

Неравенства Харди–Литтлвуда для функций из пространств типа Харди–Лоренца

В.Г.Кротов, М.М.Логиновская

Белорусский государственный университет

Казань, 25.08.2025

Основные обозначения и определения.

Рассмотрим тройку (X, d, μ) , где X — множество;

$$d : X \times X \rightarrow [0, \infty),$$

квазиметрика,

то есть выполнены все аксиомы метрики, только неравенство треугольника справедливо в ослабленной форме: существует такое число $K_1 = K_1(d) \geq 1$, что для всех $x, y, z \in X$ выполнено неравенство

$$d(x, y) \leq K_1[d(x, z) + d(z, y)];$$

μ — σ -конечная борелевская мера, причем для любого шара

$$B(x, t) := \{y \in X : d(x, y) < t\}, \quad x \in X, \quad t > 0$$

$$0 < \mu(B(x, t)) < \infty.$$

Рассмотрим тройку (X, d, μ) , где X — множество;

$$d : X \times X \rightarrow [0, \infty),$$

квазиметрика,

то есть выполнены все аксиомы метрики, только неравенство треугольника справедливо в ослабленной форме: существует такое число $K_1 = K_1(d) \geq 1$, что для всех $x, y, z \in X$ выполнено неравенство

$$d(x, y) \leq K_1[d(x, z) + d(z, y)];$$

μ — σ -конечная борелевская мера, причем для любого шара

$$B(x, t) := \{y \in X : d(x, y) < t\}, \quad x \in X, \quad t > 0$$

$$0 < \mu(B(x, t)) < \infty.$$

Рассмотрим тройку (X, d, μ) , где X — множество;

$$d : X \times X \rightarrow [0, \infty),$$

квазиметрика,

то есть выполнены все аксиомы метрики, только неравенство треугольника справедливо в ослабленной форме: существует такое число $K_1 = K_1(d) \geq 1$, что для всех $x, y, z \in X$ выполнено неравенство

$$d(x, y) \leq K_1[d(x, z) + d(z, y)];$$

μ — σ -конечная борелевская мера, причем для любого шара

$$B(x, t) := \{y \in X : d(x, y) < t\}, \quad x \in X, \quad t > 0$$

$$0 < \mu(B(x, t)) < \infty.$$

$L^0(X)$ — множество классов эквивалентности измеримых комплекснозначных функций на X .

Для $0 < p < \infty$, $L^p(X) \subset L^0(X)$ состоит из функций с конечной квазинормой

$$\|f\|_{L^p(X)} := \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p},$$

$L^\infty(X)$ — подмножество в $L^0(X)$, состоящее из существенно ограниченных функций,

$$\|f\|_{L^\infty(X)} := \inf \{ \lambda : \mu \{ x \in X : |f(x)| > \lambda \} = 0 \}.$$

$L^0(X)$ — множество классов эквивалентности измеримых комплекснозначных функций на X .

Для $0 < p < \infty$, $L^p(X) \subset L^0(X)$ состоит из функций с конечной квазинормой

$$\|f\|_{L^p(X)} := \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p},$$

$L^\infty(X)$ — подмножество в $L^0(X)$, состоящее из существенно ограниченных функций,

$$\|f\|_{L^\infty(X)} := \inf \{ \lambda : \mu \{ x \in X : |f(x)| > \lambda \} = 0 \}.$$

$L^0(X)$ — множество классов эквивалентности измеримых комплекснозначных функций на X .

Для $0 < p < \infty$, $L^p(X) \subset L^0(X)$ состоит из функций с конечной квазинормой

$$\|f\|_{L^p(X)} := \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p},$$

$L^\infty(X)$ — подмножество в $L^0(X)$, состоящее из существенно ограниченных функций,

$$\|f\|_{L^\infty(X)} := \inf \{ \lambda : \mu \{ x \in X : |f(x)| > \lambda \} = 0 \}.$$

Пространства Лоренца $L^{p,r}(X) \subset L^0(X)$, $0 < p, r \leq \infty$:

$$\|f\|_{L^{p,r}(X)} := \begin{cases} \left(\int_0^\infty [t^{1/p} f^*(t)]^r \frac{dt}{t} \right)^{1/r}, & 0 < r < \infty, \\ \sup_{t>0} t^{1/p} f^*(t), & r = \infty, \end{cases} \quad (1)$$

f^* — убывающая равноизмеримая перестановка функции f on Y :

$$f^*(t) := \inf\{\lambda > 0 : \mu(\{|f| > \lambda\}) \leq t\}, \quad t > 0.$$

$$L^{\infty,\infty} := L^\infty, \quad L^{p,p}(x) = L^p(X).$$

При фиксированном p с ростом r пространство $L^{p,r}(X)$ расширяется.

Пространства Лоренца $L^{p,r}(X) \subset L^0(X)$, $0 < p, r \leq \infty$:

$$\|f\|_{L^{p,r}(X)} := \begin{cases} \left(\int_0^\infty [t^{1/p} f^*(t)]^r \frac{dt}{t} \right)^{1/r}, & 0 < r < \infty, \\ \sup_{t>0} t^{1/p} f^*(t), & r = \infty, \end{cases} \quad (1)$$

f^* — убывающая равноизмеримая перестановка функции f on Y :

$$f^*(t) := \inf\{\lambda > 0 : \mu(\{|f| > \lambda\}) \leq t\}, \quad t > 0.$$

$$L^{\infty,\infty} := L^\infty, \quad L^{p,p}(x) = L^p(X).$$

При фиксированном p с ростом r пространство $L^{p,r}(X)$ расширяется.

Пространства Лоренца $L^{p,r}(X) \subset L^0(X)$, $0 < p, r \leq \infty$:

$$\|f\|_{L^{p,r}(X)} := \begin{cases} \left(\int_0^\infty [t^{1/p} f^*(t)]^r \frac{dt}{t} \right)^{1/r}, & 0 < r < \infty, \\ \sup_{t>0} t^{1/p} f^*(t), & r = \infty, \end{cases} \quad (1)$$

f^* — убывающая равноизмеримая перестановка функции f on Y :

$$f^*(t) := \inf\{\lambda > 0 : \mu(\{|f| > \lambda\}) \leq t\}, \quad t > 0.$$

$$L^{\infty,\infty} := L^\infty, \quad L^{p,p}(x) = L^p(X).$$

При фиксированном p с ростом r пространство $L^{p,r}(X)$ расширяется.

