

Сандомирский Ф.  
Доклад на семинаре “Стохастика”  
6 апреля 2012 г.

## СРЕДНЯЯ ПЛОТНОСТЬ НУЛЕЙ ГАУССОВСКОЙ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ И ТЕОРЕМА СОДИНА

### § 1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ФОРМУЛИРОВКИ

Рассмотрим набор аналитических функций  $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$  в области  $\Lambda \subset \mathbb{C}$  и последовательность  $\{\xi_k\}_{k=0}^{\infty}$  независимых стандартных комплексных гауссовских случайных величин. Предположим, что сумма  $\sum_{k=0}^{\infty} |\varphi_k(z)|^2$  сходится равномерно на компактах из  $\Lambda$ . Гауссовской аналитической функцией (ГАФ) называется

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k \varphi_k.$$

Этот ряд сходится к функции аналитической в  $\Lambda$  (см. [2]) почти наверное. Через  $C_f(z, w)$  обозначим ковариационную функцию  $f$ , т.е.,

$$C_f(z, w) = \mathbb{E} f(z) \overline{f(w)} = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(z) \overline{\varphi_k(w)}.$$

Сопоставим точечному процессу нулей  $Z_f = f^{-1}(0)$  считающую меру  $n_f = \sum_{z \in Z_f} \delta_z$ . Нас будет интересовать среднее число нулей  $\mathbb{E} n_f$ . Формула Эдельмана-Костлана связывает  $\mathbb{E} n_f$  и ковариационную функцию

**Теорема** (формула Эдельмана-Костлана). *Имеет место равенство*

$$(1) \quad \mathbb{E} dn_f(z) = \rho_1 dm(z),$$

где  $\rho_1(z) = \frac{1}{4\pi} \Delta \ln C_f(z, z)$  – т.н. первая интенсивность (плотность нулей),  $m$  – мера Лебега на плоскости,  $\Delta = \frac{1}{4} \partial_z \partial_{\bar{z}}$  – оператор Лапласа, а равенство понимается в смысле обобщенных функций, т.е.,  $\forall \psi \in C^\infty(\Lambda)$   $\text{supp } \varphi \subset \Lambda$  выполнено

$$\mathbb{E} \int_{\Lambda} \psi(z) dn_f(z) = \int_{\Lambda} \Delta \psi(z) \frac{1}{4\pi} \ln C_f(z, z) dm(z).$$

Наиболее лаконичное доказательство формулы Эдельмана-Костлана получается методами комплексного анализа (см. [2]). Однако, как мы увидим ниже, подобные результаты, касающиеся среднего числа нулей, не завязаны на аналитичность. Для этой цели после изложения идей комплексно-аналитического доказательства, мы приведем рассуждения, основанные на соображениях родственных интегральной геометрии (таково оригинальное доказательство Эдельмана и Костлана [1]), для вывода плотности вещественных нулей гауссовского полинома. Затем мы разберемся насколько “жестко” задание плотности нулей фиксирует ГАФ, наметив доказательство теоремы Содина:

**Теорема** (Содин, [3]). *Если для двух ГАФ  $f$  и  $g$*

$$\mathbb{E} dn_f = \mathbb{E} dn_g,$$

*то  $f$  совпадает с  $\alpha g$  по распределению, где  $\alpha$  – неслучайная аналитическая функция без нулей.*

В частности из теоремы следует, что плотность нулей определяет их распределение. Мы отметим близость этого результата к геометрическому факту, называемому “жесткостью Калаби” (Calabi’s rigidity, см. [3]).

## § 2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ФОРМУЛЫ ЭДЕЛЬМАНА-КОСТЛАНА МЕТОДОМ ФУНКЦИИ ГРИНА

В этой части мы объясним комплексно-аналитический вывод (1), детали которого приведены в [2, 3]. Нам потребуется несколько лемм.

