КВАЗИКОНФОРМНЫЙ АНАЛИЗ НА РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ

С. К. Водопьянов

Институт математики им. С. Л. СОБОЛЕВА, Новосибирск, РОССИЯ

XVII Международная Казанская школа-конференция «ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ, ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ» (23 – 28 августа 2025 г.)
Казанский (Приволжский) федеральный университет

История вопроса

$\varphi : D \to D'$ кв-но, если $\varphi \in W^1_{n,\mathrm{loc}}(D)$ и $|D\varphi(x)|^n \le KJ(x,\varphi)$ **[1]**

История вопроса

$\varphi : D \to D'$ кв-но, если $\varphi \in W^1_{n,\mathrm{loc}}(D)$ и $|D\varphi(x)|^n \leq KJ(x,\varphi)$ **[1]**

Классический результат (60-70 годы XX века [1].)

Гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$ *областей в* $\mathbb{R}^n$ *квазиконформен тогда и только тогда, когда оператор композиции*

$\varphi^* : L^1_n(D') \to L^1_n(D)$, $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$, *где* $f \in L^1_n(D')$, *ограничен.*

История вопроса

$\varphi : D \to D'$ кв-но, если $\varphi \in W^1_{n,\mathrm{loc}}(D)$ и $|D\varphi(x)|^n \le KJ(x,\varphi)$ **[1]**

Классический результат (60-70 годы XX века [1].)

Гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$ областей в $\mathbb{R}^n$ квазиконформен тогда и только тогда, когда оператор композиции

$\varphi^* : L^1_n(D') \to L^1_n(D)$, $\varphi^*(f) = f\circ\varphi$, *где* $f \in L^1_n(D')$, *ограничен.*

Расширение задачи (80-90 годы XX века.)

Описать свойства гомеоморфизмов $\varphi : D \to D'$ областей $D, D' \subset \mathbb{R}^n$, для которых оператор композиции

$$\varphi^* : L^1_p(D') \cap \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(D') \to L^1_q(D), \quad \varphi^*(f) = \varphi \circ f, \tag{1}$$

ограничен при фиксированных $1 \le q \le p < \infty$.

Решение обобщенной задачи для $1 \leq q \leq p < \infty$.

Теорема 1 [2, 3]. *Гомеоморфизм* $\varphi : D \to D'$ *областей* $D, D' \subset \mathbb{R}^n$ *индуцирует ограниченный оператор композиции* (1) *тогда и только тогда, когда*

1) $\varphi^* : W^1_{q,\mathrm{loc}}(D)$;

2) φ *имеет конечное искажение:* $D\varphi(x) = 0$ *п. вс. на множестве* $Z = \{x \in D \mid \det D\varphi(x) = 0\}$ *нулей якобиана*;

3) *операторная функция внешнего искажения*

$$D \ni x \mapsto K_p(x, \varphi) = \begin{cases} \dfrac{|D\varphi(x)|}{|\det D\varphi(x)|^{\frac{1}{p}}}, & \text{если } \det D\varphi(x) \neq 0, \\ 0, & \text{если } \det D\varphi(x) = 0, \end{cases}$$

принадлежит $L_\sigma(D)$, *где* $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$, *если* $1 \leq q < p < \infty$, *и* $\sigma = \infty$, *если* $q = p$;

4) $\|K_p(\cdot, \varphi) \mid L_\sigma(\Omega)\| = \|\varphi^*\| = \|K_p(\cdot, \varphi) \mid L_\sigma(\Omega)\|$. (2)

Равенство в левой части (2)

Теорема 1 доказана в [2] в 1998 году с той разницей, что вместо равенства в левой части было установлено неравенство $\alpha_{q,p} \cdot \|K_p(\cdot, \varphi) \mid L_\sigma(\Omega)\| \leq \|\varphi^*\|$, где $\alpha_{q,p} \in (0, 1]$.
Свойство $\alpha_{q,p} = 1$ установлено в [3] в 2022 году.

Равенство в левой части (2)

Теорема 1 доказана в [2] в 1998 году с той разницей, что вместо равенства в левой части было установлено неравенство $\alpha_{q,p} \cdot \|K_p(\cdot, \varphi) \mid L_\sigma(\Omega)\| \leq \|\varphi^*\|$, где $\alpha_{q,p} \in (0, 1]$.
Свойство $\alpha_{q,p} = 1$ установлено в [3] в 2022 году.