Пространства Лоренца $L^{p,r}(X) \subset L^0(X)$, $0 < p, r \leq \infty$:

$$\|f\|_{L^{p,r}(X)} := \begin{cases} \left(\int_0^\infty [t^{1/p} f^*(t)]^r \frac{dt}{t} \right)^{1/r}, & 0 < r < \infty, \\ \sup_{t>0} t^{1/p} f^*(t), & r = \infty, \end{cases} \quad (1)$$

f^* — убывающая равноизмеримая перестановка функции f on Y :

$$f^*(t) := \inf\{\lambda > 0 : \mu(\{|f| > \lambda\}) \leq t\}, \quad t > 0.$$

$$L^{\infty,\infty} := L^\infty, \quad L^{p,p}(x) = L^p(X).$$

При фиксированном p с ростом r пространство $L^{p,r}(X)$ расширяется.

Классы типа Харди–Лоренца.

$$\mathbf{X} := X \times I, \quad \text{где} \quad I = (0, t_0), \quad 0 < t_0 \leq +\infty.$$

со стандартной мерой-произведением $\mu \times m_1$, m_1 — одномерная мера Лебега на I .

X — «граница» $\mathbf{X}$

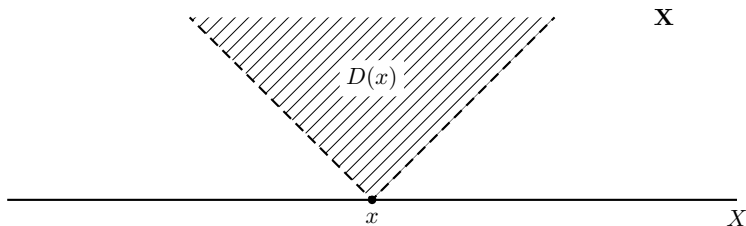
$$\mathbf{X} := X \times I, \quad \text{где} \quad I = (0, t_0), \quad 0 < t_0 \leq +\infty.$$

со стандартной мерой-произведением $\mu \times m_1$, m_1 — одномерная мера Лебега на I .

X — «граница» $\mathbf{X}$

$$D(x) := \{(y, t) \in \mathbf{X} : d(x, y) < t\}, \quad x \in X, \quad (2)$$

«некасательные» области подхода к точкам $x \in X$

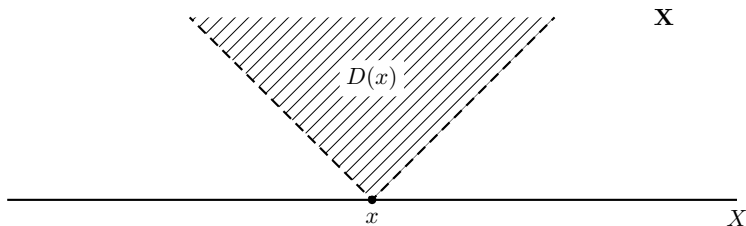


для $u : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{C}$ определим максимальную функцию

$$Nu(x) := \sup\{|u(y, t)| : (y, t) \in D(x)\}, \quad x \in X.$$

$$D(x) := \{(y, t) \in \mathbf{X} : d(x, y) < t\}, \quad x \in X, \quad (2)$$

«некасательные» области подхода к точкам $x \in X$

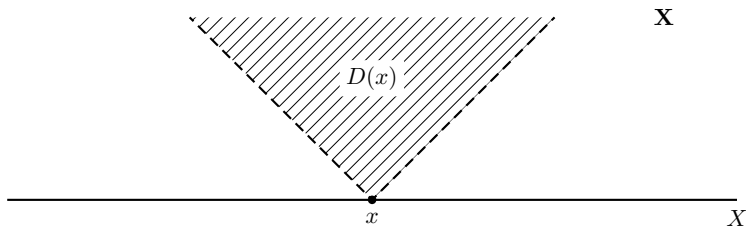


для $u : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{C}$ определим максимальную функцию

$$Nu(x) := \sup\{|u(y, t)| : (y, t) \in D(x)\}, \quad x \in X.$$

$$D(x) := \{(y, t) \in \mathbf{X} : d(x, y) < t\}, \quad x \in X, \quad (2)$$

«некасательные» области подхода к точкам $x \in X$



для $u : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{C}$ определим максимальную функцию

$$Nu(x) := \sup\{|u(y, t)| : (y, t) \in D(x)\}, \quad x \in X.$$

$\mathcal{H}^0(\mathbf{X})$ — множество всех измеримых функций (**эквивалентные функции не отождествляются**) $u : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{C}$, для которых $\mathcal{N}u$ конечна μ -почти всюду.

Для $0 < p, r \leq \infty$ класс $\mathcal{H}^{p,r}(\mathbf{X})$, состоит из функций $u \in \mathcal{H}^0(\mathbf{X})$, для которых конечна величина

$$\|u\|_{\mathcal{H}^{p,r}(\mathbf{X})} := \|\mathcal{N}u\|_{L^{p,r}(X)}.$$

При $r = p$ будем писать $\mathcal{H}^p(\mathbf{X})$ вместо $\mathcal{H}^{p,p}(\mathbf{X})$.

Coifman–Meyer–Stein, 1985: $\mathbf{X} = \mathbb{R}_+^{n+1}$ ввели классы, подобные $\mathcal{H}^p(\mathbb{R}_+^{n+1})$ и дополнительно предполагалось, что функции из них непрерывны и имеют почти всюду некасательные пределы.

$\mathcal{H}^0(\mathbf{X})$ — множество всех измеримых функций (эквивалентные функции не отождествляются) $u : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{C}$, для которых $\mathcal{N}u$ конечна μ -почти всюду.

Для $0 < p, r \leq \infty$ класс $\mathcal{H}^{p,r}(\mathbf{X})$, состоит из функций $u \in \mathcal{H}^0(\mathbf{X})$, для которых конечна величина

$$\|u\|_{\mathcal{H}^{p,r}(\mathbf{X})} := \|\mathcal{N}u\|_{L^{p,r}(X)}.$$

При $r = p$ будем писать $\mathcal{H}^p(\mathbf{X})$ вместо $\mathcal{H}^{p,p}(\mathbf{X})$.

Coifman–Meyer–Stein, 1985: $\mathbf{X} = \mathbb{R}_+^{n+1}$ ввели классы, подобные $\mathcal{H}^p(\mathbb{R}_+^{n+1})$ и дополнительно предполагалось, что функции из них непрерывны и имеют почти всюду некасательные пределы.

$\mathcal{H}^0(\mathbf{X})$ — множество всех измеримых функций (эквивалентные функции не отождествляются) $u : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{C}$, для которых $\mathcal{N}u$ конечна μ -почти всюду.

