

О некоторых задачах теории операторов в пространствах быстро убывающих функций

Мусин И.Х. (ИМВЦ УФИЦ РАН)

**Международная Казанская школа-конференция
"Теория функций, её приложения и смежные
вопросы"**

23–28 августа 2025 г., Институт математики и механики им.
Н. И. Лобачевского, Казанский (Приволжский)
федеральный университет, г. Казань

1. Введение

1.1. О первой задаче. Пусть C – открытый выпуклый острый конус в $\mathbb{R}^n$ с вершиной в начале, b – выпуклая непр. положительно однородная степени 1 функция на $\overline{C}$. Тогда

$$U = \{\xi \in \mathbb{R}^n : -\langle \xi, y \rangle \leq b(y), \forall y \in C\},$$

замкнутое выпуклое неограниченное множество, не содержащее целую прямую. Внутренность U непуста и совпадает с

$$V = \{\xi \in \mathbb{R}^n : -\langle \xi, y \rangle < b(y), \forall y \in \overline{C}\},$$

а замыкание V есть множество U .

Если $a \geq 0$ и $b(y) = a\|y\|$ для $y \in \overline{C}$, то

$$U(b, C) = C^* + B_a,$$

где $C^* = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \langle \xi, y \rangle \geq 0, \forall y \in C\}$ – сопряжённый конус, B_a – замкнутый шар радиуса a с центром в нуле.

Если $\mathcal{K}$ – выпуклый компакт в $\mathbb{R}^n$, $b(y) = \max_{t \in \mathcal{K}} (-\langle y, t \rangle)$ для

$y \in \overline{C}$, тогда

$$U(b, C) = C^* + \mathcal{K}.$$

Для произвольного множества $M \subset \mathbb{R}^n$ определим (опорную) функцию H_M в $\mathbb{R}^n$ по формуле

$$H_M(x) = \sup_{\xi \in M} (-\langle x, \xi \rangle), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная выпуклая область, K – замыкание области D в $\mathbb{R}^n$. образуем множество $G = U + K$. G – замкнутое выпуклое неограниченное множество. Показывается, что

$$H_G(y) = b(y) + H_K(y), \quad y \in \overline{C}.$$

Таким образом, функция H_G непрерывна на $\overline{C}$. Отметим, что

$$G = \{\xi \in \mathbb{R}^n : -\langle \xi, y \rangle \leq H_G(y), \forall y \in C\}.$$

Для $\Omega = U$ или $\Omega = G$ через $S(\Omega)$ обозначим пространство Шварца функций f класса C^∞ на Ω таких, что для любого $p \in \mathbb{Z}_+$

$$\|f\|_{p,\Omega} = \sup_{x \in \text{int } \Omega, |\alpha| \leq p} |(D^\alpha f)(x)|(1 + \|x\|)^p < \infty.$$

Здесь $\|\cdot\|$ – евклидова норма в $\mathbb{R}^n$. Топология в $S(\Omega)$ задаётся семейством норм $\|f\|_{p,\Omega}$ ($p \in \mathbb{Z}_+$).

Пусть μ – линейный непрерывный функционал на пространстве $C^\infty(K)$ бесконечно дифференцируемых на K функций f с топологией, определяемой системой норм

$$\|f\|_m = \max_{x \in K, |\alpha| \leq m} |(D^\alpha f)(x)|, \quad m \in \mathbb{Z}_+.$$

Тогда при некоторых $p \in \mathbb{Z}_+$ и $c_\mu > 0$

$$|\langle \mu, f \rangle| \leq c_\mu \|f\|_p, \quad f \in C^\infty(K). \quad (1)$$

Отметим, что для произвольной функции $f \in S(U + K)$ и любого $x \in U$ функция $f_x : t \in K \rightarrow f(t + x)$ определена корректно и принадлежит классу $C^\infty(K)$.

Лемма 1

Пусть $x \in U$. Тогда линейный оператор $T_x : f \in S(G) \rightarrow f_x$ действует из $S(G)$ в $C^\infty(K)$ и является непрерывным.

Определение 1

Определим свёртку $\mu * f$ функционала μ и функции $f \in S(U + K)$ по правилу

$$(\mu * f)(x) = \langle \mu_t, f(x + t) \rangle, \quad x \in U.$$

Поскольку для любого $x \in U$ функция f_x принадлежит классу $C^\infty(K)$, то функция $\mu * f$ корректно определена на U .