Теорема 1 доказана также и на группе Карно [1] кроме равенства в левой части (2). (Равенство в левой части (2) на группе Карно установлено в [4] в 2025 году.)

Равенство в левой части (2)

Теорема 1 доказана в [2] в 1998 году с той разницей, что вместо равенства в левой части было установлено неравенство $\alpha_{q,p} \cdot \|K_p(\cdot, \varphi) \mid L_\sigma(\Omega)\| \le \|\varphi^*\|$, где $\alpha_{q,p} \in (0, 1]$.
Свойство $\alpha_{q,p} = 1$ установлено в [3] в 2022 году.

Теорема 1 доказана также и на группе Карно [1] кроме равенства в левой части (2). (Равенство в левой части (2) на группе Карно установлено в [4] в 2025 году.)

Аналог Теоремы 1 доказан также и на римановых пространствах [5, 6] в 2024–25 гг. (Равенство в левой части (2) на римановых пространствах установлено в [6] в 2025 году.)

В работе [5] 2024 г. вместо $\|K_p(\cdot,\varphi) \mid L_\sigma(\Omega)\| = \|\varphi^*\|$

было получено неравенство

$$\alpha_{q,p}\|K_p(\cdot,\varphi) \mid L_\sigma(\Omega)\| \leq \|\varphi^*\| = \|K_p(\cdot,\varphi) \mid L_\sigma(\Omega)\|,$$

где $\alpha_{q,p} = (2n\mathcal{D}^{\frac{1}{q}})^{-1}$, а $\mathcal{D} = \sup\limits_{y_0\in\Omega'} \varlimsup\limits_{r\to 0} \frac{\nu(B(y_0;2r))}{\nu(B(y_0;r))} < \infty$.

В работе [5] 2024 г. вместо $\|K_p(\cdot,\varphi) \mid L_\sigma(\Omega)\| = \|\varphi^*\|$

было получено неравенство

$$\alpha_{q,p}\|K_p(\cdot,\varphi) \mid L_\sigma(\Omega)\| \leq \|\varphi^*\| = \|K_p(\cdot,\varphi) \mid L_\sigma(\Omega)\|,$$

где $\alpha_{q,p} = (2n\mathcal{D}^{\frac{1}{q}})^{-1}$, а $\mathcal{D} = \sup\limits_{y_0\in\Omega'} \varlimsup\limits_{r\to 0} \frac{\nu(B(y_0;2r))}{\nu(B(y_0;r))} < \infty$.

Глобальная ограниченность величины $\mathcal{D}$ сверху следует из

$$\nu(B(y;2r) \leq 2^n \exp(\sqrt{(n-1)K}2r)\nu(B(y;r))$$

при условии, что кривизна Риччи многообразия $\mathbb{M}'$ ограничена снизу: $Ric \geq -Kg$ для некоторого $K > 0$.
(Cheeger J., Gromov M., and Taylor M. 1982 [7])

Классы Соболева на римановых многообразиях

1) $(\mathbb{Y}, \rho)$ — метрическое пространство.
2) $\mathbb{M}$ — риманово пространство с тензором g и метрикой d.
3) $\Omega \subset \mathbb{M}$, $\dim \mathbb{M} \geq 2$, — область в римановом пространстве $\mathbb{M}$.
4) Отображение $\varphi : \Omega \to \mathbb{Y}$ *измеримое*, если прообраз $\varphi^{-1}(T)$ всякого борелевского множества $T \subset \mathbb{Y}$ измерим по Лебегу.

Классы Соболева на римановых многообразиях

1) $(\mathbb{Y}, \rho)$ — метрическое пространство.
2) $\mathbb{M}$ — риманово пространство с тензором g и метрикой d.
3) $\Omega \subset \mathbb{M}$, $\dim \mathbb{M} \geq 2$, — область в римановом пространстве $\mathbb{M}$.
4) Отображение $\varphi : \Omega \to \mathbb{Y}$ *измеримое*, если прообраз $\varphi^{-1}(T)$ всякого борелевского множества $T \subset \mathbb{Y}$ измерим по Лебегу.

