

О поперечниках по Колмогорову классов аналитических функций

Ю. А. Фарков

Российская академия народного хозяйства и государственной службы при
Президенте РФ, Москва, Россия

XVII Международная Казанская школа-конференция
«Теория функций, ее приложения и смежные вопросы»

27 августа 2025 г.

План

1. Введение
2. Поперечники единичного шара класса $H^\infty(\Omega)$
3. Поперечники классов Харди-Соболева
4. Дополнения
5. Список литературы

1. Введение

Основные свойства поперечников изложены в монографиях В.М. Тихомирова (1976) и А. Пинкуса (1985). Поперечники применяются для изучения оптимальности различных алгоритмов и методов приближения: линейных, полиномиальных, интерполяционных и др., в том числе методов, используемых в численном анализе.

Колмогоровский поперечник отвечает на следующий вопрос: какой точности приближения заданного класса можно достигнуть, если использовать в качестве аппарата приближения подпространства заданной размерности?

Некоторые недавние работы:

Васильева А.А. *Колмогоровские поперечники пересечения конечного семейства классов Соболева* // Изв. РАН. Сер. матем., 88:1 (2024), 21–46.

Малыхин Ю.В. *Оценки колмогоровских поперечников и связанных с ними величин*. Дисс. на соиск. уч. ст. докт. физ.-мат. наук. М.: МИАН, 2025 (защита 23 октября 2025 г.)

Entropy numbers of multiplier operators for Vilenkin-Fourier series, for the trigonometric system on the circle, for the Haar system and for sets of finitely and infinitely differentiable functions, in the dyadic sense on $[0, 1)$, were studied in [J. Milare et al., J. Approx. Theory 285, Article ID 105837, 23 p. (2023)].

Farkov Yu.A., Manchanda P., Siddiqi A.H. *Construction of wavelets through Walsh functions*. — Singapore: Springer-Verlag, 2019.— 386 p.

Фарков Ю.А. *Жёсткие фреймлеты в анализе Уолша* // Матем. заметки (в печати).

Ehler M., Filbir F. *Metric entropy, n -widths, and sampling of functions on manifolds* // J. Approx. Theory **225** (2018), 41-57.

Temlyakov V. *On optimal recovery in L_2* // J. Complexity **65** (2021), Article ID 101545, 11 p. (Cited in 32 Documents)

DeVore, Ronald (ed.); Kunoth, Angela (ed.)

Multiscale, nonlinear and adaptive approximation II. Cham: Springer, 460 p. (2024).

This book presents a collection of high-quality papers in applied and numerical mathematics, as well as approximation theory, all closely related to Wolfgang Dahmen's scientific contributions. Compiled in honor of his 75th birthday, the papers are written by leading experts and cover topics including nonlinear approximation theory, numerical analysis of partial differential equations, learning theory, and electron microscopy. A unifying theme throughout the collection is the emphasis on a solid mathematical foundation, which serves as the basis for the most efficient numerical algorithms used to simulate complex phenomena.

Основные источники к докладу:

Тихомиров В.М. *Проблемы теории аппроксимации и принципы теории экстремума*. М.: Декабрь 2004.

Фарков Ю.А. *О наилучшем линейном приближении голоморфных функций* // *Фундамент. и прикл. матем.*, **19**:5 (2014), 185—212.

Bandtlow O.F., Nivoche S. *New solution of a problem of Kolmogorov on width asymptotics in holomorphic function spaces* // *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, **24**:7 (2022), 2493–2532.

Farkov Yu.A. *The N -widths of Hardy-Sobolev spaces of several complex variables* // *J. Approx. Theory*, **75**:2 (1993), 183–197.

Farkov Yu.A. *n -Widths, Faber expansion, and computation of analytic functions* // *J. Complexity*, **12**:1 (1996), 58–79.

В.М. Тихомиров (2004, с.42): "Само определение оптимальности методов приближения или восстановления, которым руководствовались последователи Колмогорова, базируется на "классовом подходе", на том, что необходимо использовать некоторую априорную информацию, объединяющую приближаемые и восстанавливаемые функции в определенные точно описываемые совокупности (классы). А для фиксированного класса естественно ставятся экстремальные задачи об оптимальном приближении его фиксированными методами или средствами приближения и об оптимальном методе или средстве приближения среди семейства подобных.

Основным полигоном в теории аппроксимации служили классы Соболева и Гёльдера-Никольского гладких функций, классы Харди аналитических функций и некоторые классы смешанного типа (Харди-Соболева и др.) Одна из наших целей далее — раскрытие единства теорий приближения гладких и аналитических функций (эти теории исторически создавались раздельно)."

Пусть X — линейное нормированное пространство,
 $L_n \subset X$ — n -мерное подпространство.

Расстояние от элемента $x \in X$ до подпространства L_n :

$$d(x, L_n, X) := \inf_{y \in L_n} \|x - y\|.$$

Уклонение множества $A \subset X$ до L_n в X :

$$d(A, L_n, X) := \sup_{x \in A} d(x, L_n, X).$$

Колмогоровский n -поперечник множества A в X :

$$d_n(A, X) := \inf_{L_n} d(A, L_n, X) \quad (\text{Колмогоров, 1936}).$$

Из определения:

$$d_n(A, X) = d_n(\overline{\text{conv}}(A \cup (-A)), X).$$

Поэтому множество A часто предполагается выпуклым, замкнутым и центрально-симметричным.

Линейный n -поперечник множества A в X :

$$\lambda_n(A, X) := \inf_{\Lambda_n} \sup_{f \in A} \|f - \Lambda_n f\| \quad (\text{Тихомиров, 1960}),$$

где нижняя грань берётся по всем линейным ограниченным операторам Λ_n ранга n , отображающих X в себя.

Легко видеть, что

$$d_n(A, X) \leq \lambda_n(A, X).$$

Бернштейновский n -поперечник множества A нормированного пространства X определяется равенством

$$b_n(A, X) := \sup_{L_{n+1}} \sup \{r : rB(L_{n+1}) \subset A\},$$

где $B(L_{n+1})$ — единичный шар произвольного подпространства $L_{n+1} \subset X$ размерности $n + 1$.

Из определений:

$$s_{n+1}(A, X) \leq s_n(A, X), \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Если $A_1 \subset A_2$, то $s_n(A_1, X) \leq s_n(A_2, X)$.

Если X изометрично вложено в Y , то $s_n(A, X) \geq s_n(A, Y)$.

Здесь s_n — любой из поперечников d_n, λ_n, b_n .