Лемма 2

Пусть $f \in S(U + K)$. Тогда $\mu * f \in C^\infty(U)$ и для любого $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$

$$(D^\beta(\mu * f))(x) = (\mu * D^\beta f)(x), \quad x \in U. \quad (2)$$

Отметим, что оператор $M_\mu : f \in S(U + K) \rightarrow \mu * f$ действует из $S(U + K)$ в $S(U)$. Действительно, пользуясь (1) и (2), имеем для любых $x \in U$, $m \in \mathbb{Z}_+$ и $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$ с $|\beta| \leq m$

$$\begin{aligned} (1 + \|x\|)^m |(D^\beta(M_\mu f))(x)| &= (1 + \|x\|)^m |\langle \mu_t, (D^\beta f)(t + x) \rangle| \leq \\ &\leq c_\mu \sup_{t \in K, |\alpha| \leq p} (1 + \|x\|)^m |(D^{\alpha+\beta} f)(x + t)|. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что при некотором $A = A(m, K) > 0$

$$\begin{aligned} (1 + \|x\|)^m |(D^\beta(M_\mu f))(x)| &\leq \\ &\leq A c_\mu \sup_{\substack{\xi \in G, \\ |\gamma| \leq m+p}} (1 + \|\xi\|)^m |(D^\gamma f)(\xi)| \leq A c_\mu \|f\|_{m+p, G}. \end{aligned}$$

Таким образом, для любого $m \in \mathbb{Z}_+$

$$\|M_\mu f\|_{m, U} \leq A c_\mu \|f\|_{m+p, G}, \quad f \in S(U + K). \quad (3)$$

Это неравенство означает, что $M_\mu(f) \in S(U)$ и линейный оператор M_μ действует из $S(U + K)$ в $S(U)$ непрерывно.

Задача: найти условия на μ при которых оператор $M_\mu : S(U + K) \rightarrow S(U)$ является сюръективным. Одна из целей доклада – нахождение достаточного условия сюръективности.

1.2. Обозначения и определения. Для

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$ полагаем

$$\|u\| = \sqrt{|u_1|^2 + \dots + |u_n|^2}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \quad \alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!,$$
$$u^\alpha = u_1^{\alpha_1} \cdots u_n^{\alpha_n}, \quad D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial u_1^{\alpha_1} \cdots \partial u_n^{\alpha_n}}.$$

Для $u = (u_1, \dots, u_n)$, $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$ пусть

$$\langle u, v \rangle := u_1 v_1 + \dots + u_n v_n.$$

$H(T_C)$ – пространство голоморфных функций в трубчатой области $T_C = \mathbb{R}^n + iC$.

$\Delta_C(y)$ – расстояние от точки $y \in C$ до границы конуса C .

Для $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ и $r > 0$

$$\Delta(z, r) = \{w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n : |w_j - z_j| \leq r, j = 1, \dots, n\}.$$

$[x, \xi]$ – отрезок, соединяющий точки $x, \xi \in \mathbb{R}^n$.

Для произвольного локально выпуклого пространства X через X' обозначаем пространство линейных непрерывных функционалов на X , через X^* – сильное сопряжённое пространство.

2. О сопряженном к пространству $S(U)$

Известно (В.С. Владимиров, Roever) что для любого $z \in \mathbb{R}^n + iC$ функция $f_z(\xi) = e^{i\langle \xi, z \rangle}$ принадлежит $S(U)$.

Поэтому для произвольного функционала $\Phi \in S'(U)$ функция

$$\hat{\Phi}(z) = \langle \Phi, e^{i\langle \xi, z \rangle} \rangle$$

корректно определена в $T_C = \mathbb{R}^n + iC$. Она голоморфна в T_C (В.С. Владимиров, Roever). Функция $\hat{\Phi}$ – преобразование Фурье-Лапласа функционала Φ .