5) Класс $L_p(\Omega; \mathbb{Y})$, $1 \leq p \leq \infty$, состоит из измеримых отображений $\varphi : \Omega \to \mathbb{Y}$, для которых

$$\|\rho(\varphi(\cdot), z) \mid L_p(\Omega)\| < \infty \quad \text{для любой точки } z \in \mathbb{Y}.$$

6) Пространство $\mathrm{Lip}(\mathbb{Y})$ состоит из липшицевых функций $u : \mathbb{Y} \to \mathbb{R}$ с конечной полунормой

$$\mathrm{Lip}(u) = \sup_{y_1 \neq y_2} \frac{|u(y_1) - u(y_2)|}{\rho(y_1, y_2)}.$$

Классы Соболева на римановых многообразиях

1) $\mathbb{M}$ — риманово пространство с тензором g и метрикой d.
2) $\Omega \subset \mathbb{M}$, $\dim \mathbb{M} \geq 2$, — область в римановом пространстве $\mathbb{M}$.
Определяем
3) риманову меру на $\mathbb{M}$,
4) пространство $L_p(\Omega)$ интегрируемых функций,
5) понятие градиента ∇f для функции $f \in C^1(\Omega)$,
5) понятие слабого (обобщенного) градиента,
6) понятие однородного пространства Соболева $L^1_q(\Omega)$ с конечной полунормой $\|f \mid L^1_q(\Omega)\| = \|\nabla f \mid L^1_q(\Omega)\|$,

Теорема 2. *Пусть* $\varphi : \Omega \to \mathbb{Y}$ *— гомеоморфизм,*
для которого оператор композиции

$$\varphi^* : \mathrm{Lip}(\mathbb{Y}) \to L^1_q(\Omega), \quad \varphi^*(u) = u \circ \varphi, \quad \textit{ограничен.}$$

Теорема 2. *Пусть* $\varphi : \Omega \to \mathbb{Y}$ — *гомеоморфизм,*

для которого оператор композиции

$$\varphi^* : \mathrm{Lip}(\mathbb{Y}) \to L^1_q(\Omega), \quad \varphi^*(u) = u \circ \varphi, \quad \textit{ограничен.}$$

Тогда φ *обладает следующими свойствами*:

1) *функция* $\Omega \ni x \mapsto [\varphi]_z(x) = \rho(\varphi(x), z)$ *принадлежит* $L^1_{q,\mathrm{loc}}(\Omega)$ *для любой точки* $z \in \mathbb{Y}$;

2) *существует функция* $g \in L_q(\Omega)$ *такая, что для каждой функции* $u \in \mathrm{Lip}(\mathbb{Y})$ *верно*

$$|\nabla(u \circ \varphi)|(x) \le g(x) \cdot \mathrm{Lip}(u) \quad \textit{для п. вс.} \quad x \in \Omega. \qquad (3)$$

Теорема 2. *Пусть $\varphi : \Omega \to \mathbb{Y}$ — гомеоморфизм,*

для которого оператор композиции

$$\varphi^* : \mathrm{Lip}(\mathbb{Y}) \to L^1_q(\Omega), \quad \varphi^*(u) = u \circ \varphi, \quad \textit{ограничен.}$$

Тогда φ обладает следующими свойствами:

1) *функция $\Omega \ni x \mapsto [\varphi]_z(x) = \rho(\varphi(x), z)$ принадлежит $L^1_{q,\mathrm{loc}}(\Omega)$ для любой точки $z \in \mathbb{Y}$;*

2) *существует функция $g \in L_q(\Omega)$ такая, что для каждой функции $u \in \mathrm{Lip}(\mathbb{Y})$ верно*

$$|\nabla(u \circ \varphi)|(x) \leq g(x) \cdot \mathrm{Lip}(u) \quad \textit{для п. вс.} \quad x \in \Omega. \tag{3}$$

Условия 1) и 2) совпадают с определением *класса Решетняка* $L^1_p(\Omega; \mathbb{Y})$ гомеоморфизмов $\varphi : \Omega \to \mathbb{Y}$ со значениями в метрическом пространстве $\mathbb{Y}$ [8], 1997.

