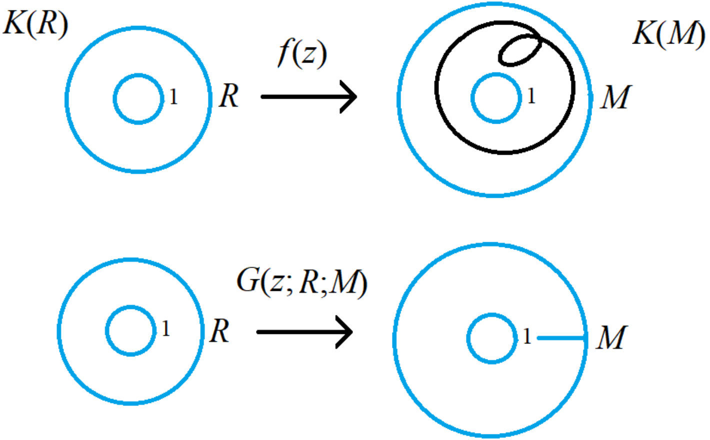
XVII Международная Казанская школа-конференция
«Теория функций, ее приложения и смежные вопросы»
Казань, 23 - 28 августа 2025 г.

Ограниченные голоморфные функции в круговом кольце

В.Н. Дубинин

Владивосток, ИПМ ДВО РАН
e-mail: dubinin@iam.dvo.ru

Класс функций $\mathscr{R}(R, M)$



Экстремальная функция $G(z; R, M)$

Функция $G(z; R, M)$, $R < M$, представима через функции Гретша:

$$G(z; R, M) = G^{-1}(G(z; R); M),$$

где

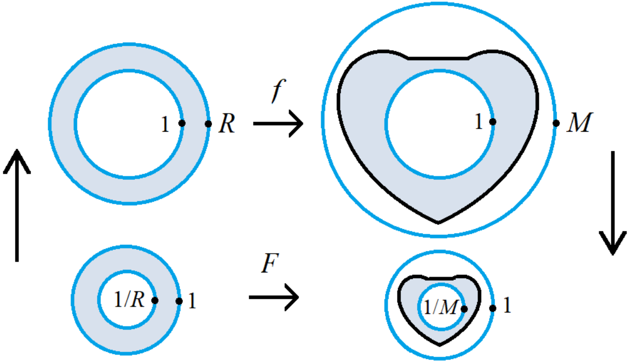
$$G(z; M) = \tau \mathrm{sn}^2\left(\left(\frac{i}{\pi}\log(zR) + 1\right)\mathbf{K}(\tau); \tau\right)$$

$\tau = \tau(R) = 1/P(R)$ – решение уравнения

$$\log R = \frac{\pi}{2}\frac{\mathbf{K}(\sqrt{1-\tau^2})}{\mathbf{K}(\tau)},$$

$\mathbf{K}(\tau)$ – полный эллиптический интеграл первого рода с модулем τ, $sn(\cdot; \tau)$ – эллиптическая функция Якоби.

Однолистные в круге функции



$$f(\zeta R)/M \to F, \quad F(0) = 0, \quad |F'(0)| = R/M, \quad R \to \infty, \; M \to \infty.$$

Граничное искажение

Теорема 1. *Предположим, что однолистная функция f класса $\mathscr{R}(R, M)$ конформна в некоторых различных точках z_k окружности $|z| = R$, $|f(z_k)| = M$, $k = 1, ..., n$. Тогда для любых вещественных δ_k, $k = 1, ..., n$, справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{n} \delta_k^2 \log \frac{r(K(R^2), R)|f'(z_k)|}{r(K(M^2), M)} \geq$$

$$\geq \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n} \delta_k \delta_l [g_{K(M^2)}(f(z_k), f(z_l)) - g_{K(R^2)}(z_k, z_l)],$$

где $r(B, z)$ – внутренний радиус области B относительно точки z, а $g_B(z, \zeta)$ – функция Грина этой области. Равенство достигается, например, для функции f, отображающей кольцо $K(R)$ на кольцо $K(M)$ с разрезами по вещественной оси, в случае, когда совокупности $\{z_k\}_{k=1}^{n}$, $\{f(z_k)\}_{k=1}^{n}$ симметричны относительно этой оси, и $\delta_k = \delta_l$ при $z_k = \overline{z}_l$, $1 \leq k, l \leq n$.