Определим пространство $V_b(T_C)$ следующим образом. Для каждого $m \in \mathbb{Z}_+$ определим нормированные пространства

$$V_{b,m}(T_C) = \left\{ f \in H(T_C) : N_m(f) = \sup_{z \in T_C} \frac{|f(z)| e^{-b(y)}}{(1 + \|z\|)^m (1 + \frac{1}{\Delta_C(y)})^m} < \infty \right.$$

где $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in C$. Пусть $V_b(T_C) = \bigcup_{m=0}^{\infty} V_{b,m}(T_C)$. Наделим $V_b(T_C)$ топологией индуктивного предела пространств $V_{b,m}(T_C)$. $V_b(T_C)$ – пространство (LN^*) или, придерживаясь более современной терминологии, – пространство DFS .

Теорема А

Преобразование Фурье-Лапласа $\mathcal{F} : S^*(U) \rightarrow V_b(T_C)$, задаваемое по правилу $\mathcal{F}(T) = \hat{T}$, – изоморфизм.

Для $b(y) = a\|y\|$ ($a \geq 0$) Теорема А получена В.С.

Владимировым.

Замечание 1. Определим для каждого $\varepsilon > 0$ функцию b_ε на $\overline{C}$ по правилу $b_\varepsilon(y) = b(y) + \varepsilon\|y\|$ и пространство $V_{b_\varepsilon}(T_C)$ – индуктивный предел нормированных пространств

$$V_{b_\varepsilon, k}(T_C) = \left\{ f \in H(T_C) : N_{k, \varepsilon}(f) = \sup_{z \in T_C} \frac{|f(z)| e^{-b_\varepsilon(y)}}{(1 + \|z\|)^k (1 + \frac{1}{\Delta_C(y)})^k} < \infty \right.$$

где $k \in \mathbb{Z}_+$, $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in C$. Пусть $H_b(T_C)$ – проективный предел пространств $V_{b_\varepsilon}(T_C)$. Известно (Musin, Yakovleva), что пространства $V_b(T_C)$ и $H_b(T_C)$ совпадают.

Если b – выпуклая положительно однородная степени 1 на C .

Тогда b непрерывна на C .

Пусть $(C_m)_{m=1}^{\infty}$ – последовательность выпуклых открытых конусов в $\mathbb{R}^n$ таких, что $\overline{\text{pr } C_m} \subset \text{pr } C_{m+1}$, $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} C_m = C$.

Определим для каждого $m \in \mathbb{N}$ пространство $H(b, C_m)$ – индуктивный предел нормированных пространств

$$H_k(b, C_m) = \left\{ f \in H(T_{C_m}) : n_{m,k}(f) = \sup_{z \in T_{C_m}} \frac{|f(z)| e^{-b(y)}}{(1 + \|z\|)^k (1 + \frac{1}{\|y\|})^k} < \infty \right.$$

где $k \in \mathbb{Z}_+$, $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in C_m$.

Пусть $H(b, C)$ – проективный предел пространств $H(b, C_m)$.

Теорема R

Отображение $\mathcal{F} : \Phi \in S^*(U) \rightarrow \hat{\Phi}$ устанавливает изоморфизм между пространствами $S^*(U)$ и $H(b, C)$.

Теорема R получена Роевером (J.W. de Roever // SIAM. J. Math. Analysis. Vol. 9, No. 6, December 1978).

Теорема 1

Пусть μ – линейный непрерывный функционал на пространстве $C^\infty(K)$. Допустим, что его преобразование Фурье-Лапласа – функция

$$\hat{\mu}(z) = (\mu, e^{i\langle \xi, z \rangle}), \quad z \in \mathbb{C}^n,$$

такова, что существуют положительные числа $A, L, N > 1$ такие, что какова бы ни была точка $z \in \mathbb{C}^n$ для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ найдётся не превосходящее $\frac{L}{\varepsilon^N}$ число $a_\varepsilon \geq 1$ такое, что

$$e^{H_K(\operatorname{Im} z) - A \ln(1 + \|z\|)} \leq a_\varepsilon \max_{w \in \Delta(z, \varepsilon)} |\hat{\mu}(w)|.$$

Тогда оператор $M_\mu : S(U + K) \rightarrow S(U)$ является сюръективным.

При док-ве Теоремы 1 также используются след. утверждения.