Классы Решетняка на римановых многообразиях

Пусть $(\mathbb{Y}, \rho)$ — полное метрическое пространство, ρ — метрика на $\mathbb{Y}$, а Ω — область на римановом многообразии $\mathbb{M}$.

Определение 1, 1997. Отображение $\varphi : \Omega \to \mathbb{Y}$ принадлежит *классу Решетняка* $L^1_q(\Omega; \mathbb{Y})$ $(L^1_{q,\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{Y}))$, $1 \le q \le \infty$, если выполнены следующие условия:

Пусть $(\mathbb{Y}, \rho)$ — полное метрическое пространство, ρ — метрика на $\mathbb{Y}$, а Ω — область на римановом многообразии $\mathbb{M}$.

Определение 1, 1997. Отображение $\varphi : \Omega \to \mathbb{Y}$ принадлежит *классу Решетняка* $L^1_q(\Omega; \mathbb{Y})$ $(L^1_{q,\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{Y}))$, $1 \leq q \leq \infty$, если выполнены следующие условия:

1) функция $\mathbb{M} \ni x \to [\varphi]_z(x) = \rho(\varphi(x), z)$ принадлежит $L^1_{q,\mathrm{loc}}(\mathbb{M})$ для любой точки $z \in \mathbb{M}'$;
2) существует функция $g \in L_q(\Omega)$ $(g \in L_{q,\mathrm{loc}}(\Omega))$ такая, что для каждой функции $u \in \mathrm{Lip}(\mathbb{Y})$ верно

$$|\nabla(u \circ \varphi)|(x) \leq g(x) \cdot \mathrm{Lip}(u) \quad \text{для п. вс. } x \in \Omega. \qquad (3)$$

Классы Решетняка на римановых многообразиях

Пусть $(\mathbb{Y}, \rho)$ — полное метрическое пространство, ρ — метрика на $\mathbb{Y}$, а Ω — область на римановом многообразии $\mathbb{M}$.

Определение 1, 1997. Отображение $\varphi : \Omega \to \mathbb{Y}$ принадлежит *классу Решетняка* $L^1_q(\Omega; \mathbb{Y})$ $(L^1_{q,\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{Y}))$, $1 \leq q \leq \infty$, если выполнены следующие условия:

1) функция $\mathbb{M} \ni x \to [\varphi]_z(x) = \rho(\varphi(x), z)$ принадлежит $L^1_{q,\mathrm{loc}}(\mathbb{M})$ для любой точки $z \in \mathbb{M}'$;
2) существует функция $g \in L_q(\Omega)$ $(g \in L_{q,\mathrm{loc}}(\Omega))$ такая, что для каждой функции $u \in \mathrm{Lip}(\mathbb{Y})$ верно

$$|\nabla(u \circ \varphi)|(x) \leq g(x) \cdot \mathrm{Lip}(u) \quad \text{для п. вс. } x \in \Omega. \qquad (3)$$

$\nabla_0 \varphi \in L_q(\Omega)$ — *верхний градиент для* φ (т. е. наименьшая из функций $g \in L_q(\Omega)$, удовлетворяющих соотношению (3)).

Оператор композиции и аддитивная функция множества.

Для открытого множества $V \subset \mathbb{Y}$ положим

$$\Psi(V) = \sup\left\{\int\limits_{\Omega} |\nabla(u \circ \varphi)|(x)\, dx\right\},$$ где sup берется по всем

функциям $u \in \mathrm{Lip}(\mathbb{Y})$, $\mathrm{Lip}(u) \leq 1$, $\mathrm{dist}(\mathrm{spt}\, u, \mathbb{Y} \setminus V) > 0)$.

Функция $V \mapsto \Psi(V)$ *монотонная и конечно аддитивная*.
Существует конечная производная $\Psi'(x)$ п. вс. в Ω.