Для $0 < p, r \leq \infty$ класс $\mathcal{H}^{p,r}(\mathbf{X})$, состоит из функций $u \in \mathcal{H}^0(\mathbf{X})$, для которых конечна величина

$$\|u\|_{\mathcal{H}^{p,r}(\mathbf{X})} := \|\mathcal{N}u\|_{L^{p,r}(X)}.$$

При $r = p$ будем писать $\mathcal{H}^p(\mathbf{X})$ вместо $\mathcal{H}^{p,p}(\mathbf{X})$.

Coifman–Meyer–Stein, 1985: $\mathbf{X} = \mathbb{R}_+^{n+1}$ ввели классы, подобные $\mathcal{H}^p(\mathbb{R}_+^{n+1})$ и дополнительно предполагалось, что функции из них непрерывны и имеют почти всюду некасательные пределы.

Основные примеры.

Пример 1. Пусть $n \geq 1$, $B^n \subset \mathbb{C}^n$ — открытый единичный шар в $\mathbb{C}^n$, $X = S = \partial B^n \subset \mathbb{C}^n$ — единичная сфера, $\mu = \sigma$ — мера Лебега на S . На сфере S имеется естественная квазиметрика

$$d(\zeta, \xi) := |1 - \langle \zeta, \xi \rangle|, \quad \langle \zeta, \xi \rangle := \sum_{j=1}^n \zeta_j \bar{\xi}_j.$$

Класс Харди $H^p(B^n)$, $p > 0$, состоит из голоморфных функций $f : B^n \rightarrow \mathbb{C}$, для которых конечна величина

$$\|f\|_{H^p(B^n)} := \sup_{0 \leq r < 1} \|f_r\|_{L^p(S)}, \quad f_r(\zeta) := f(r\zeta)$$

Отождествим проколотый шар $B^n \setminus \{0\}$ и $\mathbb{X} = S \times (0, 1)$ с помощью отображения

$$z \mapsto (x, t), \quad \text{где} \quad x = z/|z|, \quad t = 1 - |z|.$$

$$H^p(B^n) \subset \mathcal{H}^p(S \times (0, 1)), \quad p > 0 \quad \text{непрерывно}$$

Класс Харди $H^p(B^n)$, $p > 0$, состоит из голоморфных функций $f : B^n \rightarrow \mathbb{C}$, для которых конечна величина

$$\|f\|_{H^p(B^n)} := \sup_{0 \leq r < 1} \|f_r\|_{L^p(S)}, \quad f_r(\zeta) := f(r\zeta)$$

Отождествим проколотый шар $B^n \setminus \{0\}$ и $\mathbf{X} = S \times (0, 1)$ с помощью отображения

$$z \mapsto (x, t), \quad \text{где} \quad x = z/|z|, \quad t = 1 - |z|.$$

$$H^p(B^n) \subset \mathcal{H}^p(S \times (0, 1)), \quad p > 0 \quad \text{непрерывно}$$

Класс Харди $H^p(B^n)$, $p > 0$, состоит из голоморфных функций $f : B^n \rightarrow \mathbb{C}$, для которых конечна величина

$$\|f\|_{H^p(B^n)} := \sup_{0 \leq r < 1} \|f_r\|_{L^p(S)}, \quad f_r(\zeta) := f(r\zeta)$$

Отождествим проколотый шар $B^n \setminus \{0\}$ и $\mathbf{X} = S \times (0, 1)$ с помощью отображения

$$z \mapsto (x, t), \quad \text{где} \quad x = z/|z|, \quad t = 1 - |z|.$$

$$H^p(B^n) \subset \mathcal{H}^p(S \times (0, 1)), \quad p > 0 \quad \text{непрерывно}$$

Пример 2. $X = \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $d(x, y) = |x - y|$ — евклидова метрика и μ — мера Лебега на $\mathbb{R}^n$, $I = (0, \infty)$. Тогда

$$\mathbb{R}^n \times (0, \infty) = \mathbb{R}_+^{n+1} = \{(x, t) : x \in \mathbb{R}^n, t > 0\}.$$

Для $p > 0$ классы Харди $H^p(\mathbb{R}_+^{n+1})$ определяются как (Фефферман–Стейн)

$$H^p(\mathbb{R}_+^{n+1}) := \{u \text{ гармонична} : \mathcal{N}u \in L^p(\mathbb{R}^n)\}.$$

Они непрерывно вкладываются в $\mathcal{H}^p(\mathbb{R}_+^{n+1})$

$$H^p(\mathbb{R}_+^{n+1}) = \{u = f * P_t : f \in L^p(\mathbb{R}^n)\}, \quad p > 1$$

$$P_t(x) = t(|x|^2 + t^2)^{-(n+1)/2}$$

Пример 2. $X = \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $d(x, y) = |x - y|$ — евклидова метрика и μ — мера Лебега на $\mathbb{R}^n$, $I = (0, \infty)$. Тогда

$$\mathbb{R}^n \times (0, \infty) = \mathbb{R}_+^{n+1} = \{(x, t) : x \in \mathbb{R}^n, t > 0\}.$$

Для $p > 0$ классы Харди $H^p(\mathbb{R}_+^{n+1})$ определяются как (Фефферман–Стейн)

$$H^p(\mathbb{R}_+^{n+1}) := \{u \text{ гармонична} : \mathcal{N}u \in L^p(\mathbb{R}^n)\}.$$

Они непрерывно вкладываются в $\mathcal{H}^p(\mathbb{R}_+^{n+1})$

$$H^p(\mathbb{R}_+^{n+1}) = \{u = f * P_t : f \in L^p(\mathbb{R}^n)\}, \quad p > 1$$

$$P_t(x) = t(|x|^2 + t^2)^{-(n+1)/2}$$

Пример 2. $X = \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $d(x, y) = |x - y|$ — евклидова метрика и μ — мера Лебега на $\mathbb{R}^n$, $I = (0, \infty)$. Тогда

$$\mathbb{R}^n \times (0, \infty) = \mathbb{R}_+^{n+1} = \{(x, t) : x \in \mathbb{R}^n, t > 0\}.$$

Для $p > 0$ классы Харди $H^p(\mathbb{R}_+^{n+1})$ определяются как (Фефферман–Стейн)

$$H^p(\mathbb{R}_+^{n+1}) := \{u \text{ гармонична} : \mathcal{N}u \in L^p(\mathbb{R}^n)\}.$$

Они непрерывно вкладываются в $\mathcal{H}^p(\mathbb{R}_+^{n+1})$

$$H^p(\mathbb{R}_+^{n+1}) = \{u = f * P_t : f \in L^p(\mathbb{R}^n)\}, \quad p > 1$$

$$P_t(x) = t(|x|^2 + t^2)^{-(n+1)/2}$$

Для $u \in H^p(\mathbb{R}_+^{n+1})$, $p > 0$, существует предел

$$\lim_{t \rightarrow +0} u(\cdot, t) = f$$

в смысле распределений медленного роста.