Неравенство

$$b_n(A, X) \leq d_n(A, X) \quad (1)$$

равносильно следующему утверждению:

Лемма Тихомирова. Пусть X — нормированное пространство, A — центрально-симметричное множество в X , L_{n+1} — подпространство в X размерности $n + 1$, $B(L_{n+1})$ — единичный шар этого подпространства. Предположим, что для некоторого $r > 0$ шар $rB(L_{n+1})$ содержится в A . Тогда $d_n(A, X) \geq r$.

Лемма Тихомирова доказывается с помощью следующей теоремы:

Теорема Борсука. Пусть f — непрерывное нечетное отображение единичной сферы в $\mathbb{R}^d$ (или $\mathbb{C}^d$). Тогда существует точка $\hat{x}$ сферы, в которой $f(\hat{x}) = 0$.

Исторические сведения о применениях этой теоремы при вычислении поперечников соболевских классов приведены в § 2 статьи [Буслаев и Тихомиров, Матем. сб., 1990]; некоторые применения теоремы Борсука к оценкам колмогоровских поперечников классов аналитических функций имеются в монографиях Пинкуса и Фишера ([Pinkus, 1985], [Fisher, 2007]).

Единство теорий приближения алгебраическими многочленами вещественных и аналитических функций особенно отчетливо проявляется в теоремах Чебышева, Вейерштрасса, Бернштейна-Уолша и их обобщениях.

При доказательстве классической теоремы Бернштейна-Уолша применяется построенная Г. Фабером система многочленов, обобщающая систему многочленов Чебышева

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad x \in [-1, 1].$$

Задача об оценке колмогоровских поперечников некоторых классов аналитических функций привела к открытию базисов, обобщающих полиномиальный базис Фабера (см. [Ерохин, УМН, 1968], [Тихомиров, 2004, с.67]).

Теорема Мергеляна. *Функция f , заданная на компакте E комплексной плоскости $\mathbb{C}$, непрерывная на E и голоморфная во всех внутренних точках E , равномерно приближается полиномами тогда и только тогда, когда множество $\overline{\mathbb{C}} \setminus E$ связно и содержит точку ∞ .*

Предположим, что область $\overline{\mathbb{C}} \setminus E$ односвязная, и пусть Φ — конформное отображение $\overline{\mathbb{C}} \setminus E$ на $\{z : |z| > 1\}$, такое, что $\Phi(\infty) = \infty$. Хорошо известно, что тогда

$$|P(z)| \leq |\Phi(z)|^n \|P\|_{C(E)}, \quad P \in \mathcal{P}_n(\mathbb{C}), \quad z \in \mathbb{C} \setminus E, \quad (2)$$

где $\mathcal{P}_n(\mathbb{C})$ — множество алгебраических многочленов с комплексными коэффициентами степени не выше n .

Обозначим через G_R внутренность линии уровня $\Gamma_R := \{z : |\Phi(z)| = R\}$. Класс $BH^\infty(G_R)$ состоит из функций f , голоморфных в G_R и таких, что $|f(z)| \leq 1$ для $z \in G_R$.

По лемме Тихомирова из (2) следует неравенство

$$d_n(BH^\infty(G_R); C(E)) \geq \frac{1}{R^n}.$$

Верхние оценки поперечников $d_n(BH^\infty(G_R); C(E))$ выводятся как при доказательстве следующей классической теоремы.

Теорема Бернштейна-Уолша. Пусть функция f непрерывна на компактном множестве E , не разбивающем плоскость $\overline{\mathbb{C}}$. Для того чтобы функция f аналитически продолжалась в область G_R при некотором $R > 1$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} [d(f, \mathcal{P}_n(\mathbb{C}), C(E))]^{1/n} \leq \frac{1}{R}.$$

Недавно найдено обобщение теоремы Бернштейна-Уолша для параболических многообразий: [Садуллаев-Атамуратов, Матем. сб., 2024].

Для отображения $\Phi : \overline{\mathbb{C}} \setminus E \rightarrow \{z : |z| > 1\}$ при условии

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\Phi(z)}{z} = \gamma > 0$$

в окрестности точки ∞ имеем

$$\Phi(z) = \gamma z + \gamma_0 + \frac{\gamma_0}{z} + \frac{\gamma_1}{z^2} + \dots$$

Многочлены Фабера для E определяются так:

$$\Phi_0(z) \equiv 1, \quad \Phi_1(z) = \gamma z + \gamma_0,$$

и $\Phi_n(z)$ — полиномиальная часть $[\Phi(z)]^n$ для каждого $n \geq 2$.

О рядах по многочленам Фабера: [Суетин, 1984].

Примеры применений в численном анализе: [Henrici, 1984],
[Eiermann, Niethammer, Varga, 1985], [Ф., 2014].

2. Поперечники единичного шара класса $H^\infty(\Omega)$

Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{C}^d$ и пусть E — компактное множество в Ω . Класс $BH^\infty(\Omega)$ состоит из функций f , голоморфных в Ω и таких, что $|f(z)| \leq 1$ для всех $z \in \Omega$. В работах В.П. Захарюты и др. (обзор: [Zakharyuta, 2011]) указаны пары (E, Ω) такие, что

$$\log d_n(BH^\infty(\Omega); C(E)) \sim -2\pi \left(\frac{d!}{\text{cap}(E, \Omega)} \right)^{1/d} n^{1/d}, \quad (3)$$

где $\text{cap}(E, \Omega) := \sup \{ \int_E (dd^c u)^d : u \in \text{Psh}(\Omega, (-1, 0)) \}$ — емкость БэДФорда-Тейлора компакта E относительно Ω .

О комплексной теории потенциала: [Садуллаев, 1985].

В [Bantlow-Nivoche, 2022] формула (3) доказана для случая, когда область Ω является строго гипервыпуклой, а компакт E не является плюриполярным.

"The lower bounds follow from concentration results of independent interest for the eigenvalues of a certain family of Toeplitz operators, while the upper bounds follow from an application of the Bergman-Weil formula together with an exhaustion procedure by special holomorphic polyhedra".