**Лемма 1** (функция Грина оператора Лапласа).

$$\Delta \frac{1}{2\pi} \ln |z| = \delta_0,$$

(т.е.,  $\frac{1}{2\pi} \ln |z|$  является функцией Грина оператора Лапласа в  $\mathbb{R}^2$ )

*О доказательстве:* В силу инвариантности оператора Лапласа относительно поворотов будем искать функцию Грина  $G$ , зависящей только от  $r = |z|$  – длины радиус-вектора. Тогда вне окрестности нуля мы должны иметь  $\Delta G = 0$ . Записывая  $\Delta$  в полярных координатах, находим  $\frac{1}{r} \partial_r r \partial_r G(r) = 0$ , откуда  $G = A_1 \ln r + A_2$ . Константу  $A_2$  мы полагаем равной нулю. Чтобы определить  $A_1$  и убедиться, что полученный объект – действительно функция Грина, для пробной функции  $\psi \in C^\infty(\mathbb{C})$ ,  $\text{supp } \psi \subset B_R(0)$  рассмотрим

$$A_1 \int_{\mathbb{C}} \Delta \psi \ln |z| dm(z).$$

Фиксируя  $\varepsilon > 0$  и интегрируя два раза по частям в области  $B_R(0) \setminus B_\varepsilon(0)$  (где  $B_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq R\}$ ), а затем устремляя  $\varepsilon \rightarrow 0$  получаем  $2\pi A_1 \psi(0)$ , откуда находим  $A_1$ .

Пусть теперь  $h$  – неслучайная аналитическая функция в области  $\Lambda$ , а  $n_h = \sum_{z: h(z)=0} \delta_z$  – считающая мера ее нулей.

**Лемма 2.** В смысле обобщенных функций

$$(2) \quad dn_h(z) = \frac{1}{2\pi} \Delta \ln |h(z)| dm(z)$$

*О доказательстве:* Вне окрестности нулей  $h$  функция  $\ln |h|$  является гармонической, а значит  $\Delta \ln |h| = 0$ . В окрестности нуля  $z_0$  кратности  $p$  функция  $h(z) = (z - z_0)^p \tilde{h}(z)$ , где  $\tilde{h}$  гармонична в этой окрестности. По предыдущей лемме  $\Delta \ln((z - z_0)^p) = p\delta_{z_0}$ . Собирая все вместе, получаем утверждение леммы.

Чтобы доказать формулу Эдельмана-Костлана нам в существенном осталось только взять математическое ожидание от обеих частей (2). Прделаем соответствующие вычисления. Фиксируем пробную функцию  $\psi \in C^\infty(\Lambda)$ ,  $\text{supp } \psi \subset \Lambda$ . Тогда

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \int_{\Lambda} \psi(z) dn_f(z) &= \mathbb{E} \int_{\Lambda} \Delta \psi(z) \frac{1}{2\pi} \ln |f(z)| dm(z) = \\ &= \int_{\Lambda} \Delta \psi(z) \frac{1}{2\pi} \mathbb{E} \ln |f(z)| dm(z). \end{aligned}$$

Можно убедиться, что изменение порядка интегрирования здесь законно. Остается заметить, что  $\mathbb{E} \ln |f(z)| = 1/2 \ln C_f(z, z) + \mathbb{E} \ln |\xi|$ , где  $\xi$  – стандартная комплексная гауссовская. Таким образом,  $\Delta \mathbb{E} \ln |f(z)| = 1/2 \Delta \ln C_f(z, z)$ , и формула Эдельмана-Костлана доказана.

*Замечание.* В приведенном доказательстве присутствует шероховатость, связанная с тем, что  $C_f(z, z)$  может обращаться в ноль. Эти точки требуют отдельного рассмотрения. В них мера среднего числа нулей  $n_f$  имеет атом — это т.н. детерминистичные нули. Как видно из формулы Эдельмана-Костлана, для фиксированного  $z_0$  вероятность события  $f(z_0) = 0$  равняется 0 или 1. Вероятности 1 как раз и соответствуют детерминистичные нули, возникающие, когда все  $\varphi_k$  одновременно обращаются в 0 (следует из определения  $C_f$ ). Основным интерес представляют случайные нули, поэтому мы не анализируем детерминистичные нули отдельно. Следует отметить, что в отличие от детерминистичных нулей (кратность которых может быть любой), случайные нули имеют кратность 1 п.н. (см. [2]).