Теорема 3. *Гомеоморфизм $\varphi : \Omega \to \mathbb{Y}$ индуцирует $1 \leq q < \infty$, ограниченный оператор композиции*

$$\varphi^* : \mathrm{Lip}(\mathbb{Y}) \to L^1_q(\Omega), \quad \varphi^* u = u \circ \varphi \tag{4}$$

т. и т. т., когда он принадлежит классу Решетняка $L^1_q(\Omega; \mathbb{Y})$. Более того,

$$\int\limits_U |\nabla_0 \varphi|^q(x)\, dx = \Psi(\varphi(U))$$

для каждого открытого множества $U \subset \Omega$. В частности,

$$|\nabla_0 \varphi|^q(x) = (\Psi \circ \varphi)'(x) \quad \text{п. вс.} \quad \text{и} \quad \|\nabla_0 \varphi \mid L_q(\Omega)\| = \|\varphi^*\|.$$

Теорема 4 [6] (2025) *Пусть* $\mathbb{M}$ *и* $\mathbb{M}'$ *— римановы пространства одинаковой размерности* ≥ 2, *области* $\Omega \subset \mathbb{M}$, $\Omega' \subset \mathbb{M}'$, *и гомеоморфизм* $\varphi : \Omega \to \Omega'$. *Оператор композиции*

$$\varphi^* : L_p^1(\Omega') \cap \mathrm{Lip}(\Omega') \to L_q^1(\Omega)$$

ограничен при фиксированных $1 \leq q \leq p < \infty$ *тогда и только тогда, когда*

1) $\varphi \in W^1_{q,\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{M}')$;
2) φ *имеет конечное искажение*;
3) *внешняя функция искажения* (3) *принадлежит* $L_\sigma(\Omega)$, *где* $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ ($\sigma = \infty$ *при* $q = p$): $K_p(\cdot, \varphi) \in L_\sigma(\Omega)$;
4) $\|\varphi^*\| = \|K_p(\cdot, \varphi) \mid L_\sigma(\Omega)\|$.

Регулярность обратных гомеоморфизмов по [9, 10]

Теорема 5. *Пусть гомеоморфизм* $\varphi : \Omega \to \Omega'$, $\Omega \subset \mathbb{M}$, $\Omega' \subset \mathbb{M}'$, *обладает следующими свойствами*:
1) $\varphi \in W^1_{q,\mathrm{loc}}(\Omega)$, $n-1 < q < \infty$;
2) *отображение* φ *имеет конечное искажение*;
3) $K_{\varphi,p}(\cdot) \in L_\varkappa(\Omega)$, *где* $\frac{1}{\varkappa} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$, $n-1 < q \leq p < \infty$ ($\varkappa = \infty$ *при* $q = p$).

Теорема 5. *Пусть гомеоморфизм* $\varphi : \Omega \to \Omega'$, $\Omega \subset \mathbb{M}$, $\Omega' \subset \mathbb{M}'$, *обладает следующими свойствами*:

1) $\varphi \in W^1_{q,\mathrm{loc}}(\Omega)$, $n-1 < q < \infty$;

2) *отображение* φ *имеет конечное искажение*;

3) $K_{\varphi,p}(\cdot) \in L_\kappa(\Omega)$, *где* $\frac{1}{\kappa} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$, $n-1 < q \leq p < \infty$ ($\kappa = \infty$ *при* $q = p$).

Тогда обратный гомеоморфизм имеет свойства:

4) $\varphi^{-1} \in W^1_{p',\mathrm{loc}}(\Omega')$, *где* $p' = \frac{p}{p-n+1}$;

5) φ^{-1} *имеет конечное искажение* ($|J(y,\varphi^{-1})| > 0$ *п. вс. в* Ω *при* $n \leq q$);

6) $K_{\varphi^{-1},q'}(\cdot) \in L_\rho(\Omega')$, *где* $q' = \frac{q}{q-n+1}$, *а* $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{p'} - \frac{1}{q'}$.

Более того,

$$\|K_{\varphi^{-1},q'}(\cdot) \mid L_\rho(\Omega')\| \leq \|K_{\varphi,p}(\cdot) \mid L_\kappa(\Omega)\|^{n-1}.$$

Выводы.