$H^p(\mathbb{R}^n)$ класс граничных распределений.

Пусть φ — достаточно гладкая функция на $\mathbb{R}^n$

$$\varphi_t(x) := t^{-n} \varphi(x/t), \quad t > 0. \quad (3)$$

Введем классы (Фефферман–Стейн)

$$H_\varphi^p(\mathbb{R}_+^{n+1}) = \{u = f * \varphi_t : f \in H^p(\mathbb{R}^n)\}, \quad p > 0$$

Тогда $\mathcal{N}u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ при $u \in H_\varphi^p(\mathbb{R}_+^{n+1})$

$$H_\varphi^p(\mathbb{R}_+^{n+1}) \subset \mathcal{H}^p(\mathbb{R}_+^{n+1}), \quad p > 0 \quad \text{непрерывно}$$

Для $u \in H^p(\mathbb{R}_+^{n+1})$, $p > 0$, существует предел

$$\lim_{t \rightarrow +0} u(\cdot, t) = f$$

в смысле распределений медленного роста.

$H^p(\mathbb{R}^n)$ класс граничных распределений.

Пусть φ — достаточно гладкая функция на $\mathbb{R}^n$

$$\varphi_t(x) := t^{-n} \varphi(x/t), \quad t > 0. \quad (3)$$

Введем классы (Фефферман–Стейн)

$$H_\varphi^p(\mathbb{R}_+^{n+1}) = \{u = f * \varphi_t : f \in H^p(\mathbb{R}^n)\}, \quad p > 0$$

Тогда $Nu \in L^p(\mathbb{R}^n)$ при $u \in H_\varphi^p(\mathbb{R}_+^{n+1})$

$$H_\varphi^p(\mathbb{R}_+^{n+1}) \subset \mathcal{H}^p(\mathbb{R}_+^{n+1}), \quad p > 0 \quad \text{непрерывно}$$

Для $u \in H^p(\mathbb{R}_+^{n+1})$, $p > 0$, существует предел

$$\lim_{t \rightarrow +0} u(\cdot, t) = f$$

в смысле распределений медленного роста.

$H^p(\mathbb{R}^n)$ класс граничных распределений.

Пусть φ — достаточно гладкая функция на $\mathbb{R}^n$

$$\varphi_t(x) := t^{-n} \varphi(x/t), \quad t > 0. \quad (3)$$

Введем классы (Фефферман–Стейн)

$$H_\varphi^p(\mathbb{R}_+^{n+1}) = \{u = f * \varphi_t : f \in H^p(\mathbb{R}^n)\}, \quad p > 0$$

Тогда $Nu \in L^p(\mathbb{R}^n)$ при $u \in H_\varphi^p(\mathbb{R}_+^{n+1})$

$$H_\varphi^p(\mathbb{R}_+^{n+1}) \subset \mathcal{H}^p(\mathbb{R}_+^{n+1}), \quad p > 0 \quad \text{непрерывно}$$

Классы граничных распределений Харди–Лоренца

$$H^{p,r}(\mathbb{R}^n) := \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \mathcal{N}(f * \varphi_t) \in L^{p,r}(\mathbb{R}^n)\}, \quad (4)$$

$(0 < p < \infty, 0 < r \leq \infty)$ естественным образом возникают как промежуточные пространства в методе интерполяции Лионса–Петре, свертки $f * \varphi_t$, где $f \in H^{p,r}(\mathbb{R}^n)$, принадлежат $\mathcal{H}^{p,r}(\mathbb{R}_+^{n+1})$.

Классы граничных распределений Харди–Лоренца

$$H^{p,r}(\mathbb{R}^n) := \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \mathcal{N}(f * \varphi_t) \in L^{p,r}(\mathbb{R}^n)\}, \quad (4)$$

$(0 < p < \infty, 0 < r \leq \infty)$ естественным образом возникают как промежуточные пространства в методе интерполяции Лионса–Петре, свертки $f * \varphi_t$, где $f \in H^{p,r}(\mathbb{R}^n)$, принадлежат $\mathcal{H}^{p,r}(\mathbb{R}_+^{n+1})$.

Неравенства Харди–Литтлвуда для классов типа Харди.

Основная цель доклада — рассмотрение неравенств для функций из $\mathcal{H}^{p,r}(\mathbf{X})$, $0 < p < \infty$, $0 < r \leq \infty$, исходным пунктом для которых являются неравенства Харди–Литтлвуда для аналитических функций в единичном круге из $\mathbb{C}$.

Опишем известные результаты в этом направлении.

$$u_t(x) := u(x, t), \quad x \in X, \quad t \in (0, t_0), \quad (5)$$

(это обозначение нигде не пресечется с φ_t)

Основная цель доклада — рассмотрение неравенств для функций из $\mathcal{H}^{p,r}(\mathbf{X})$, $0 < p < \infty$, $0 < r \leq \infty$, исходным пунктом для которых являются неравенства Харди–Литтлвуда для аналитических функций в единичном круге из $\mathbb{C}$.

Опишем известные результаты в этом направлении.

$$u_t(x) := u(x, t), \quad x \in X, \quad t \in (0, t_0), \quad (5)$$

(это обозначение нигде не пресечется с φ_t)

Основная цель доклада — рассмотрение неравенств для функций из $\mathcal{H}^{p,r}(\mathbf{X})$, $0 < p < \infty$, $0 < r \leq \infty$, исходным пунктом для которых являются неравенства Харди–Литтлвуда для аналитических функций в единичном круге из $\mathbb{C}$.