### § 3. ПОДХОД НА ОСНОВЕ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Оказывается, что формулы для плотности нулей гауссовской случайной функции могут быть получены на основе геометрических рассуждений (см. [1]). Этот подход демонстрирует, что условие аналитичности является скорее техническим и не связано с сутью дела. Мы проиллюстрируем геометрический подход на примере. Возьмем набор гладких функций  $\{\phi_k\}_{k=0}^n$ ,  $\phi_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  и построим по нему гауссовскую случайную функцию

$$q(x) = \sum_{k=0}^n a_k \phi_k(x),$$

где  $\{a_k\}_{k=0}^n$  — независимые стандартные гауссовские (вещественные). Нас будет интересовать  $\mathbb{E}n_q(A) = \mathbb{E}\#\{x \in A \mid q(x) = 0\}$  — среднее количество вещественных нулей  $q$ .

**Немного интегральной геометрии.** Начнем с классической задачи: иглы Бюффона. На плоскость, разбитую на полосы шириной  $D$  семейством параллельных прямых, “кидают” случайным образом “иглу” — кривую  $\gamma$  конечной длины. Каково будет  $\kappa$ , среднее число пересечений с семейством прямых? Для решения этой задачи достаточно заметить, что если  $\gamma$  разделить на две части —  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , то по аддитивности математического ожидания  $\kappa = \kappa_1 + \kappa_2$ . Аппроксимируя кривую  $\gamma$  маленькими отрезками, убеждаемся, что среднее число пересечений является аддитивной функцией длины кривой, следовательно, равно  $B|\gamma|$ , где  $B$  не зависит от кривой ( $|\gamma|$  обозначает длину). Чтобы найти  $B$  можно выбрать какую-либо удобную кривую, допустим, окружность диаметра  $D$  (для которой число пересечений равно 2). Отсюда

$$\kappa = \frac{2|\gamma|}{\pi D}.$$

Такие же соображения позволяют получить среднее число пересечений случайно выбранного диаметра и кривой на сфере.

**Лемма 3.** Пусть  $\gamma$  — спрямляемая кривая на единичной  $n$ -мерной сфере  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ . Тогда среднее число пересечений  $\gamma$  со случайно выбранным “экватором” (большим кругом)  $S^{n-1} \subset S^n$  равно

$$\frac{|\gamma|}{\pi}.$$

*О доказательстве:* Как и раньше убеждаемся, что среднее число пересечений пропорционально  $|\gamma|$ . Чтобы вычислить константу, удобно рассмотреть  $\gamma = S^1$ . В этом случае среднее число пересечений, очевидно, равно 2.

Этот результат может быть обобщен следующим образом:

**Лемма 4.** Пусть  $N_1$  и  $N_2$  — подмногообразия сферы  $S^{n_1+n_2}$ , имеющие размерность  $n_1$  и  $n_2$ , соответственно. Обозначим через  $Q$  случайный элемент группы вращений  $SO(n_1 + n_2 + 1)$ , тогда

$$\mathbb{E}\#(N_1 \cap QN_2) = \frac{2|N_1||N_2|}{|S^{n_1}||S^{n_2}|}$$

( $|\cdot|$  здесь обозначает “объем” подмногообразия сферы соответствующей размерности).

**Среднее число нулей.** Образует вектор-функцию  $\vec{v}(x) = (\phi_0(x), \dots, \phi_n(x))^T$  и стандартный гауссовский вектор  $\vec{a} = (a_0, \dots, a_n)^T$ . На время фиксируем реализацию  $\vec{a}$ . Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- $q(x_0) = 0$
- $\vec{a}^\perp$ , “экватор” сферы  $S^n$ , состоящий из единичных векторов ортогональных  $\vec{a}$ , проходит через точку  $\vec{v}(x_0)/\|\vec{v}(x_0)\|$

*Замечание.* Мы опять допускаем неаккуратность, не рассматривая отдельно случай, когда  $\forall k \phi_k(x_0) = 0$ .