Следствие. *Если гомеоморфизм* $\varphi : \Omega \to \Omega'$ *квазиконформен, то обратный к нему* $\varphi^{-1} : \Omega' \to \Omega$ *тоже квазиконформен,* Ω, Ω' *— области на римановых многообразиях.*

Следствие. *Если гомеоморфизм* $\varphi : \Omega \to \Omega'$ *квазиконформен, то обратный к нему* $\varphi^{-1} : \Omega' \to \Omega$ *тоже квазиконформен,* Ω, Ω' *— области на римановых многообразиях.*

Отображения теоремы 5 образуют класс гомеоморфизмов $Q_{q,p}$.

Нелинейная теория упругости

Решение некоторых задач нелинейной теории упругости Джон Болл (1978) [11] свел к задаче минимизации функционала

$$I(\varphi) = \int\limits_{\Omega} W(x, D\varphi(x))\, dx.$$

Решение некоторых задач нелинейной теории упругости Джон Болл (1978) [11] свел к задаче минимизации функционала

$$I(\varphi) = \int\limits_{\Omega} W(x, D\varphi(x))\, dx.$$

Мы заметили, что класс Болла допустимых деформаций содержится в пересечении (но не совпадает с пересечением)

$Q_{q,n}(\Omega) \cap W_n^1(\Omega)$ при некотором $n-1 < q < n$.

Условие Каратеодори.

Пусть Ω, $Q \subset \mathbb{M}$ — две ограниченные области с локально липшицевыми границами. Напомним, что отображение $G\colon \Omega \times \mathbb{R}^m \to \overline{\mathbb{R}}$ удовлетворяет *условию Каратеодори*, если $G(x, \cdot)$ непрерывно на $\mathbb{R}^m$ для п. в. $x \in \Omega$; и $G(\cdot, a)$ измеримо на Ω для всех $a \in \mathbb{R}^m$.

Условие Каратеодори.

Пусть Ω, $Q \subset \mathbb{M}$ — две ограниченные области с локально липшицевыми границами. Напомним, что отображение $G\colon \Omega \times \mathbb{R}^m \to \overline{\mathbb{R}}$ удовлетворяет *условию Каратеодори*, если $G(x, \cdot)$ непрерывно на $\mathbb{R}^m$ для п. в. $x \in \Omega$; и $G(\cdot, a)$ измеримо на Ω для всех $a \in \mathbb{R}^m$.

Рассмотрим функционал

$$I(\varphi) = \int\limits_{\Omega} W(x, D\varphi(x))\, dx,$$

где $W\colon \Omega \times \mathbb{M}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ — функция запасенной энергии со следующими свойствами:

Условия поливыпуклости и коэрцитивности.

(a) поливыпуклость: существует выпуклая функция $G\colon \Omega \times D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^N$, удовлетворяющая условию Каратеодори, такая, что для всех $F \in \mathbb{M}^{n\times n}$, $\det F \geq 0$, выполняется равенство

$$G(x, F_{\#}) = W(x, F)$$

всюду в Ω;

Условия поливыпуклости и коэрцитивности.

(a) поливыпуклость: существует выпуклая функция $G\colon \Omega \times D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^N$, удовлетворяющая условию Каратеодори, такая, что для всех $F \in \mathbb{M}^{n\times n}$, $\det F \geq 0$, выполняется равенство

$$G(x, F_{\#}) = W(x, F)$$

всюду в Ω;

(b) коэрцитивность: существуют постоянная $\alpha > 0$, функция $g \in L_1(\Omega)$ и непрерывная функция $f : (0; \infty) \to [0; \infty)$ такая, что $\lim\limits_{t\to+0} f(t) = +\infty$, удовлетворяющие неравенству

$$W(x, F) \geq \alpha |F|^n + f(\det F) + g(x)$$

для п. вс. $x \in \Omega$ и всех гомоморфизмов $F \in T_x\mathbb{M}$, $\det F > 0$.

Теорема существования (обобщение [12], [13]).

Для данных постоянных $q > 1$, $M > 0$

определим класс допустимых деформаций

$$\mathcal{A}(q, M; Q) = \Big\{\varphi : \Omega \to \mathbb{M} \mid \varphi \in W^1_{1,\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{M}) - \text{гомеоморфизм}$$

$$\text{с конечным искажением}, \varphi(\Omega) \subset Q, I(\varphi) < \infty,$$

$$K_{q,n}(\varphi, \Omega) = \|K_{\varphi,n}(\cdot) \mid L_\rho(\Omega)\| \le M, \ \det D\varphi(x) \ge 0 \text{ п. вс. в } \Omega\Big\}.$$

Теорема существования (обобщение [12], [13]).