Функция Грина

Одно из представлений функции Грина кольца $K(R)$, $R < \infty$, с полюсом в положительной точке ζ:

$$g_{K(R)}(re^{i\theta}, \zeta) = -\frac{\log r}{\log R} \log \zeta - \log \left| \frac{\zeta - re^{i\theta}}{1 - \zeta re^{i\theta}} \right| -$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{R^{-n}}{n} \frac{\zeta^n - \zeta^{-n}}{R^n - R^{-n}} (r^n - r^{-n}) \cos n\theta.$$

Неподвижные граничные точки

Следствие. *Пусть F – голоморфная и однолистная функция в круге $|z| < 1$, удовлетворяющая условиям $F(0) = 0$ и $|F(z)| < 1$ при $|z| < 1$. Предположим, что F имеет n граничных неподвижных точек z_k, т.е. угловые пределы $F(z_k) = z_k$, $|z_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$. Тогда*

$$\prod_{k=1}^{n} |F'(z_k)|^{\delta_k^2} \geq |F'(0)|^{-(1/2)(\sum_{k=1}^{n} \delta_k)^2}.$$

Случай $n = 1: \ |F'(z)| \geq \dfrac{1}{\sqrt{|F'(0)|}}, \quad F(z) = z, \ |z| = 1.$

Cowen, Pommerenke (1982); Solynin (1993); Pommerenke, Vasil'ev (2000).

Неподвижные граничные точки

$$\prod_{k=1}^{n} |F'(z_k)|^{\delta_k^2} \geq |F'(0)|^{-(1/2)(\sum_{k=1}^{n}\delta_k)^2}.$$

Anderson, Vasil'ev (2008):

$$\prod_{k=1}^{n} |F'(z_k)|^{\alpha_k^2} \geq |F'(0)|^{-1/2}, \ \sum_{k=1}^{n}\alpha_k = 1, \ \alpha_k \geq 0, \ k = 1, \dots, n.$$

Cowen, Pommerenke (1982): $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\log|F'(z_k)|} \leq \frac{-2}{\log|f'(0)|}.$

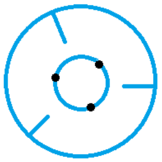
Contreras, Diaz-Madrigal, Vasil'ev (2007): $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} |F'(z_k)|^{\delta_k^2} \geq \frac{1}{|F'(z_n)|}.$

Без условия $F(0) = 0$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\delta_k = 1$, $\delta_k \geq 0$, $k = 1, \dots, n-1$, z_n – притягивающая точка ($|F'(z_n)| < 1$).

Теорема 2. *Для однолистной функции f класса $\mathscr{R}(R, M)$ при любом вещественном θ и $n \geq 1$ справедлива оценка*

$$\sqrt[n]{\left|\prod_{k=1}^{n} f'\left(exp\left(i\left(\theta + \frac{2\pi k}{n}\right)\right)\right)\right|} \leq G'\left(exp\left(\frac{i\pi}{n}\right); n, R, M\right).$$

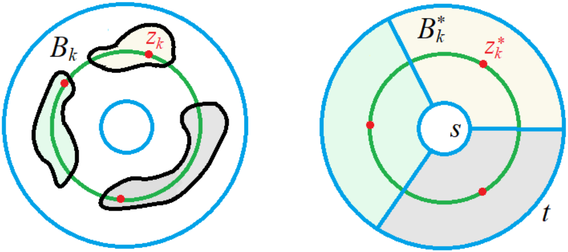
Равенство достигается при $f(z) = G(z; n, R, M)$ и $\theta = \pi/n$. Здесь $G(z; n, R, M) = \sqrt[n]{G(z^n; R^n, M^n)}$, $\sqrt[n]{1} = 1$.



Экстремальное разбиение

Теорема (Д, 1978). *При любых* $0 \le s < 1 < t \le \infty$, $|z_k| = 1$, $z_k \in B_k$, $k = 1, \ldots, n$, $n \ge 2$, $B_k \bigcap B_l = \emptyset$, $k \ne l$, $k, l = 1, \ldots, n$, *справедливо неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n} r(B_k, z_k) \le \prod_{k=1}^{n} r(B_k^*, z_k^*).$$



М.А. Лаврентьев (1934), $s = 1/t = 0$, $n = 2$.
Г.М. Голузин (1951), $s = 1/t = 0$, $n = 3$.