Опишем известные результаты в этом направлении.

$$u_t(x) := u(x, t), \quad x \in X, \quad t \in (0, t_0), \quad (5)$$

(это обозначение нигде не пресечется с φ_t)

Теорема 1

Пусть $0 < p < q \leq \infty$, $p \leq l$ и при некоторых $n > 0$ и $K_2 > 0$

$$t^n \leq K_2 \mu(B(x, t)), \quad x \in X, \quad t \in I. \quad (6)$$

Тогда для любой функции $u \in \mathcal{H}^p(\mathbf{X})$ справедливы неравенства

$$|u(x, t)| \lesssim_{K_2, p} t^{-n/p} \|\mathcal{N}u\|_{L^p(X)}, \quad x \in X, \quad t \in I, \quad (7)$$

$$\|u_t\|_{L^q(X)} \lesssim_{K_2, p, q} t^{-n(1/p-1/q)} \|\mathcal{N}u\|_{L^p(X)}, \quad t \in I, \quad (8)$$

$$\left(\int_0^{t_0} \left[t^{n(1/p-1/q)} \|u_t\|_{L^q(X)} \right]^l \frac{dt}{t} \right)^{1/l} \lesssim_{K_2, p, q, l} \|\mathcal{N}u\|_{L^p(X)}. \quad (9)$$

Теорема 1

Пусть $0 < p < q \leq \infty$, $p \leq l$ и при некоторых $n > 0$ и $K_2 > 0$

$$t^n \leq K_2 \mu(B(x, t)), \quad x \in X, \quad t \in I. \quad (6)$$

Тогда для любой функции $u \in \mathcal{H}^p(\mathbf{X})$ справедливы неравенства

$$|u(x, t)| \lesssim_{K_2, p} t^{-n/p} \|\mathcal{N}u\|_{L^p(X)}, \quad x \in X, \quad t \in I, \quad (7)$$

$$\|u_t\|_{L^q(X)} \lesssim_{K_2, p, q} t^{-n(1/p-1/q)} \|\mathcal{N}u\|_{L^p(X)}, \quad t \in I, \quad (8)$$

$$\left(\int_0^{t_0} \left[t^{n(1/p-1/q)} \|u_t\|_{L^q(X)} \right]^l \frac{dt}{t} \right)^{1/l} \lesssim_{K_2, p, q, l} \|\mathcal{N}u\|_{L^p(X)}. \quad (9)$$

Теорема 1

Пусть $0 < p < q \leq \infty$, $p \leq l$ и при некоторых $n > 0$ и $K_2 > 0$

$$t^n \leq K_2 \mu(B(x, t)), \quad x \in X, \quad t \in I. \quad (6)$$

Тогда для любой функции $u \in \mathcal{H}^p(\mathbf{X})$ справедливы неравенства

$$|u(x, t)| \lesssim_{K_2, p} t^{-n/p} \|\mathcal{N}u\|_{L^p(X)}, \quad x \in X, \quad t \in I, \quad (7)$$

$$\|u_t\|_{L^q(X)} \lesssim_{K_2, p, q} t^{-n(1/p-1/q)} \|\mathcal{N}u\|_{L^p(X)}, \quad t \in I, \quad (8)$$

$$\left(\int_0^{t_0} \left[t^{n(1/p-1/q)} \|u_t\|_{L^q(X)} \right]^l \frac{dt}{t} \right)^{1/l} \lesssim_{K_2, p, q, l} \|\mathcal{N}u\|_{L^p(X)}. \quad (9)$$

Теорема 1

Пусть $0 < p < q \leq \infty$, $p \leq l$ и при некоторых $n > 0$ и $K_2 > 0$

$$t^n \leq K_2 \mu(B(x, t)), \quad x \in X, \quad t \in I. \quad (6)$$

Тогда для любой функции $u \in \mathcal{H}^p(\mathbf{X})$ справедливы неравенства

$$|u(x, t)| \lesssim_{K_2, p} t^{-n/p} \|\mathcal{N}u\|_{L^p(X)}, \quad x \in X, \quad t \in I, \quad (7)$$

$$\|u_t\|_{L^q(X)} \lesssim_{K_2, p, q} t^{-n(1/p-1/q)} \|\mathcal{N}u\|_{L^p(X)}, \quad t \in I, \quad (8)$$

$$\left(\int_0^{t_0} \left[t^{n(1/p-1/q)} \|u_t\|_{L^q(X)} \right]^l \frac{dt}{t} \right)^{1/l} \lesssim_{K_2, p, q, l} \|\mathcal{N}u\|_{L^p(X)}. \quad (9)$$

В случае единичного круга $B^1 \subset \mathbb{C}$ неравенства (7)–(9) для функций из классов Харди $H^p(B^1)$, $p > 0$, начали изучать Г.Харди и Дж.Литтлвуд (1928, 1932, 1941).

Ж.Митчелл и К.Хан (1976) перенесли одномерные неравенства Харди–Литтлвуда на случай голоморфных функций из многомерных классов Харди $H^p(B^n)$ в единичном шаре $B^n \subset \mathbb{C}^n$ и в ограниченных симметрических областях из $\mathbb{C}^n$.

В случае единичного круга $B^1 \subset \mathbb{C}$ неравенства (7)–(9) для функций из классов Харди $H^p(B^1)$, $p > 0$, начали изучать Г.Харди и Дж.Литтлвуд (1928, 1932, 1941). Ж.Митчелл и К.Хан (1976) перенесли одномерные неравенства Харди–Литтлвуда на случай голоморфных функций из многомерных классов Харди $H^p(B^n)$ в единичном шаре $B^n \subset \mathbb{C}^n$ и в ограниченных симметрических областях из $\mathbb{C}^n$.

Т.Флетт (1970) доказывал неравенства (7)–(9) для интегралов типа интеграла Пуассона от функций из L^p , $p > 1$, на некоторых локально компактных группах и применял их, в частности, к интегралам Пуассона и Гаусса–Вейерштрасса (свертки с ядром $t^{-n} \exp(-|x|^2 t^{-2})$) функций из $L^p(\mathbb{R}^n)$ при $p > 1$, а также при $p > 0$ к функциям на $\mathbb{R}_+^{n+1}$, для которых некоторая степень $k \leq p$ субгармонична.

Общая форма теоремы 1 была получена нами (2024).

(8) выводилось из (7), а (9) — из (8) с помощью аналога интерполяционной теоремы Марцинкевича.

Общая форма теоремы 1 была получена нами (2024).
(8) выводилось из (7), а (9) — из (8) с помощью аналога
интерполяционной теоремы Марцинкевича.

Интерполяция операторов в классах $\mathcal{H}^p$.

Пусть (Y, ν) — еще одно множество с σ -конечной мерой ν . Оператор T , определенный на некотором множестве в $\mathcal{H}^0(X)$, со значениями в $L^0(Y)$ называется квазисубаддитивным, если существует такое число $K_4 = K_4(T) > 0$, что справедливо неравенство

$$|T(u + v)| \leq K_4(|Tu| + |Tv|),$$

если дополнительно

$$|T(\lambda u)| = |\lambda||Tu|,$$

то T называется квазилинейным.