Из сказанного ясно, что число нулей  $q$  в отрезке  $[c, d]$  равно числу пересечений с учетом кратности кривой  $\gamma(x) = \vec{v}(x)/\|\vec{v}(x)\|$ ,  $x \in [c, d]$  и “экватора”  $\vec{a}^\perp$ . Интересуясь средним числом нулей, мы должны усреднить число пересечений в соответствии с распределением  $\vec{a}$ . В силу сферической симметричности стандартного гауссовского вектора, мы оказываемся в условиях леммы 3 и приходим к следующей формуле

$$\mathbb{E}n_q([c, d]) = \frac{|\gamma([c, d])|}{\pi}.$$

Элементарные преобразования позволяют переписать ее следующим образом:

$$\mathbb{E}n_q([c, d]) = \frac{1}{\pi} \int_c^d \sqrt{\partial_x \partial_y \ln(\vec{v}(x), \vec{v}(y))|_{x=y=t}} dt.$$

*Замечание.* Ковариационная функция  $C_q(x, y) = \mathbb{E}q(x)q(y) = (\vec{v}(x), \vec{v}(y))$ , поэтому полученная формула напоминает (1), доказанную в комплексном случае. Следует отметить, что те же геометрические соображения позволяют доказать и ее. Единственное отличие заключается в том, что комплексная кривая как вещественное многообразие имеет размерность 2, а “экватор” на комплексной сфере — коразмерность 2. Поэтому в комплексном случае надо применять уже лемму 4. Исчезновение корня в итоговой формуле объясняется тем, что мы имеем дело с площадями, а не с длинами.

#### § 4. ТЕОРЕМА СОДИНА И ЖЕСТКОСТЬ КАЛАБИ

Здесь мы наметим доказательство теоремы Содина, показав, что из совпадения плотности нулей у двух ГАФ  $f$  и  $g$ , следует, что конечномерные распределения  $f$  совпадают с конечномерными распределениями  $\alpha g$ , где  $\alpha$  — неслучайная аналитическая функция без нулей. После мы кратко обсудим смысл этого результата на “геометрическом языке”.

Нам понадобится следующий результат.

**Лемма 5.** Пусть  $K(z, w)$ ,  $(z, w) \in \Lambda \times \Lambda$  аналитична по  $z$  и антианалитична по  $w$ . Тогда из того, что  $\forall z \in \Lambda \quad K(z, z) = 0$  следует  $K \equiv 0$ .

*О доказательстве:* Разложим  $K(z, w)$  в степенной ряд в окрестности  $(z_0, z_0)$  (для удобства будем считать  $z_0 = 0$ ):

$$K(z, w) = \sum_{k,l=0}^{\infty} c_{k,l} z^k \bar{w}^l.$$

Оказывается, что  $c_{k,l}$  можно восстановить, зная только  $u(z) = K(z, z)$ . Действительно,

$$(\partial_z)^k (\partial_{\bar{z}})^l u|_z = 0 = k!l!c_{k,l}.$$

Получаем, что для любой точки диагонали  $z = w$  функция  $K(z, w)$  тождественно равна 0 в ее окрестности, следовательно, по единственности аналитического продолжения для аналитических функций одной переменной равна 0 тождественно в  $\Lambda \times \Lambda$ .