Лемма 3

Пусть Γ – открытый выпуклый конус в $\mathbb{R}^n$ с вершиной в начале. Пусть h – выпуклая непрерывная позитивно однородная степени 1 функция на $\overline{\Gamma}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует постоянная $A_\varepsilon > 0$ такая, что для любых $y_1, y_2 \in \Gamma$ таких, что $\|y_2 - y_1\| \leq 1$

$$|h(y_2) - h(y_1)| \leq \varepsilon \|y_1\| + \varepsilon \|y_2\| + A_\varepsilon.$$

Лемма 4

Пусть $\Phi_1, \Phi_2, \Phi = \frac{\Phi_1}{\Phi_2}$ – голоморфные функции в шаре $B(0, R)$. Пусть $|\Phi_1(w)| \leq B, |\Phi_2(w)| \leq A$ для $w \in B(0, R)$. Тогда

$$|\Phi(w)| \leq BA^{\frac{2\|w\|}{R-\|w\|}} |\Phi_2(0)|^{-\frac{R+\|w\|}{R-\|w\|}}, \quad w \in B(0, R).$$

Лемма 4 получена в (L. Hormander. *On the range of convolution operators* // Ann. of Math. **76**, 148–170 (1962)).

В качестве применения Теоремы 1 рассмотрим вопрос о существовании в $S(U)$ решений дифференциально-разностного уравнения, которое определим следующим образом.

Зафиксируем $m \in \mathbb{N}$. Для $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ с $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq m$ пусть $h_\alpha \in \mathbb{R}^n$. Пусть K – выпуклая оболочка точек h_α , причём внутренность K не пуста. Отметим, что $H_K(y) = \max_{|\alpha| \leq m} (-\langle y, h_\alpha \rangle)$ для любого $y \in \mathbb{R}^n$.

Для $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ и $r > 0$ пусть

$$T(z, r) = \{w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n : |w_j - z_j| = r, j = 1, \dots, n\},$$

Для функции g , голоморфной на $\Delta(z, r)$, пусть

$$[g(z)]_r = \frac{1}{(2\pi r)^n} \int_{z \in T(z, r)} |g(z)| |dz|.$$

Известен следующий результат (С.А. Berenstein, М.А. Dostal. *Some remarks on convolution equations* // Annales de l'institut Fourier, **23**:1, 55-73 (1973)).

Теорема В

Пусть $P(z) = \sum_{k=1}^m P_k(z)e^{\langle \alpha_k, z \rangle}$, где для каждого k P_k – аналитический полином в $\mathbb{C}^n$ и $\alpha_k \in \mathbb{C}^n$. Пусть $h_P(z) = \max_k \operatorname{Re} \langle \alpha_k, z \rangle$, $z \in \mathbb{C}^n$.

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся постоянная $C(\varepsilon, P) > 0$ такая, что если f – аналитическая функция в полидиске $\Delta(z, \varepsilon)$, то

$$|f(z)|e^{h_P(z)} \leq C(\varepsilon, P)[f(z)P(z)]_\varepsilon. \quad (4)$$

Замечание 2. Анализ доказательства Теоремы В показывает, что при некоторых $L > 0$ и $N \in \mathbb{N}$, не зависящих от ε и z , справедливо неравенство

$$C(\varepsilon, P) \leq \frac{L}{\varepsilon^N}, \quad \varepsilon \in (0, 1).$$

Замечание 3. В условиях Теоремы В из (4) следует, что для любой аналитической в полидиске $\Delta(z, \varepsilon)$ функции f

$$|f(z)|e^{h_P(z)} \leq C(\varepsilon, P) \max_{w \in \Delta(z, \varepsilon)} |f(w)P(w)|. \quad (5)$$

Отметим, что линейный непрерывный функционал F на пространстве $C^\infty(K)$, определяемый по правилу:

$$F(f) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n: |\alpha| \leq m} c_\alpha (D^\alpha f)(h_\alpha),$$

задает дифференциально-разностный оператор L на $S(G)$:

$$(Lf)(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n: |\alpha| \leq m} c_\alpha (D^\alpha f)(x + h_\alpha), \quad x \in U.$$

Очевидно, $Lf \in S(U)$ для любого $f \in S(G)$ и оператор L – линейный и непрерывный. Кроме того,

$$\hat{F}(z) = P(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n: |\alpha| \leq m} c_\alpha (iz)^\alpha e^{i\langle h_\alpha, z \rangle},$$

$h_P(z) = H_K(\operatorname{Im} z)$ для $z \in \mathbb{C}^n$. В силу (5) F удовлетворяет условиям Теоремы 1. Таким образом, по Теореме 1 имеем

Следствие 1

Оператор L действует из $S(G)$ в $S(U)$ сюръективно.

