subset\{1,\dots,n\}\\ |S|=k}} \hat{f}(S) \prod_{j\in S} r_j,$$

$$\beta_{f_k}(x^1,\dots,x^k) = \sum_{1\le j_1,\dots,j_k\le n} \hat{f}_k(\{j_1,\dots,j_k\}) x^1_{j_1}\cdot\ldots\cdot x^k_{j_k}.$$

Тогда

$$\Bigg(\sum_{\substack{S\subset\{1,\dots,n\}\\ |S|=k}} |\hat{f}(S)|^{\frac{2d}{d+1}}\Bigg)^{\frac{d+1}{2d}} \le \Bigg(\sum_{\substack{S\subset\{1,\dots,n\}\\ |S|=k}} |\hat{f}(S)|^{\frac{2k}{k+1}}\Bigg)^{\frac{k+1}{2k}} \le C_1(k) \max_{x^1,\dots,x^k\in\{-1,1\}^n} |\beta_{f_k}(x^1,\dots,x^k)|.$$

Кроме того,

$$\max_{x^1,\dots,x^k\in\{-1,1\}^n} |\beta_{f_k}(x^1,\dots,x^k)| \le C_2(k) \max_{x\in\{-1,1\}^n} |f_k(x)| \le C_3(d) \max_{x\in\{-1,1\}^n} |f(x)|,$$

что влечет заявленную оценку. $\square$