Для того чтобы убедиться в совпадении конечномерных распределений, нам благодаря гауссовости достаточно показать, что совпадают ковариационные функции. Из формулы Эдельмана-Костлана и условия совпадения плотности нулей получаем

$$\Delta \ln(C_f(z, z)) = \Delta \ln(C_g(z, z)),$$

откуда

$$C_f(z, z) = e^{2\beta(z)} C_g(z, z),$$

где  $\beta$  гармоническая в  $\Lambda$ . Найдем такую аналитическую  $\alpha$ , что  $|\alpha| = e^\beta$ , получим равенство  $C_f(z, z) = \alpha(z)\overline{\alpha(z)}C_g(z, z)$ . Благодаря лемме 4 оно продолжается до

$$C_f(z, w) = \alpha(z)\overline{\alpha(w)}C_g(z, w).$$

То есть ковариационная функция  $f$  совпадает с ковариационной функцией  $\alpha g$ !

**Жесткость Калаби.** Теорема Содина близка к следующему геометрическому результату, называемому Calabi's rigidity (более подробное обсуждение имеется в [3]). Напомним, что  $n$ -мерным комплексным проективным пространством  $\mathbb{C}P^n$  называется множество прямых в  $\mathbb{C}^{n+1}$  (оно отождествляется с  $n$ -мерной комплексной сферой, у которой "склеены" противоположные точки). Пространство  $\mathbb{C}P^n$  снабжается метрикой Фубини-Штуди — единственной с точностью до умножения на константу римановой метрикой инвариантной относительно поворотов:

$$d(Z, W) = \arccos |(Z, W)|,$$

где  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$  представители точки проективного пространства на единичной сфере.

**Теорема (Калаби).** Пусть на аналитическом многообразии  $M$  заданы аналитические кривые  $\Psi_1 : M \rightarrow \mathbb{C}P^{n_1}$  и  $\Psi_2 : M \rightarrow \mathbb{C}P^{n_2}$ . Если  $\forall z, z' \in M$  имеет место равенство

$$d(\Psi_1(z), \Psi_1(z')) = d(\Psi_2(z), \Psi_2(z')),$$

то  $n_1 = n_2$ , и аналитические кривые унитарно эквивалентны, т.е.,

$$\exists u \in U(n_1 + 1) : \Psi_1 = u\Psi_2.$$

*Замечание.* В предыдущем параграфе мы видели, что среднее число нулей определяется длиной проекции кривой  $\vec{v}$  на сферу. Та метрика (естественная риманова метрика на сфере, наследованная из  $\mathbb{R}^{n+1}$ ), в которой мы измеряли длину кривой и есть вещественный аналог метрики Фубини-Штуди — длина дуги большого круга (можно было бы рассматривать проекцию  $\vec{v}$  на вещественное проективное пространство  $\mathbb{R}P^n$ , а не на  $S^n$ , отождествив  $v$  и  $-v$ , заключения были бы теми же). Таким образом, в вещественном случае метрические характеристики  $\vec{v}$  ответственны за плотность нулей. Аналогичное соответствие имеется и в комплексном случае, если мы будем рассматривать кривую  $\Phi = (\varphi_0, \dots, \varphi_n)^T$  (мы предположили, что  $\phi_j \equiv 0$ ,  $j > n$ , чтобы ограничиться конечномерными объектами). Задание метрических свойств проекции  $\Phi$  на  $\mathbb{C}P^n$  эквивалентно заданию плотности нулей. Таким образом,

плотность нулей по теореме Калаби определяют проекцию  $\Phi$  на  $\mathbb{C}P^n$ , с точностью до поворота и, следовательно, распределение нулей.

**Открытый вопрос:** Как зная плотность нулей (первую интенсивность) ГАФ, восстановить по ней другие характеристики распределения нулей, допустим, старшие интенсивности?

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. Edelman, E. Kostlan How many zeros of a random polynomial are real? *Bull. Amer. Math. Soc.* 32, p. 1-37 (1995)
- [2] B. J. Hough, M. Krishnapur, B. Virag, Y. Peres Zeros of gaussian analytic functions and determinantal point processes. *AMS* (2009)
- [3] M. Sodin Zeroes of Gaussian analytic functions. *Mathematical Research Letters* 7, p. 371-381 (2000)