<https://arxiv.org/pdf/1906.00918>

Пусть все $k = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}_+^d$ занумерованы таким образом, что $k = k(j)$, $|k(j)| \leq |k(j+1)|$ ($j = 0, 1, 2, \dots$), где $|k| = k_1 + \dots + k_d$. Тогда для $\tilde{n} := |k(n)|$ имеем

$$\tilde{n} = m \iff \binom{m+d-1}{d} \leq n \leq \binom{m+d}{d} - 1.$$

Согласно [Ф., УМН, 1990] для любого $R > 1$ справедливо равенство

$$d_n(BH^\infty(B_R^d); C(\overline{B_1^d})) = R^{-\tilde{n}}. \quad (4)$$

Напомним, что запись $x_n \asymp y_n$ означает, что существуют $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$ такие, что $c_1 x_n \leq y_n \leq c_2 x_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$; кроме того, $x_n \sim y_n$, если $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n/y_n) = 1$.

В связи с формулами (3) и (4) отметим, что

$$\text{cap}(\overline{B}_1^d, B_R^d) = \left(\frac{2\pi}{\log R} \right)^d \quad \text{и} \quad \tilde{n} \sim (d!n)^{1/d} \quad (n \rightarrow \infty).$$

Задача 1. Найти порядковые оценки поперечников $d_n(BH^\infty(\Omega); C(E))$ и $d_n(BH^\infty(\Omega); L^q(E))$, $1 \leq q < \infty$, для некоторых пар (E, Ω) , где $\Omega \subset \mathbb{C}^d$ — открытое множество, $E \subset \Omega$ — компактное множество.

Пусть $\mathcal{P}_n(\mathbb{C}^d)$ – множество полиномов вида

$$P(z) = \sum_{|k| \leq n} a_{k_1 \dots k_d} z_1^{k_1} \dots z_d^{k_d}, \quad z = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{C}^d,$$

где $k = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}_+^d$, $|k| = k_1 + \dots + k_d$. Для любого компакта $E \subset \mathbb{C}^d$ и любого полинома $P \in \mathcal{P}_n(\mathbb{C}^d)$ имеет место *неравенство Бернштейна-Уолша*

$$\frac{1}{n} \ln |P(z)| \leq \frac{1}{n} \ln \|P\|_{C(E)} + g(z, E), \quad z \in \mathbb{C}^d, \quad (5)$$

где $g(\cdot, E)$ – функция Грина компакта E .

О неравенстве (5) и соответствующем многомерном обобщении теоремы Бернштейна-Уолша: [Садуллаев, 1985, с.102-104].

Для $d = 1$ в задаче 1 будет

$$d_n(BH^\infty(\Omega), C(E)) \asymp \exp(-n/c(E, \Omega)). \quad (6)$$

При условиях сформулированных ниже теорем 1 и 2 емкость Грина $c(E, \Omega)$ определяется следующим образом. Пусть $u(z)$ — функция, гармоническая в области $\Omega \setminus E$, равная 1 на $\partial\Omega$ и равная 0 на ∂E . Тогда

$$c(E, \Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{\partial u}{\partial n} ds,$$

где γ — система гладких контуров для теоремы 2 (или одного контура для теоремы 1), отделяющая E от $\partial\Omega$, n — нормаль к γ в направлении к $\partial\Omega$.

Теорема 1. Пусть односвязная область Ω и компакт $E \subset \Omega$ таковы, что область $\Omega \setminus E$ двусвязная. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [d_n(BH^\infty(G_R); C(E))]^{1/n} = \frac{1}{R},$$

где R — внешний радиус кольца $\{w : 1 < |w| < R\}$ на которое конформно отображается область $\Omega \setminus E$.

Эта теорема доказана в [Ерохин, УМН, 1968] с помощью базисных функций, обобщающих многочлены Фабера.

В связи с базисами Ерохина: [Мергелян, 1961], [Суетин, 1984], [Рахманов, 2016]. На следующем слайде сформулирована лемма, доказанная в [Ерохин, УМН, 1968].

Обозначим через H конформное отображение области $D := \Omega \setminus K$ на кольцо $\{w : 1 < |w| < R\}$ (R – конформный модуль области D).

Лемма Ерохина. *Если занумеровать в произвольном порядке пару граничных континуумов S_1 и S_2 двусвязной области D , то конформное отображение*

$$H : D \rightarrow \{w : 1 < |w| < R\} \quad (7)$$

можно представить в виде суперпозиции $H = F_2 \circ F_1$, где F_1 – конформное отображение односвязной области с границей S_1 и F_2 – конформное отображение односвязной области с границей $S_2^{(1)} = F_1(S_2)$ (при этом отображения F_1 и F_2 единственны с точностью до дробно-линейных подстановок).

Эта лемма и ее обобщения применялись при решении некоторых задач конформных и квазиконформных отображений и при исследовании проблем теории однолистных функций (см. библиографию в [F., 2014]).

В общей ситуации для вывода формулы (3) при $d = 1$ асимптотически оптимальные подпространства получаются с помощью рациональных функций с нулями, равномерно распределенными по некоторой мере на E , и с полюсами, равномерно распределенными по соответствующей мере на $\partial\Omega$. При условиях теоремы 1 этот метод реализуется особенно просто: в качестве точек интерполяции следует выбрать прообразы точек $\exp(i2\pi k/n)$ при отображении (7), а в качестве полюсов приближающей функции — прообразы точек $R \exp(i2\pi k/n)$ (см. [Тихомиров, 2004, с.68]).

В работе [Ganelius, 1976] указаны пары (E, Ω) , для которых соотношение (6) выводится с помощью рациональных функций Фабера. При этом линейная оболочка системы простейших рациональных дробей $\{(z - z_k)^{-1}\}_{k=1}^n$ оказывается оптимальным подпространством для $d_n(BH^\infty(\Omega); C(E))$.

Фишером и Мичелли (1980) соотношение (6) установлено при условии, что дополнение области Ω в расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ состоит из $r + 1$ компонент, каждая из которых содержит более одной точки, а компакт E определен равенством $E = \{z \in \Omega : |B_0(z)| \leq \rho\}$ для некоторого произведения Бляшке B_0 и некоторого $\rho > 0$. При этом

$$d_n(BH^\infty(\Omega), C(E)) \geq \exp[-(r + n)/c(E, \Omega)]. \quad (8)$$

Напомним определение произведения Бляшке для данной области Ω .

Пусть $g(z, \zeta)$ — функция Грина для Ω с полюсом в точке ζ .
Произведение Бляшке $B(z)$ порядка s есть аналитическая на Ω функция вида

$$B(z) = c \exp \left\{ - \sum_{j=1}^s (g(z, \zeta_j) + ih(z, \zeta_j)) \right\},$$

где c — постоянная с модулем 1, $\zeta_1, \dots, \zeta_s$ — точки из Ω (необязательно различные) и $h(z, \zeta_j)$ — гармоническая сопряженная с $g(z, \zeta_j)$ функция. Произведение Бляшке $B(z)$ может быть многозначным, но его модуль однозначен.