Теорема 2

Пусть $0 < p_0 \neq p_1 \leq \infty$, $0 < q_0 \neq q_1 \leq \infty$, квазилинейный оператор $T : \mathcal{H}^{p_0}(\mathbf{X}) + \mathcal{H}^{p_1}(\mathbf{X}) \rightarrow L^0(Y)$ удовлетворяет условиям: существуют такие положительные постоянные M_0 и M_1 , что для всех $\lambda > 0$ и $k = 0, 1$ выполнены неравенства

$$\nu\{|Tu| > \lambda\} \leq \left(\frac{M_k}{\lambda} \|u\|_{\mathcal{H}^{p_k}(\mathbf{X})} \right)^{q_k}, \quad u \in \mathcal{H}^{p_k}(\mathbf{X}),$$

Пусть $\theta \in (0, 1)$,

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Тогда при $0 < r < \infty$ для всех функций $u \in \mathcal{H}^{p,r}(\mathbf{X})$ выполнено неравенство

$$\|Tu\|_{L^{q,r}(Y)} \lesssim_{K_4, p_0, p_1, q_0, q_1, r, \theta} M_0^{1-\theta} M_1^\theta \|u\|_{\mathcal{H}^{p,r}(\mathbf{X})}.$$

Неравенства Харди–Литтлвуда для классов типа Харди–Лоренца.

Теорема 3

Пусть выполнено условие (6) и $0 < p < q \leq \infty$, $0 < s \leq \infty$.

Тогда для любой функции $u \in \mathcal{H}^{p,\infty}(\mathbf{X})$ справедливы неравенства

$$|u(x, t)| \lesssim_{K_2, p} t^{-n/p} \|\mathcal{N}u\|_{L^{p,\infty}(X)}, \quad x \in X, \quad t \in I, \quad (10)$$

$$\|u_t\|_{L^{q,s}(X)} \lesssim_{K_2, p, q, s} t^{-n(1/p-1/q)} \|\mathcal{N}u\|_{L^{p,\infty}(X)}, \quad t \in I. \quad (11)$$

Теорема 3

Пусть выполнено условие (6) и $0 < p < q \leq \infty$, $0 < s \leq \infty$.

Тогда для любой функции $u \in \mathcal{H}^{p,\infty}(\mathbf{X})$ справедливы неравенства

$$|u(x, t)| \lesssim_{K_2, p} t^{-n/p} \|\mathcal{N}u\|_{L^{p,\infty}(X)}, \quad x \in X, \quad t \in I, \quad (10)$$

$$\|u_t\|_{L^{q,s}(X)} \lesssim_{K_2, p, q, s} t^{-n(1/p-1/q)} \|\mathcal{N}u\|_{L^{p,\infty}(X)}, \quad t \in I. \quad (11)$$

Теорема 3

Пусть выполнено условие (6) и $0 < p < q \leq \infty$, $0 < s \leq \infty$.

Тогда для любой функции $u \in \mathcal{H}^{p,\infty}(\mathbf{X})$ справедливы неравенства

$$|u(x, t)| \lesssim_{K_2, p} t^{-n/p} \|\mathcal{N}u\|_{L^{p,\infty}(X)}, \quad x \in X, t \in I, \quad (10)$$

$$\|u_t\|_{L^{q,s}(X)} \lesssim_{K_2, p, q, s} t^{-n(1/p-1/q)} \|\mathcal{N}u\|_{L^{p,\infty}(X)}, \quad t \in I. \quad (11)$$

Так как при фиксированном $p > 0$ пространства Лоренца $L^{p,r}(X)$ расширяются с ростом $r > 0$, то из теоремы вытекают неравенства

$$|u(x, t)| \lesssim t^{-n/p} \|\mathcal{N}u\|_{L^{p,r}(X)}, \quad x \in X, \quad t \in I, \quad (12)$$

$$\|u_t\|_{L^{q,s}(X)} \lesssim t^{-n(1/p-1/q)} \|\mathcal{N}u\|_{L^{p,r}(X)}, \quad t \in I, \quad (13)$$

в которых $u \in \mathcal{H}^{p,r}(\mathbf{X})$, $0 < p < q \leq \infty$, $0 < r, s \leq \infty$.

Для интегралов Пуассона функций из $L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$, $p > 1$, неравенства (10) и (11) из теоремы 3 доказал Т.Флетт (1970).

Так как при фиксированном $p > 0$ пространства Лоренца $L^{p,r}(X)$ расширяются с ростом $r > 0$, то из теоремы вытекают неравенства

$$|u(x, t)| \lesssim t^{-n/p} \|\mathcal{N}u\|_{L^{p,r}(X)}, \quad x \in X, \quad t \in I, \quad (12)$$

$$\|u_t\|_{L^{q,s}(X)} \lesssim t^{-n(1/p-1/q)} \|\mathcal{N}u\|_{L^{p,r}(X)}, \quad t \in I, \quad (13)$$

в которых $u \in \mathcal{H}^{p,r}(\mathbf{X})$, $0 < p < q \leq \infty$, $0 < r, s \leq \infty$.

Для интегралов Пуассона функций из $L^{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$, $p > 1$, неравенства (10) и (11) из теоремы 3 доказал Т.Флетт (1970).

В третьем неравенстве

$$\left(\int_0^{t_0} \left[t^{n(1/p-1/q)} \|u_t\|_{L^q(X)} \right]^l \frac{dt}{t} \right)^{1/l} \lesssim \|Nu\|_{L^p(X)}$$

$0 < p < q \leq \infty$, $p \leq l$, в правой части нельзя поставить

$$\|Nu\|_{L^{p,r}(X)} \quad \text{вместо} \quad \|Nu\|_{L^p(X)} = \|Nu\|_{L^{p,p}(X)}$$

при любом $p < r$.

Однако, изменив область для l , можно получить и третье неравенство.

В третьем неравенстве

$$\left(\int_0^{t_0} \left[t^{n(1/p-1/q)} \|u_t\|_{L^q(X)} \right]^l \frac{dt}{t} \right)^{1/l} \lesssim \|Nu\|_{L^p(X)}$$

$0 < p < q \leq \infty$, $p \leq l$, в правой части нельзя поставить

$$\|Nu\|_{L^{p,r}(X)} \quad \text{вместо} \quad \|Nu\|_{L^p(X)} = \|Nu\|_{L^{p,p}(X)}$$

при любом $p < r$.

