Символы Конту-Каррера в теории чисел и алгебраической геометрии

Д. В. Осипов[1,2,3]

[1] *Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Москва*
[2] *Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", Москва*
[3] *Национальный исследовательский технологический университет "МИСиС", Москва*

Теория полей классов описывает абелевы расширения (то есть с абелевой группой Галуа) глобального поля K, такого как конечное расширение поля $\mathbb{Q}$ или конечное расширение поля $\mathbb{F}_q(t)$, где $\mathbb{F}_q$ — конечное поле. При этом важным является построение локального отображения взаимности из мультипликативной группы поля K_ν^* в группу Галуа $\mathrm{Gal}(K_\nu^{\mathrm{ab}}/K_\nu)$, где K_ν^{ab} — это максимальное абелево расширение поля K_ν, которое есть пополнение поля K по его дискретному нормированию ν.

Пусть характеристика поля K не равна нулю, то есть поле K является полем рациональных функций на алгебраической кривой, определенной над конечным полем. Тогда поле K_ν изоморфно полю рядов Лорана $\mathbb{F}_{q'}((t))$ над конечным полем $\mathbb{F}_{q'}$. В этом случае локальное отображение взаимности строится при помощи явных спариваний: ручного символа, спаривания Артина–Шрайера, спаривания Витта. При переходе к описанию группы Галуа $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)$, где K — глобальное поле, для этих спариваний возникают законы взаимности на проективной алгебраической кривой, в частности закон взаимности Вейля для ручных символов и закон взаимности для вычетов дифференциальных форм. Оказывается, все эти спаривания можно получить из одного бимультипликативного спаривания, называемым символом Конту-Каррера

$$CC_1 \,:\, A((t))^* \times A((t))^* \longrightarrow A^* \,,$$

где $A((t))^*$ — группа обратимых элементов кольца рядов Лорана $A((t))$ над произвольным коммутативным кольцом A. При этом возникает самый общий закон взаимности на проективной алгебраической кривой для символа Конту-Каррера.

При замене алгебраической кривой на алгебраическое многообразие высшей размерности, определенное над конечным полем, возникает теория полей классов Паршина–Като, описывающая максимальное абелево расширение поля рациональных функций этого многообразия. При этом локальные отображения взаимности возникают для описания максимального абелева расширения поля итерированных рядов Лорана $\mathbb{F}_{q'}((t_1))\dots((t_n))$. Все эти локальные отображения взаимности могут быть получены из n-мерного символа Конту-Каррера $CC_n : A((t_1))\dots((t_n))^{\times(n+1)} \longrightarrow A^*$.

В случае алгебраической поверхности, допускающей сюръективный проективный морфизм на алгебраическую кривую, символ Конту-Каррера CC_1 может быть применен для локального описания отображения прямого образа для группы Чжоу нуль-циклов на поверхности. Это приводит к локальной теореме Делиня–Римана–Роха, важным ингредиентом которой является символ Конту-Каррера.

Про этот круг вопросов я собираюсь рассказать в своем докладе.

Осипов Денис Васильевич, Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, Москва, **e-mail:** d_osipov@mi-ras.ru