Множество всех произведений Бляшке на Ω порядка не выше s обозначается $\mathcal{B}_s(\Omega)$.

Наряду с соотношением (8) в [Fisher-Micchelli, 1980] доказаны неравенства

$$\beta_n(\Omega, E) \leq d_n(BH^\infty(\Omega), C(E)) \leq \beta_{n+r}(\Omega, E),$$

где

$$\beta_n(\Omega, E) := \inf\{\|B\|_{C(E)} : B \in \mathcal{B}_n(\Omega)\}.$$

Такие же неравенства имеют место и для линейных поперечников $\lambda_n(BH^\infty(\Omega), C(E))$.

Для случая $r = 0$ величина $\beta_n(\Omega, E)$ (и соответствующая величина с заменой $C(E)$ на $L^q(\mu)$) изучалась в 1984-1996 г.г. Фишером и его соавторами, а также в работах [Парфенов, 1997], [Осипенко, 2001], [Baratchart-Prokhorov-Saff, 2004].

Обозначения:

$U = \{z : |z| < 1\}$ – единичный круг, $\mathbb{T} = \{z : |z| = 1\}$,
 $U_R = \{z : |z| < R\}$ – круг радиуса R .

Для $l \in \mathbb{N}$, $R > 0$ класс $H_R(l, \infty)$ состоит из голоморфных в U_R функций f , для которых $|f^{(l)}(z)| \leq 1$ для всех $z \in U_R$.

Задача 2. Пусть $l \in \mathbb{N}$, $R > 1$. Найти компакты $E \subset U_R$, для которых верно равенство

$$d_{N+l}(H_R(l, \infty), C(E)) = \inf \{\|F\|_{C(E)} : F^{(l)} \in \mathcal{B}_n(U_R)\}.$$

К задаче 2: [Horwitz-Newman, 1986], [Fisher, Constr. Approx., 1989], [Bandtlow-Nivoche, 2022]; сравните с экстремальными свойствами сплайнов в [Корнейчук, 1977] и [Тихомиров, 2004].

Пару (Ω, E) назовем *допустимой*, если выполнены три условия:

$$1) \quad \Omega = \bigcup_{j=1}^m \Omega_j, \quad \Omega_j \cap \Omega_{j'} = \emptyset \quad (j \neq j'),$$

$$2) \quad E = \bigcup_{s=1}^l E_s, \quad E_s \cap E_{s'} = \emptyset \quad (s \neq s'),$$

$$3) \quad E \subset \Omega, \quad E \cap \Omega_j \neq \emptyset \quad (j = 1, \dots, m),$$

где Ω_j – односвязные жордановы области и E_s – замкнутые односвязные жордановы области.

Для каждой допустимой пары (Ω, E) существует [Ф., 1984] последовательность функций $\{f_n\}$ такая, что любая аналитическая в Ω функция f единственным образом представима в виде

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k f_k(z), \quad z \in \Omega, \quad (9)$$

где ряд сходится абсолютно и равномерно на любом компактном множестве в Ω . Более того, если $f \in BH^{\infty}(\Omega)$, то

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|f - \sum_{k=0}^{n-1} a_k f_k\|_{C(E)}^{1/n} \leq \exp(-1/c(E, \Omega)).$$

В частных случаях равенство (9) совпадает с разложением функции f в *ряд Фабера-Ерохина* (в случае, когда область $\Omega \setminus E$ двусвязная), в *ряд Якоби* (в случае, когда границы $\partial\Omega$ и ∂E являются линиями уровня фиксированного полинома) и в *ряд Уолша* (в случае, когда ∂E состоит из конечного числа непересекающихся жордановых кривых, а $\partial\Omega$ является линией уровня функции Грина для $\overline{\mathbb{C}} \setminus E$ с полюсом в ∞). Пользуясь (9), определим n -мерное линейное пространство $X_n = \text{span} \{f_0, f_1, \dots, f_{n-1}\}$ и проектор

$$F_n : BH^\infty(\Omega) \rightarrow X_n, \quad F_n f = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f_k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Пусть $\alpha := 1/c(E, \Omega)$. Пару (Ω, E) будем называть **-допустимой*, если $\sup_n \|f_n\|_{C(E)} < \infty$ и существуют положительные константы M_1 и M_2 такие, что для любой функции $g \in X_n$ выполнены неравенства

$$\sup\{|g(z)| : z \in \Omega\} \leq M_1 \exp(n\alpha) \|g\|_{C(E)},$$

$$\|g\|_{L^p(\partial E)} \leq M_2 n^{1/p} \|g\|_{L^p(E)}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Например, пара (Ω, E) будет **-допустимой*, если все границы ∂E_s являются аналитическими кривыми Жордана (для "фаберовской" пары (G_R, E) см. [Суетин, 1984], [F., J. Complexity, 1996], [Ф., 2014]).

Теорема 2 [Ф., 2019]. Предположим, что пара (Ω, E) является $*$ -допустимой и пусть $1 \leq q < \infty$. Тогда существуют константы $c_1, c_2 > 0$ такие, что для любой функции $f \in BH^\infty(\Omega)$ и любого натурального n справедливы неравенства

$$\|f - F_n f\|_{C(E)} \leq c_1 \exp(-n\alpha), \quad \|f - F_n f\|_{L^p(E)} \leq c_2 n^{-1/p} \exp(-n\alpha).$$

Более того, имеют место соотношения

$$d_n(BH^\infty(\Omega); C(E)) \asymp \exp(-n\alpha),$$

$$d_n(BH^\infty(\Omega); L^q(E)) \asymp n^{-1/q} \exp(-n\alpha)$$

и такие же соотношения верны для поперечников λ_n .

Задача 1 состоит в поиске многомерных аналогов этих соотношений.