Теорема 3. *Если однолистная функция f принадлежит классу $\mathscr{R}(R, M)$ и если для некоторого вещественного числа θ и точек $z_k, k = 1, ..., n,$ расположенных на окружности $|z| = 1$, выполняется $f(z_k) = exp(i(\theta + 2\pi k/n)), k = 1, ..., n,$ то*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|f'(z_k)| \geq G'(1; n, R, M).$$

Равенство достигается в случае $f(z) = e^{i\theta}G(z; n, R, M)$ и для точек

$$z_k^* = exp\left(\frac{i2\pi k}{n}\right),\ k = 1, ..., n.$$

Неравенства для модулей функций

Из принципа максимума модуля для функции f класса $\mathscr{R}(R, M)$ вытекает неравенство

$$|f(z)| \leq \frac{M}{R}|z|, \ z \in K(R).$$

Равенство достигается только в случае $R = M, f(z) = az, |a| = 1$.

Теорема Адамара о трех кругах даёт более точное неравенство:

$$|f(z)| \leq |z|^{\frac{\log M}{\log R}}, \ z \in K(R), \ f \in \mathscr{R}(R, M).$$

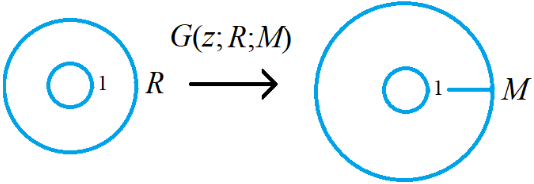
Равенство достигается только при $M = R^n, f(z) = az^n, \ |a| = 1$, где n - натуральное число.
Точная верхняя оценка $|f(z)|$ в классе $\mathscr{R}(R, M)$ при $M \neq R^n$ неизвестна.

Слабо однолистные функции

Теорема (И.П. Митюк, 1985). *Если f – слабо однолистная функция класса $\mathscr{R}(R, M)$, $R < M$, то для любой точки $z \in K(R)$ выполняется*

$$|G(|z|; R, M)| \leq |f(z)| \leq |G(-|z|; R, M)|.$$

Равенство возможно только в случае $f(z) = aG(bz; R, M)$, $|a| = |b| = 1$.



Производная Шварца

$$S_f(z) = \left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2.$$

Пусть f – голоморфное отображение круга $|z| < 1$ в себя, и пусть

$$f(z)=1+f'(1)(z-1)+\frac{f''(1)(z-1)^2}{2}+\frac{f'''(1)(z-1)^3}{6}+o((z-1)^3), z\to 1.$$

Bourdon, Shapiro (1997): $f'(1) = 1,\ \mathrm{Re}\, f''(1) = 0 \Rightarrow\ \mathrm{Re}\, S_f(1) \le 0.$

Touraso, Vlacci (2001): $\mathrm{Re}\, f''(1) = f'(1)(f'(1) - 1) \Rightarrow\ \mathrm{Re}\, S_f(1) \le 0$ и $\mathrm{Re}\, S_f(1) = 0 \Leftrightarrow f$ – дробно-линейный автоморфизм круга $|z| < 1$.

Burns, Krantz (1994): $f'(1) = 1,\ f''(1) = f'''(1) = 0 \Rightarrow\ f(z) \equiv z.$

Производная Шварца

Теорема 4. *Пусть функция f принадлежит классу $\mathscr{R}(R, M)$, и пусть в граничной точке $z = -R$ существуют все односторонние по отрезку $[-R, -1]$ производные функции f до третьего порядка включительно, причем $f(-R) = -M, f'(-R) \neq 0$,*

$$\mathrm{Re}\, f''(-R) = f'(-R)\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{M} f'(-R)\right).$$

Тогда для производной Шварца функции f по отрезку $[-R, -1]$ справедливо неравенство

$$\mathrm{Re}\, S_f(-R) + S_{G(\cdot;M)}(-1)\frac{(f'(-R))^2}{M^2} \leq \frac{S_{G(\cdot;R)}(-1)}{R^2}.$$

Равенство выполняется при $R = M$.

Производная Шварца

Теорема 5. *Пусть в условиях теоремы 4 функция f слабо однолистная в кольце $K(R)$ и принимает вещественные значения на некотором интервале $(-R, \sigma)$, $-R < \sigma < -1$. Тогда*

$$\operatorname{Re} S_f(-R) \leq \frac{S_{H_M}(1)}{(H_M'(1))^2}(f'(-R))^2 - \frac{S_{H_R}(1)}{(H_R'(1))^2}.$$

Равенство имеет место для функции $f(z) = G(z; R, M)$.

Следствие.

$$\operatorname{Re} F''(-1) = F'(-1)(1 - F'(-1)) \Rightarrow$$

$$\operatorname{Re} S_F(-1) \leq \frac{3}{4}(1 - (F'(-1))^2).$$

Равенство выполняется для функции Пика.

Thank you for attention!