Однако, изменив область для l , можно получить и третье неравенство.

Теорема 4

Пусть выполнено условие (6) и $0 < p < q \leq \infty$, $0 < r \leq l < \infty$, $0 < s \leq \infty$.

Тогда для любой функции $u \in \mathcal{H}^{p,r}(\mathbf{X})$ справедливы неравенства

$$\left(\int_0^{t_0} \left[t^{n(1/p-1/q)} \|u_t\|_{L^{q,s}(X)} \right]^l \frac{dt}{t} \right)^{1/l} \lesssim_{K_{2,p,q,r,l}} \|\mathcal{N}u\|_{L^{p,r}(X)}. \quad (14)$$

Для интегралов Пуассона функций из $L^{p,r}(\mathbb{R}^n)$, $p, r > 1$, утверждение теоремы 4 доказал Т.Флетт (1970).

Ограничение $r \leq l$ в теореме 4 является точным — для любого $l < r$ ее утверждение теряет силу.

Теорема 4

Пусть выполнено условие (6) и $0 < p < q \leq \infty$, $0 < r \leq l < \infty$, $0 < s \leq \infty$.

Тогда для любой функции $u \in \mathcal{H}^{p,r}(\mathbf{X})$ справедливы неравенства

$$\left(\int_0^{t_0} \left[t^{n(1/p-1/q)} \|u_t\|_{L^{q,s}(X)} \right]^l \frac{dt}{t} \right)^{1/l} \lesssim_{K_{2,p,q,r,l}} \|\mathcal{N}u\|_{L^{p,r}(X)}. \quad (14)$$

Для интегралов Пуассона функций из $L^{p,r}(\mathbb{R}^n)$, $p, r > 1$, утверждение теоремы 4 доказал Т.Флетт (1970).

Ограничение $r \leq l$ в теореме 4 является точным — для любого $l < r$ ее утверждение теряет силу.

Теорема 4

Пусть выполнено условие (6) и $0 < p < q \leq \infty$, $0 < r \leq l < \infty$, $0 < s \leq \infty$.

Тогда для любой функции $u \in \mathcal{H}^{p,r}(\mathbf{X})$ справедливы неравенства

$$\left(\int_0^{t_0} \left[t^{n(1/p-1/q)} \|u_t\|_{L^{q,s}(X)} \right]^l \frac{dt}{t} \right)^{1/l} \lesssim_{K_{2,p,q,r,l}} \|\mathcal{N}u\|_{L^{p,r}(X)}. \quad (14)$$

Для интегралов Пуассона функций из $L^{p,r}(\mathbb{R}^n)$, $p, r > 1$, утверждение теоремы 4 доказал Т.Флетт (1970).

Ограничение $r \leq l$ в теореме 4 является точным — для любого $l < r$ ее утверждение теряет силу.

Дробные интегралы в классах типа Харди–Лоренца.

Пусть $k_\alpha \in L^1(0, t_0)$, тогда в силу неравенства (10) на всех классах $\mathcal{H}^{p,r}(\mathbf{X})$, $0 < p, r \leq \infty$, определен интегральный оператор с ядром k_α :

$$I_\alpha u(x, t) := \int_0^{t_0} k_\alpha(s) u(x, t + s) ds, \quad (x, t) \in \mathbf{X} \quad (15)$$

(считаем $u(x, s) = 0$ при $s > t_0$).

Индекс α у оператора I_α и его ядра k_α показывает, что мы рассматриваем операторы типа дробного интегрирования порядка $\alpha > 0$, что формально будет закрепляться следующим условием: существует такое число $K_3 = K_3(\alpha)$, что

$$\int_0^t |k_\alpha(s)| ds \leq K_3 t^\alpha, \quad 0 < t \leq t_0. \quad (16)$$

Пусть $k_\alpha \in L^1(0, t_0)$, тогда в силу неравенства (10) на всех классах $\mathcal{H}^{p,r}(\mathbf{X})$, $0 < p, r \leq \infty$, определен интегральный оператор с ядром k_α :

$$I_\alpha u(x, t) := \int_0^{t_0} k_\alpha(s) u(x, t + s) ds, \quad (x, t) \in \mathbf{X} \quad (15)$$

(считаем $u(x, s) = 0$ при $s > t_0$).

Индекс α у оператора I_α и его ядра k_α показывает, что мы рассматриваем операторы типа дробного интегрирования порядка $\alpha > 0$,

что формально будет закрепляться следующим условием: существует такое число $K_3 = K_3(\alpha)$, что

$$\int_0^t |k_\alpha(s)| ds \leq K_3 t^\alpha, \quad 0 < t \leq t_0. \quad (16)$$

Пусть $k_\alpha \in L^1(0, t_0)$, тогда в силу неравенства (10) на всех классах $\mathcal{H}^{p,r}(\mathbf{X})$, $0 < p, r \leq \infty$, определен интегральный оператор с ядром k_α :

$$I_\alpha u(x, t) := \int_0^{t_0} k_\alpha(s) u(x, t + s) ds, \quad (x, t) \in \mathbf{X} \quad (15)$$

(считаем $u(x, s) = 0$ при $s > t_0$).

Индекс α у оператора I_α и его ядра k_α показывает, что мы рассматриваем операторы типа дробного интегрирования порядка $\alpha > 0$,

что формально будет закрепляться следующим условием: существует такое число $K_3 = K_3(\alpha)$, что

$$\int_0^t |k_\alpha(s)| ds \leq K_3 t^\alpha, \quad 0 < t \leq t_0. \quad (16)$$

Теорема 5

Пусть выполнено условие (6), $0 < p < \infty$, $0 < \alpha < n/p$, $1/q = 1/p - \alpha/n$, $0 < r \leq \infty$ и ядро оператора (15) удовлетворяет условию (16).

Тогда справедливы неравенства

$$\|\mathcal{N}(I_\alpha u)\|_{L^{q,r/p}(X)} \lesssim \|\mathcal{N}u\|_{L^{p,\infty}(X)}^{\alpha p/n} \|\mathcal{N}u\|_{L^{p,r/q}(X)}^{1-\alpha p/n}, \quad u \in \mathcal{H}^{p,r/q}(\mathbf{X}), \quad (17)$$

$$\|\mathcal{N}(I_\alpha u)\|_{L^{q,r}(X)} \lesssim \|\mathcal{N}u\|_{L^{p,r}(X)}, \quad u \in \mathcal{H}^{p,r}(\mathbf{X}) \quad (18)$$

($\lesssim$ зависят только от K_2 , K_3 , p , α и r).