3. Поперечники классов Харди-Соболева

Нормализованные меры Лебега

$$d\sigma(e^{i\theta}) = d\theta/2\pi \quad \text{и} \quad d\nu(x + iy) = dx dy/\pi$$

при любом $R > 0$ связаны равенством

$$\int_{U_R} f(z) d\nu(z) = 2 \int_0^R r dr \int_{\mathbb{T}} f(r\zeta) d\sigma(\zeta). \quad (10)$$

Пространства Харди $H^p(U_R)$, $1 \leq p < \infty$, состоят из голоморфных в U_R функций f , имеющих конечные нормы

$$\|f\|_{H^p(U_R)} := \sup_{0 < r < R} \left(\int_{\mathbb{T}} |f(r\zeta)|^p d\sigma(\zeta) \right)^{1/p}.$$

В пространствах Бергмана $A^p(U_R)$ норма определяется по формуле

$$\|f\|_{A^p(U_R)} := \left(\iint_{U_R} |f(z)|^p d\nu(z) \right)^{1/p}.$$

Для $p = \infty$ полагают

$$\|f\|_{H^\infty(U_R)} = \|f\|_{A^\infty(U_R)} := \sup\{|f(z)| : z \in U_R\}.$$

G.H. Hardy, 1915: При $0 < p < \infty$ величина

$$M_p(f, r) := \|f(r \cdot)\|_{L^p(\sigma)}, \quad r \in (0, 1),$$

неубывает по r для любой аналитической в U функции f .

Как обычно, $H^p = H^p(U)$.

(а) $f' \in H^1 \Leftrightarrow f \in C_A(\overline{U})$ и $f^* \in AC(\mathbb{T})$ (F. Riesz, 1923)

(b) $f' \in H^p, p > 1 \Rightarrow |f(z_1) - f(z_2)| \leq C|z_1 - z_2|^{1-1/p}$
для всех $z_1, z_2 \in \overline{U}$.

(с) Если $l \in \mathbb{N}, 1 \leq p < \infty$, то $f^{(l)} \in H^p \Leftrightarrow f^* \in W_p^l(\mathbb{T})$ и $\widehat{f_k^*} = 0$ для всех $k < 0$.

Для $l \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$ класс $W_p^l(\mathbb{T})$ состоит из функций $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ таких, что $D^{l-1}f \in AC(\mathbb{T})$ и $D^l f \in L^p(\mathbb{T})$, где

$$Df(e^{i\theta}) := -ie^{-i\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} f(e^{i\theta}), \quad D^l f = D(D^{l-1}f).$$

Классы Соболева W_p^r часто рассматривают на отрезке $[0, 1]$. Порядковые оценки поперечников $d_n(W_p^r, L^q)$ для всех $1 \leq p, q \leq \infty$ с историческими комментариями приведены в [Малыхин, 2025, с.18].

Для $l \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$ класс Харди-Соболева $H_R(l, p)$ состоит из функций f , аналитических в U_R и таких, что $f^{(l)} \in BHP(U_R)$; положим $f^{(0)} := f$, $H_R(0, p) := BHP(U_R)$.

Для $n \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{Z}_+$ положим

$$\alpha_n^l := \frac{(n-l)!}{n!}, \quad n \geq l.$$

Теорема 3. Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $R \geq 1$, $l \in \mathbb{Z}_+$. Тогда для $n > l$

$$d_n(H_R(l, p), L^p(\sigma)) = \alpha_n^l R^{-n+l}, \quad (11)$$

$$d_n(H_R(l, p), L^p(\nu)) = \alpha_n^l R^{-n+l} \left(\frac{pn}{2} + 1 \right)^{-1/p}, \quad (12)$$

и такие же равенства верны для поперечников λ_n .

Доказательство теоремы 3 изложено в монографии Пинкуса (1985) с использованием результатов К.И. Бабенко, Л.В. Тайкова и В.М. Тихомирова.

Оценки снизу в теореме 3 получаются по лемме Тихомирова из следующих неравенств для произвольного алгебраического полинома P_n степени n :

$$\|P'_n(R\cdot)\|_{L^p(\sigma)} \leq \frac{n}{R} \|P_n(R\cdot)\|_{L^p(\sigma)}, \quad (13)$$

$$\|P_n(R\cdot)\|_{L^p(\sigma)} \leq R^n \|P_n\|_{L^p(\sigma)}, \quad (14)$$

$$\|P_n\|_{L^p(\sigma)} \leq \left(\frac{np}{2} + 1\right)^{1/p} \|P_n\|_{L^p(\nu)}. \quad (15)$$

Оптимальными методами для линейных поперечников класса $H_R(l, p)$ в пространствах $L^p(\sigma)$ и $L^p(\nu)$ соответственно являются:

$$f(z) \approx (P_{l,n}f)(z) := \sum_{k=0}^{l-1} (f^{(k)}(0)/k!)z^k + \sum_{k=l}^{n-1} \left(1 - (\alpha_{2n-k}^l/\alpha_k^l) \left(1/R\right)^{2(n-k)}\right) (f^{(k)}(0)/k!)z^k, \quad (16)$$

$$f(z) \approx (G_{l,n}f)(z) := \sum_{k=0}^{l-1} (f^{(k)}(0)/k!)z^k + \sum_{k=l}^{n-1} \left(1 - (\alpha_{2n-k}^l/\alpha_k^l) \left(|z|/R\right)^{2(n-k)}\right) (f^{(k)}(0)/k!)z^k. \quad (17)$$

Ядро К.И. Бабенко:

$$K_{l,n}(\rho, t) := \alpha_n^l + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \alpha_{k+n}^l \cos kt, \quad \rho \in [0, 1], \quad t \in [-\pi, \pi].$$

Метод приближения $f(z) \approx (G_{l,n}f)(z)$ находится из равенства

$$f(z) - (G_{l,n}f)(z) = \frac{z^l}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_{l,n}(r/R, \theta - \varphi) f^{(l)}(Re^{i\theta}) d\theta, \quad (18)$$

где $z = re^{i\varphi} \in U_R$ и $F_{l,n}(\rho, t) := \exp(i(l-n)t) \rho^{n-l} K_{l,n}(\rho, t)$.

Из формулы (16) видно, что оптимальным подпространством для поперечников $d_n(H_R(l, \rho), L^p(\sigma))$ является пространство алгебраических полиномов степени не выше $n-1$. В случае $\rho = \infty$ оценка сверху в (11) следует из теоремы К.И. Бабенко (1958) о наилучших полиномиальных приближениях класса $H_R(l, \infty)$, при доказательстве которой возникло ядро $K_{l,n}$.