Теорема 2

Пусть $P(z) = \sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha z^\alpha$ – полином степени N ,

$P(D) = \sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha D^\alpha$ – дифференциальный оператор конечного

порядка, соответствующий полиному P .

Тогда оператор $P(D)$ сюръективен в пространстве $S(U)$.

Теорема 2 доказывается по той же схеме, что и Теорема 1. При этом важную роль играет следующая лемма, известная как Лемма Эренпрайса-Мальгранжа (см., напр., Hansen).

Лемма 5

Пусть p – полином степени m . Тогда существует число $c > 0$ такое, что для любых $r > 0$, $z \in \mathbb{C}^n$ и для любой функции $f \in H(B(z, r))$ такой, что $\frac{f(\cdot)}{p(\cdot)} \in H(B(z, r))$ справедливо неравенство

$$\left| \frac{f(z)}{p(z)} \right| \leq cr^{-m} \sup_{\zeta \in B(z, r)} |f(\zeta)|.$$

Вторая задача

Пусть

$$S_0(U) = \{f \in S(\mathbb{R}^n) : \text{supp } f \subseteq U,$$

$$p_{m,U}(f) = \sup_{\substack{x \in U, \\ |\alpha| \leq m}} |(D^\alpha f)(x)|(1 + \|x\|)^m < \infty, \quad m = 0, 1, \dots, |\alpha| \leq m\}.$$

Пусть $f \in S_0(U)$. Тогда на T_C корректно определена функция

$$\hat{f}(z) = \int_U f(\xi) e^{i\langle z, \xi \rangle} d\xi. \quad (6)$$

Действительно, если $z = x + iy \in T_C$, то $\forall \xi \in U$ и любых $m \in \mathbb{N}$ (в частности, $m = 1$)

$$|f(\xi) e^{i\langle z, \xi \rangle}| \leq \frac{p_{n+m,U}(f)}{(1 + \|\xi\|)^{n+1}} e^{-\langle \xi, y \rangle} \leq \frac{p_{n+m,U}(f) e^{b(y)}}{(1 + \|\xi\|)^{n+m}}.$$

Следовательно, $\forall z \in T_C$ интеграл (6) сходится.

Предложение 1

Пусть $f \in S_0(U)$. Тогда $\hat{f} \in H(T_C)$ и $\forall m \in \mathbb{Z}_+, |\alpha| \leq m$

$$|z^\alpha \hat{f}(z)| \leq C_N p_{N,U}(f) e^{b(y)}, \quad z = x + iy \in T_C, N = m + n + 1.$$

Пусть

$$\mathcal{H}_b(T_C) = \{f \in H(T_C) : \|f\|_m = \sup_{z \in T_C} \frac{(1 + \|z\|)^m |f(z)|}{e^{b(y)}} < \infty \forall m \in \mathbb{Z}_+\}.$$

Предложение 2

Отображение $F : S_0(U) \rightarrow \mathcal{H}_b(T_C)$, действующее по правилу:
 $f \in S_0(U) \rightarrow \hat{f}$, – изоморфизм между $S_0(U)$ и $\mathcal{H}_b(T_C)$.

3. Температурное преобразование функции

Серия работ Т. Matsuzawa (напр., A calculus approach to hyperfunctions II, Trans. Amer. Math. Soc., 313 (1990), 619-654).

Серия работ К.В. Kim, С.-Y. Chung and Д. (напр., Kim Soon-Yeong Chung, Dohan Kim. Paley-Wiener type theorems for the temperature transform // Integral Transforms and Special Functions, 11:2, 151-162 (2001)).