Для данных постоянных $q > 1$, $M > 0$

определим класс допустимых деформаций

$$\mathcal{A}(q, M; Q) = \Big\{\varphi : \Omega \to \mathbb{M} \mid \varphi \in W^1_{1,\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{M}) - \text{гомеоморфизм}$$

$$\text{с конечным искажением}, \varphi(\Omega) \subset Q, I(\varphi) < \infty,$$

$$K_{q,n}(\varphi, \Omega) = \|K_{\varphi,n}(\cdot) \mid L_\rho(\Omega)\| \leq M, \ \det D\varphi(x) \geq 0 \text{ п. вс. в } \Omega\Big\}.$$

Теорема 6. *Пусть* $\mathbb{M}$ *— риманово ориентированное многообразие,* Ω *— произвольная область в* $\mathbb{M}$, $Q \subset \mathbb{M}$ *— ограниченная область такая, что* $\operatorname{int} \overline{Q} = Q$, *а* $q \in (n-1; n]$ *и* $M > 0$ *— постоянные. Если множество* $\mathcal{A}(q, M; Q)$ *непустое и функция* W *удовлетворяет условиям* **(a)** *и* **(b)**, *то существует по крайней мере один гомеоморфизм* $\varphi_0 \in \mathcal{A}(q, M; Q)$ *такой, что*

$$I(\varphi_0) = \inf\{I(\varphi) : \varphi \in \mathcal{A}(q, M; Q)\}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1) Решетняк Ю. Г. "Пространственные отображения с ограниченным искажением". Новосибирск: Наука, 1982.

2) Водопьянов С. К., Ухлов А. Д. Классы Соболева и (P, Q)-квазиконформные отображения, *Сиб. мат. журн.*, **39**, № 4, 776–795 (1998).

3) Водопьянов С. К. О совпадении функций множества в квазиконформном анализе, *Матем. сб.*, **213**, № 9, 3–33 (2022).

4) Pavlov S. V., Vodopyanov S. K. Reshetnyak-class mappings and composition operators // Analysis and Mathematical Physics – 2025 – V. 15. Preprint arXiv:2507.10254. — 2025. 25 p.

5) Водопьянов С. К. Операторы композиции в пространствах Соболева на римановых многообразиях, *Сиб. мат. журн.*, **65**, № 6, 1128–1154 (2024).

6) Водопьянов С. К. Новые свойства операторов композиции в пространствах Соболева на римановых многообразиях, *Сиб. мат. журн.*, **66**, № 4, 596–612 (2025).

7) Cheeger J., Gromov M., and Taylor M., “Finite propagation speed, kernel estimates for functions of the Laplace operator, and

the geometry of complete Riemannian manifolds" // *J. Dfferential Geometry*, vol. 17, no. 1, 15–53 (1982).
8) Решетняк Ю. Г. Соболевские классы функций со значениями в метрическом пространстве // *Сиб. мат. журн.* 1997. Т. 38, № 3. С. 657–675.
9) Водопьянов С. К. "О регулярности отображений, обратных к соболевским", *Матем. сб.*, 203:10 (2012), 3–32.
10) Водопьянов С. К. О регулярности отображений, обратных к соболевским, и теория $\mathcal{Q}_{q,p}$-гомеоморфизмов, *Сиб. мат. журн.*, **61**, № 6, 1257–1299 (2020).
11) Ball J. M. Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity // *Arch. Rat. Mech. Anal.* 1977. V. 63, N 4. P. 337–403.
12) Molchanova A., Vodopyanov S. Injectivity almost everywhere and mappings with finite distortion in nonlinear elasticity, *Calc. Var.*, **59**, № 17 (2020).
13) Водопьянов С. К., Павлов С. В. Задачи нелинейной теории упругости на группах карно и квазиконформный анализ // *Сиб. мат. журн.* 2025. Т. 66, № 3. С. 416–437.