В.М. Тихомиров в 1969 году выразил колмогоровские поперечники класса W_∞^r на отрезке $[-1, 1]$ через норму чебышевских сплайнов:

$$d_{n+r}(W_\infty^r[-1, 1], L_\infty[-1, 1]) = \|x_{n,r}\|_\infty, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (19)$$

Здесь $x_{n,r}$ — это наименее уклоняющаяся от нуля на $[-1, 1]$ функция, у которой r -я производная равна по модулю единице и меняет знак в n точках интервала $(-1, 1)$ (так что $x_{0,r}$ только постоянным множителем отличается от многочлена Чебышёва T_r). При больших r нормированный чебышевский сплайн близок к многочлену Чебышёва:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\| \frac{x_{n,r}}{x_{n,r}(1)} - T_{n+r} \right\|_\infty = 0.$$

В периодическом случае вместо (19) имеем

$$d_{2n-1}(W_{\infty}^r(\mathbb{T}), C(\mathbb{T})) = d_{2n}(W_{\infty}^r(\mathbb{T}), C(\mathbb{T})) = \frac{\mathcal{K}_r}{n^r}, \quad (20)$$

где $\mathcal{K}_r$ — константа Фавара. Экстремальным подпространством в (20) является пространство римановых сплайнов

$$S_{2n}^{r-1} = \text{span}\{B_{r-1}(\cdot - s\pi/n)\}_{s=-n}^{n-1},$$

где $B_m(\cdot)$ — m -е ядро Бернулли (см. [Тихомиров, 2004, с.62]).

Задача 3. Вычислить точные значения поперечников

$$d_n(H_R(l, p); L^q(\sigma)) \quad \text{и} \quad d_n(H_R(l, p); L^q(\nu))$$

для $1 \leq q < p \leq \infty$, $n > l$, $R \geq 1$.

Мотивировки:

1. В работе [Буслаев-Тихомиров, Матем. сб., 1990] показано, что поперечники $d_{2n-1}(W_p^r(\mathbb{T}), L^q(\sigma))$ и $d_{2n}(W_p^r(\mathbb{T}), L^q(\sigma))$ при $1 \leq q \leq p \leq \infty$ совпадают и их точные значения равны спектральным числам экстремальной задачи

$$\|f\|_{L^q(\sigma)} \rightarrow \sup, \quad \|f^{(r)}\|_{L^p(\sigma)} \leq 1$$

при периодических краевых условиях.

2. Решение задачи 3 для $l = 0$ дается следующим предложением.

Предложение 1 Равенства

$$d_n(BH^p(U_R); L^q(\sigma)) = R^{-n}$$

и

$$d_n(BH^p(U_R); L^q(\nu)) = R^{-n} \left(\frac{qn}{2} + 1 \right)^{-1/q}$$

имеют место для всех $1 \leq q \leq p \leq \infty$, $R > 1$.

В работе [F., J. Complexity, 1996] доказано следующее более общее утверждение.

Теорема 4. Пусть $R > 1$ и

$$d\mu(re^{i\theta}) = dm(r)d\sigma(e^{i\theta}), \quad (21)$$

где m – положительная борелевская мера на $[0, \rho]$, $0 < \rho < R$ и пусть $1 \leq q \leq p \leq \infty$, $q < \infty$. Тогда

$$d_n(BH^p(U_R), L^q(\mu)) = R^{-n} \left(\int_0^\rho r^{nq} dm(r) \right)^{1/q}. \quad (22)$$

Для меры (21) по теореме Фубини

$$\int_{U_\rho} f(z) d\mu(z) = \int_0^\rho dm(r) \int_T f(r\zeta) d\sigma(\zeta). \quad (23)$$

В частности, здесь $dm(r) = 2rdr$, если $\mu = \nu$.

Доказательство теоремы 4 приведено в п. 4.1 презентации.

Класс $A_R(l, p)$ состоит из аналитических в круге U_R функций, производные порядка l которых принадлежат замкнутому единичному шару пространства Бергмана $A^p(U_R)$.

Задача 4. Для $1 \leq p < \infty$, $R > 1$ найти точные значения поперечников $d_n(A_R(l, p), L^p(\sigma))$.

Поперечники $d_n(A_R(l, p), L^p(\nu))$ вычислены в [Pinkus, 1985] с использованием неравенства

$$\|P_n(R \cdot)\|_{L^p(\nu)} \leq R^{n+2/p} \|P_n\|_{L^p(\nu)}. \quad (24)$$

Задача 5. Доказать, что для любого алгебраического полинома $P_n(z)$ степени n и любого $1 \leq p < \infty$ имеет место неравенство

$$\iint_{U_R} |P'_n(Rz)|^p d\nu(z) \leq \left(\frac{n}{R}\right)^p \frac{np+2}{(n-1)p+2} \iint_{U_R} |P_n(Rz)|^p d\nu(z). \quad (25)$$

Для $P_n(z) = z^n$ здесь равенство, а при $p = 2$ неравенство (25) легко проверяется.

Для функций, голоморфных в шаре $B_R^d := \{z \in \mathbb{C}^d : |z| < R\}$, классы $H_R(l, p, d)$ и $A_R(l, p, d)$ определяются с помощью радиальной производной аналогично классам $H_R(l, p)$ и $A_R(l, p)$ с заменой круга U_R на B_R^d ; при этом меры σ и ν нормируются условиями $\sigma(\mathbb{S}^d) = 1$ и $\nu(B^d) = 1$. Обобщение теоремы 3 для классов $H_R(l, p, d)$ и $A_R(l, p, d)$ дано в работе [F., J. Approx. Theory, 1993]; некоторые дополнения даны в [Ding, 2004], [Fang-Li, 2006], [Ф., 2014].

Задача 6. Для $R \geq 1$, $l \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq p, q \leq \infty$ найти порядковые оценки поперечников классов $H_R(l, p, d)$ и $A_R(l, p, d)$ в метриках $L^q(\sigma)$ и $L^q(\nu)$.

К задаче 6 для $d = 1$:

Предложение 2. Для любых $1 \leq p, q \leq \infty$, $R > 1$, $l \in \mathbb{N}$ имеют место соотношения

$$d_n(H_R(l, p); L^q(\sigma)) \asymp n^{-l} R^{-n}, \quad (26)$$

$$d_n(H_R(l, p); L^q(\nu)) \asymp n^{-l-1/q} R^{-n}, \quad (27)$$

$$d_n(A_R(l, p); L^q(\sigma)) \asymp n^{-l+1/p} R^{-n}, \quad (28)$$

$$d_n(A_R(l, p); L^q(\nu)) \asymp n^{-l+1/p-1/q} R^{-n}. \quad (29)$$

Оценки сверху в этих соотношениях получаются тейлоровскими аппроксимациями, а оценки снизу следуют по лемме Тихомирова из неравенств Бернштейна и Бернштейна-Уолша. В работе [Ф., 1988] даны обобщения соотношений (26)-(29) на классы функций, аналитических в односвязных областях с гладкими границами.