Для функции $f \in S_0(U)$ определим его температурное преобразование по формуле

$$Tf(z, t) = \int_U f(\xi) e^{i\langle z, \xi \rangle - t\|\xi\|^2} d\xi, \quad z \in T_C, t \geq 0.$$

Тогда

$i_1)$ $Tf(z, t)$ – голоморфная в T_C для любого $t \geq 0$,

$Tf(z, t) \in C^\infty(T_C \times [0, \infty))$;

$i_2)$ $\frac{\partial(Tf)}{\partial t}(z, t) = \Delta_z(Tf)(z, t), \quad (z, t) \in T_C \times [0, \infty).$

Предложение 3

Пусть $f \in S_0(U)$. Тогда Tf удовлетворяет условиям i_1), i_2) и $\forall m \in \mathbb{Z}_+$ найдётся $A_m > 0$ такое, что $\forall m \in \mathbb{Z}_+$, $z = x + iy \in T_C$

$$(1 + \|z\|)^m |(Tf)(z, t)| \leq A_m p_{N,U}(f)(t^+)^{\frac{m}{2}} e^{b(y)}, \quad N = m + n + 1. \quad (7)$$

Доказательство. Получим вначале оценку сверху на $D_x^\alpha(e^{-t\|x\|^2})$ при произвольном $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$. Достаточно рассмотреть одномерный случай. Пусть $k \in \mathbb{N}$. Для $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, пользуясь представлением

$$(e^{-tx^2})^{(k)} = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{-t\zeta^2}}{(\zeta - x)^{k+1}} d\zeta,$$

где $\Gamma_R = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta - x| = R\}$, $R > 0$, имеем

$$|(e^{-tx^2})^{(k)}| \leq \frac{k!}{R^k} e^{t \max_{\zeta \in \Gamma_R} (-\operatorname{Re} \zeta^2)} = \frac{k!}{R^k} e^{t \max_{u+iv \in \Gamma_R} (v^2 - u^2)} = \frac{k!}{R^k} e^{t(R^2 - \frac{x^2}{2})}.$$

Отсюда получим, что

$$\begin{aligned} |(e^{-tx^2})^{(k)}| &\leq k! e^{-\frac{tx^2}{2}} \inf_{R>0} \frac{e^{tR^2}}{R^k} = \\ &= \frac{k!}{k^{\frac{k}{2}}} (2et)^{\frac{k}{2}} e^{-\frac{tx^2}{2}} \leq \sqrt{2} (4e)^{\frac{k}{2}} (k!)^{\frac{1}{2}} t^{\frac{k}{2}} e^{-\frac{tx^2}{2}}. \end{aligned}$$

При $k = 0$ это неравенство также справедливо.

Таким образом, для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$

$$|D_x^\alpha (e^{-t\|x\|^2})| \leq 2^{\frac{n}{2}} (4e)^{\frac{|\alpha|}{2}} (\alpha!)^{\frac{1}{2}} (t^+)^{\frac{|\alpha|}{2}} e^{-\frac{t\|x\|^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0. \quad (8)$$

Получим оценку (7). Пусть $f \in S_0(U)$. Тогда $f \in S(\mathbb{R}^n)$ и $\text{supp } f \subseteq U$. Если $m \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ с $|\alpha| \leq m$, то, в частности,

$$|(D_\xi^\alpha f)(\xi)| \leq \frac{p_{N,U}(f)}{(1 + \|\xi\|)^N}, \quad \xi \in U, \quad (9)$$

где $N = m + n + 1$.

Из равенства

$$\begin{aligned} z^\alpha F(z, t) &= (-i)^{|\alpha|} \int_U f(\xi) D_\xi^\alpha (e^{i\langle z, \xi \rangle}) e^{-t\|\xi\|^2} d\xi = \\ &= i^{|\alpha|} \int_U D_\xi^\alpha (f(\xi) e^{-t\|\xi\|^2}) e^{i\langle z, \xi \rangle} d\xi. \end{aligned}$$

следует, что для $z = x + iy$

$$|z^\alpha F(z, t)| \leq \sum_{\beta \leq \alpha} C_\alpha^\beta \int_U |(D_\xi^{\alpha-\beta} f)(\xi)| |D_\xi^\beta e^{-t\|\xi\|^2}| e^{-\langle y, \xi \rangle} d\xi.$$