Класс Харди–Лоренца $H^{p,r}(B^n)$, $0 < p, r \leq \infty$, определим как подпространство в $\mathcal{H}^{p,r}(B^n)$, состоящее из голоморфных функций $u : B^n \rightarrow \mathbb{C}$.

Голоморфная функция в B^n разлагается в ряд по однородным многочленам

$$u(z) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m(z), \quad f_m(sz) = s^m f_m(z),$$

сходимость равномерная на компактах в B^n .

Класс Харди–Лоренца $H^{p,r}(B^n)$, $0 < p, r \leq \infty$, определим как подпространство в $\mathcal{H}^{p,r}(B^n)$, состоящее из голоморфных функций $u : B^n \rightarrow \mathbb{C}$.

Голоморфная функция в B^n разлагается в ряд по однородным многочленам

$$u(z) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m(z), \quad f_m(sz) = s^m f_m(z),$$

сходимость равномерная на компактах в B^n .

дробные интегралы Римана–Лиувилля

$$R_{\alpha}u(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+\alpha+1)} f_m(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} u(sz) ds;$$

дробные интегралы Адамара

$$A_{\alpha}u(z) = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)^{-\alpha} f_m(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{s}\right)^{\alpha-1} u(sz) ds;$$

дробные интегралы Коши–Сеге

$$\begin{aligned} C_{\alpha}u(z) &= \int_{\partial B^n} \frac{u^*(\zeta)}{(1 - \langle z, \zeta \rangle)^{n-\alpha}} d\sigma(\zeta) = \\ &= \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{n-\alpha-1} u(sz) ds \quad 0 < \alpha < n. \end{aligned}$$

дробные интегралы Римана–Лиувилля

$$R_{\alpha}u(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+\alpha+1)} f_m(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} u(sz) ds;$$

дробные интегралы Адамара

$$A_{\alpha}u(z) = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)^{-\alpha} f_m(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{s}\right)^{\alpha-1} u(sz) ds;$$

дробные интегралы Коши–Сеге

$$\begin{aligned} C_{\alpha}u(z) &= \int_{\partial B^n} \frac{u^*(\zeta)}{(1 - \langle z, \zeta \rangle)^{n-\alpha}} d\sigma(\zeta) = \\ &= \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{n-\alpha-1} u(sz) ds \quad 0 < \alpha < n. \end{aligned}$$

дробные интегралы Римана–Лиувилля

$$R_{\alpha}u(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+\alpha+1)} f_m(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} u(sz) ds;$$

дробные интегралы Адамара

$$A_{\alpha}u(z) = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)^{-\alpha} f_m(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{s}\right)^{\alpha-1} u(sz) ds;$$

дробные интегралы Коши–Сеге

$$\begin{aligned} C_{\alpha}u(z) &= \int_{\partial B^n} \frac{u^*(\zeta)}{(1 - \langle z, \zeta \rangle)^{n-\alpha}} d\sigma(\zeta) = \\ &= \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n-\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{n-\alpha-1} u(sz) ds \quad 0 < \alpha < n. \end{aligned}$$

Потенциалы Рисса

$$I_\alpha u(x, t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty s^{\alpha-1} u(x, t + s) ds, \quad 0 < \alpha < n,$$

возникают как свертки (по пространственной переменной) гармонических функций в $\mathbb{R}_+^{n+1}$ с ядрами $|x|^{\alpha-n}$.

Модифицированные потенциалы Бесселя

$$J_\alpha^P u(x, t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty s^{\alpha-1} e^{-s} u(x, t + s) ds$$

определяются как свертки гармонических функций в $\mathbb{R}_+^{n+1}$ с ядром, преобразование Фурье которого равно $(1 + |\xi|)^{-\alpha}$.

Потенциалы Рисса

$$I_\alpha u(x, t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty s^{\alpha-1} u(x, t+s) ds, \quad 0 < \alpha < n,$$

возникают как свертки (по пространственной переменной) гармонических функций в $\mathbb{R}_+^{n+1}$ с ядрами $|x|^{\alpha-n}$.

Модифицированные потенциалы Бесселя

$$J_\alpha^P u(x, t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty s^{\alpha-1} e^{-s} u(x, t+s) ds$$

определяются как свертки гармонических функций в $\mathbb{R}_+^{n+1}$ с ядром, преобразование Фурье которого равно $(1 + |\xi|)^{-\alpha}$.

Рассмотрим далее классы Харди–Лоренца, связанные с уравнением теплопроводности: пусть $W(x) = e^{-|x|^2/4}$ (тепловое ядро Гаусса–Вейерштрасса) и

$$H_{heat}^{p,r}(\mathbb{R}_+^{n+1}) := \{u(x,t) = f * W_{\sqrt{t}}(x) : f \in H^{p,r}(\mathbb{R}^n)\}.$$

Свертки $f * W_{\sqrt{t}}$ называют обычно температурами.

Потенциал Бесселя порядка $\alpha > 0$ для температур

$$J_\alpha^W u(x,t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)} \int_0^\infty s^{\alpha/2-1} e^{-s} u(x, t+s) ds$$

определяется как свертка температур с ядром Бесселя G_α , $\widehat{G}_\alpha(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{-\alpha/2}$. Если $u \in H_{heat}^{p,r}(\mathbb{R}_+^{n+1})$, то функция $u(x, t^2)$ принадлежит $\mathcal{H}^{p,r}(\mathbb{R}_+^{n+1})$.

Рассмотрим далее классы Харди–Лоренца, связанные с уравнением теплопроводности: пусть $W(x) = e^{-|x|^2/4}$ (тепловое ядро Гаусса–Вейерштрасса) и

$$H_{heat}^{p,r}(\mathbb{R}_+^{n+1}) := \{u(x,t) = f * W_{\sqrt{t}}(x) : f \in H^{p,r}(\mathbb{R}^n)\}.$$

Свертки $f * W_{\sqrt{t}}$ называют обычно температурами. Потенциал Бесселя порядка $\alpha > 0$ для температур

$$J_\alpha^W u(x,t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)} \int_0^\infty s^{\alpha/2-1} e^{-s} u(x, t+s) ds$$

определяется как свертка температур с ядром Бесселя G_α , $\widehat{G}_\alpha(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{-\alpha/2}$. Если $u \in H_{heat}^{p,r}(\mathbb{R}_+^{n+1})$, то функция $u(x, t^2)$ принадлежит $\mathcal{H}^{p,r}(\mathbb{R}_+^{n+1})$.

Спасибо за внимание!