4. Дополнения

4.1. К задаче 3.

Произведение Бляшке порядка m для круга U_R записывается в виде

$$B(z) = e^{i\theta} \prod_{j=1}^m \frac{z - z_j}{R - R^{-1}\bar{z}_j z}, \quad z_j \in U_R, \quad \theta \in [-\pi, \pi]. \quad (30)$$

Множество всех произведений Бляшке (30) порядка $m \leq n$ обозначается через $\mathcal{B}_n(U_R)$.

Для данного компактного множества E из U_R и (нетривиальной) положительной меры μ на E пусть

$$\beta_n(U_R, L^q(\mu)) := \inf\{\|B\|_{L^q(\mu)} : B \in \mathcal{B}_n(U_R)\}.$$

В случае $q = \infty$ пространство $L^q(\mu)$ заменяется пространством $C(E)$. Фишер и Мичелли (1980) с помощью теоремы Борсука доказали, что

$$d_n(BH^\infty(U_R), L^q(\mu)) = \beta_n(U_R, L^q(\mu)), \quad (31)$$

для всех $1 \leq q \leq \infty, R > 0$.

В связи с формулой (31) см. [Fisher-Stessin, 1994], [Baratchart-Prokhorov-Saff, 2004], [Fisher, 2007].

Предложение 3. Если μ — мера вида

$$d\mu(re^{i\theta}) = dm(r)d\sigma(e^{i\theta}),$$

то для всех $1 \leq q < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, нижняя грань в определении $\beta_n(U_R, L^q(\mu))$ достигается на $\hat{B}(z) = (z/R)^n$.

Доказательство. Воспользуемся тем, что если $B \in \mathcal{B}_n(U_R)$ удовлетворяет условию $\|B\|_{L^q(\mu)} = \beta_n(U_R, L^q(\mu))$, где $1 \leq q < \infty$, $R > 1$, то все нули функции B принадлежат замкнутому единичному кругу $\overline{U}$ (см. [Pinkus, 1985]). Обозначим через $\mathcal{B}_n^0(U_R)$ множество всех $B \in \mathcal{B}_n(U_R)$ таких, что $B(0) \neq 0$ и $B(z) \neq 0$ для $z \in U_R \setminus \overline{U}$, и покажем, что для каждого $B \in \mathcal{B}_n^0(U_R)$ выполнено неравенство

$$\|B\|_{L^q(\mu)} \geq \|\hat{B}\|_{L^q(\mu)}. \quad (32)$$

Пусть функция B принадлежит классу $\mathcal{B}_0^0(U_R)$ и имеет нули $z_1, \dots, z_n$, записанные с учетом кратностей и занумерованные таким образом, что $|z_1| \leq |z_2| \leq \dots \leq |z_n|$. Применение формулы Иенсена дает

$$\int_T \log |B(re^{i\theta})| d\sigma(e^{i\theta}) = \log R^{-n} + \log r^k + \sum_{j=k+1}^n \log |z_j|$$

для $|z_k| \leq r < |z_{k+1}|$ ($k = 1, \dots, n-1$). Поэтому

$$\int_T \log |B(re^{i\theta})| d\sigma(e^{i\theta}) \geq \log(r/R)^n$$

для всех $0 < r < R$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_T |B(r\zeta)|^q d\sigma(\zeta) &= \exp \log \left(\int_T |B(r\zeta)|^q d\sigma(\zeta) \right) \geq \\ \exp \left(\int_T \log |B(r\zeta)|^q d\sigma(\zeta) \right) &\geq \left(\frac{r}{R} \right)^{nq} = \int_T |\hat{B}(r\zeta)|^q d\sigma(\zeta) \quad (33) \end{aligned}$$

для всех $1 \leq q < \infty, 0 < r < R$. Из (23) и (33) следует (32).

Предложение доказано.

Ядро Пуассона:

$$\mathcal{P}(\rho, t) := 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \cos kt, \quad \rho \in [0, 1], \quad t \in [-\pi, \pi].$$

Выражение ядра Бабенко через ядро Пуассона:

$$K_{l,n}(\rho, t) = \frac{1}{(l-1)!} \int_0^1 (1-\tau)^{l-1} \tau^{n-l} \mathcal{P}(\rho\tau, t) d\tau, \quad l \in \mathbb{N}.$$

Неравенство Минковского о свертке:

$$\|h * g\|_{L^p[-\pi, \pi]} \leq \|h\|_{L^p[-\pi, \pi]} \|g\|_{L^1[-\pi, \pi]}, \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad (34)$$

где $h \in L^p[-\pi, \pi]$, $g \in L^1[-\pi, \pi]$.

Доказательство теоремы 4.

Пусть $f \in H^p(U_R)$. Для $z \in U_R$ положим

$$f(z) \approx (G_n f)(z) := \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - (|z|/R)^{2(n-k)}\right) (f^{(k)}(0)/k!) z^k. \quad (35)$$

Для любого $0 < r < R$ имеем

$$\begin{aligned} f(re^{i\varphi}) - (G_n f)(re^{i\varphi}) = \\ \frac{1}{2\pi} \left(\frac{r}{R}\right)^n \int_{-\pi}^{\pi} e^{in(\varphi-\theta)} \mathcal{P}(r/R, \theta - \varphi) f(Re^{i\varphi}) d\theta. \end{aligned}$$

Ввиду неотрицательности ядра Пуассона отсюда получаем

$$\|f(r\cdot) - (G_n f)(r\cdot)\|_{L^p(\sigma)}^p \leq \left(\frac{r}{R}\right)^{np} \int_T \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{P}(r/R, \theta - \varphi) |f(Re^{i\varphi})| d\theta \right)^p d\sigma(\zeta).$$

Поскольку $\|\mathcal{P}(r/R, \cdot)\|_{L^1[-\pi, \pi]} = 1$, неравенство Минковского (34) дает

$$\|f(r\cdot) - (G_n f)(r\cdot)\|_{L^p(\sigma)} \leq \left(\frac{r}{R}\right)^n \|f\|_{H^p(U_R)}. \quad (36)$$

Для $f \in BH^p(U_R)$, $1 \leq p < \infty$, из (23) и (36) следует, что

$$\|f - G_n f\|_{L^p(\mu)} \leq R^{-n} \left(\int_0^{\rho} r^{np} dm(r) \right)^{1/p},$$

где правая часть совпадает с $\|\hat{B}\|_{L^p(\mu)}$. Отсюда с учетом неравенства $d_n \leq \lambda_n$ имеем

$$d_n(BH^p(U_R), L^p(\mu)) \leq \|\hat{B}\|_{L^p(\mu)}. \quad (37)$$

Предположим теперь, что $1 \leq q \leq p \leq \infty, q < \infty$. Тогда из предложения 3 и неравенства (37) в силу монотонности d_n получаем

$$\begin{aligned} \|\hat{B}\|_{L^q(\mu)} &= d_n(BH^\infty(U_R), L^q(\mu)) \leq d_n(BH^p(U_R), L^q(\mu)) \\ &\leq d_n(BH^q(U_R), L^q(\mu)) \leq \|\hat{B}\|_{L^q(\mu)}, \end{aligned}$$

т.е. верно равенство (22). Теорема доказана.