Отсюда с учётом (9) и (8) имеем

$$\begin{aligned} |z^\alpha F(z, t)| &\leq 2^{\frac{n}{2}} p_{N,U}(f) \sum_{\beta \leq \alpha} C_\alpha^\beta (4e)^{\frac{|\beta|}{2}} (\beta!)^{\frac{1}{2}} (t^+)^{\frac{|\beta|}{2}} \int_U \frac{e^{-\frac{t\|\xi\|^2}{2}} e^{-\langle y, \xi \rangle}}{(1 + \|\xi\|)^N} d\xi \\ &\leq 2^{\frac{n}{2}} p_{N,U}(f) C_N e^{b(y)} (4e)^{\frac{m}{2}} (t^+)^{\frac{m}{2}} (\alpha!)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq 2^{\frac{n}{2}} p_{N,U}(f) C_N e^{b(y)} (4e)^{\frac{m}{2}} (t^+)^{\frac{m}{2}} m!^{\frac{1}{2}} = \\ &= A_m p_{N,U}(f) (t^+)^{\frac{m}{2}} e^{b(y)}. \end{aligned}$$

Предложение 4

Пусть $f \in S_0(U)$. Тогда Tf удовлетворяет условиям $i_1), i_2)$ и $\forall m \in \mathbb{Z}_+, k \in \mathbb{Z}_+ |\alpha| \leq m$ найдётся $A > 0$ такое, что $\forall m \in \mathbb{Z}_+, z = x + iy \in T_C$

$$(1 + \|z\|)^m |(D_z^\alpha D_t^k Tf)(z, t)| \leq A p_{N_1, U}(f)(t^+)^{\frac{m}{2}} e^{b(y)}, \quad (10)$$

где $N_1 = m + n + 1 + 2k$.

Предложение 5

Если для функции $F(z, t)$ на $T_C \times [0, \infty)$, удовлетворяющей условиям $i_1), i_2)$, $\forall m \in \mathbb{Z}_+$ найдутся числа $C > 0$ и $s \in \mathbb{Z}_+$ такие, что

$$(1 + \|z\|)^m |(D_z^\alpha D_t^k Tf)(z, t)| \leq C(t^+)^s e^{b(y)}, \quad z = x + iy \in T_C, t \geq 0, \quad (11)$$

то $F(z, t) = Tf(z, t)$ для некоторого $f \in S_0(U)$.

Доказательство. Для каждого $y \in C$ положим

$$f_t(\xi) = e^{t\|\xi\|^2} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^n \int_{\mathbb{R}^n} F(x + iy, t) e^{-i\langle x + iy, \xi \rangle} dx, \quad t \geq 0.$$

Так как $F(z, t)$ удовлетворяет условию i_2) (уравнение теплопроводности), то $f_t(\xi)$ не зависит от t . Пишем $f_t(\xi) = f(\xi)$. По определению $f \in S(\mathbb{R}^n)$. Далее, для $\xi \notin U$

$$|f(\xi)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} F(x + iy, t) e^{-i\langle x + iy, \xi \rangle} dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |F(x + iy, t)| e^{\langle y, \xi \rangle} dx. \quad (12)$$

Так как $\xi \notin U$, то найдётся $y_0 \in C$, что $-\langle \xi, y_0 \rangle > b(y_0)$.

Полагая в (12) $y = \lambda y_0$ с $\lambda > 0$ и пользуясь (11), получим, что f обращается в ноль вне U .

Для $m, s \in \mathbb{Z}_+$ определим пространство $V_{m,s}$ функций $F(z, t)$ на $T_C \times [0, \infty)$, удовлетворяющих условиям $i_1), i_2)$, для которых конечны нормы

$$q_{m,p,s}(F) = \sup_{(z,t) \in T_C \times [0,\infty), |\alpha| \leq p, k \leq p} \frac{(1 + \|z\|)^m |(D_z^\alpha D_t^k F(z, t))|}{(t^+)^s e^{b(y)}}.$$

Пусть $V_{m,p}$ – индуктивный предел пространств $V_{m,p,s}$, P – проективный предел пространств $V_{m,p}$.

Предложение 6

Отображение T устанавливает изоморфизм между $S_0(U)$ и P .

Аналогичные утверждения для следующего преобразования функции $f \in S_0(U)$

$$Bf(z, t) = \int_U f(\xi) e^{i\langle z, \xi \rangle - it\|\xi\|^2} d\xi, \quad z \in T_C, t \geq 0.$$

Отметим, что

$i_1)$ $Bf(z, t)$ – голоморфная в T_C для любого $t \geq 0$,

$Tf(z, t) \in C^\infty(T_C \times [0, \infty))$;

$i_2)$ $\frac{\partial(Bf)}{\partial t}(z, t) = i\Delta_z(Bf)(z, t), \quad (z, t) \in T_C \times [0, \infty).$