Замечание. Метод приближения $f \approx G_n f$ получается из (17) при $l = 0$ и применялся К.Ю. Осипенко (1972) для восстановления функции $f \in H^\infty(U_R)$ по тейлоровской информации $\{f^{(k)}(0)\}_{k=0}^{n-1}$; дополнительные ссылки даны в [F., 1993], [Осипенко, 2001].

4.2. О поперечниках классов Харди в поликруге

Для $\mathbf{R} = (R_1, \dots, R_d)$ и $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_d)$ неравенство $\mathbf{r} < \mathbf{R}$ означает, что $r_j < R_j$, $j = 1, \dots, d$ (числа r_j положительны). Положим

$$U_{\mathbf{R}} := \{z \in \mathbb{C}^d : |z_j| < R_j, j = 1, \dots, d\},$$

$$\overline{U}_{\mathbf{r}} := \{z \in \mathbb{C}^d : |z_j| \leq r_j, j = 1, \dots, d\}.$$

В случае $E = \overline{U}_{\mathbf{r}}$ неравенство (5) для полинома $P \in \mathcal{P}_n(\mathbb{C}^d)$ принимает вид

$$\frac{1}{n} \ln |P(z)| \leq \frac{1}{n} \ln \|P\|_{C(\overline{U}_{\mathbf{r}})} + \max_{1 \leq j \leq d} \left\{ \ln \frac{|z_j|}{r_j} \right\}, \quad z \in \mathbb{C}^d.$$

Отсюда при $\mathbf{r} < \mathbf{R}$ имеем

$$|P(z)| \leq \max_{1 \leq j \leq d} \left(\frac{R_j}{r_j} \right)^n \|P\|_{C(\overline{U}_r)}, \quad z \in U_{\mathbf{R}}, \quad (38)$$

где n — степень полинома $P(z)$.

Для данных $\mathbf{R} = (R_1, \dots, R_d)$ и $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_d)$ занумеруем все $k = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}_+^d$ в последовательность $\{k(i)\}_{i=0}^\infty$ так, чтобы

$$\left(\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{R}} \right)^{k(i)} \geq \left(\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{R}} \right)^{k(i+1)} \quad (i = 0, 1, 2, \dots), \quad (39)$$

где

$$\left(\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{R}} \right)^k := \left(\left(\frac{r_1}{R_1} \right)^{k_1}, \dots, \left(\frac{r_d}{R_d} \right)^{k_d} \right).$$

При условии (39) определим подпространство

$$L_{n+1} = \text{span} \{1, z^{k(1)}, \dots, z^{k(n)}\}$$

и положим

$$n^* := \max\{|k(1)|, \dots, |k(n)|\}, \quad d(n, \mathbf{r}, \mathbf{R}) := \max_{1 \leq j \leq d} \left(\frac{R_j}{r_j} \right)^{n^*}.$$

Для любого полинома $P \in L_{n+1}$ в силу (38) имеем

$$\|P\|_{C(\overline{U}_{\mathbf{R}})} \leq d(n, \mathbf{r}, \mathbf{R}) \|P\|_{C(\overline{U}_{\mathbf{r}})}.$$

Отсюда по лемме Тихомирова получаем оценку

$$d_n(BH^\infty(U_{\mathbf{R}}), C(\overline{U}_{\mathbf{r}})) \geq \frac{1}{d(n, \mathbf{r}, \mathbf{R})}. \quad (40)$$

В частности, при $r_j = r_0$, $R_j = R_0$ ($j = 1, \dots, d$) из (40) имеем

$$d_n(BH^\infty(U_R), C(\overline{U_r})) \geq \left(\frac{r_0}{R_0}\right)^{|k(n)|}.$$

Для оценок сверху естественно искать аналоги формулы (35) для функции $f \in H^\infty(U_R)$ (для функций, голоморфных в шаре B_R^d , соответствующее обобщение формулы (35) дано в [F., 1993]).

Поперечники $d_n(BH^2(U_R), L^2(U_r))$ могут быть вычислены хорошо известными методами вычисления поперечников в гильбертовых пространствах (см. [Pinkus, 1985], [Magaril-Il'yayev, Osipenko, Tikhomirov, 2001], [Тихомиров, 2004, раздел 3.3]).

Базисные функции Фабера–Ерохина многих переменных для полицилиндрических областей построены в [Ф., Изв. вузов. Матем., 1982].

5. Список литературы

Бабенко К. И. *Основы численного анализа*. М.: Наука, 1986.

Буслаев А.П., Тихомиров В.М. *Спектры нелинейных дифференциальных уравнений и поперечники соболевских классов* // Матем. сб., **181**:12 (1990), 1587–1606.

Вакарчук С.Б. *Оценки значений n -поперечников классов аналитических функций в весовых пространствах $H_{2,\gamma}(D)$* // Матем. заметки, **108**:6 (2020), 803-822.

Гарнетт Дж. *Ограниченные аналитические функции*. М.: Мир, 1984.

Голузин Г.М. *Геометрическая теория функций комплексного переменного*. М.: Наука, 1966.

Дзядык В.К. *Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами*. М.: Наука, 1977.

Ерохин В.Д. *О наилучшей линейной аппроксимации функций, аналитически продолжимых с данного континуума в данную область* // УМН, **23:1(139)** (1968).

Корнейчук Н.П. *Экстремальные свойства сплайнов* // В кн.: Теория приближения функций. Труды Международной конференции по теории приближения функций, Калуга, 24-28 июля 1975 г., М., 1977, с.237-248.

Малыхин Ю.В. *Оценки колмогоровских поперечников и связанных с ними величин*. Дисс. на соиск. уч. ст. докт. физ.-мат. наук. М.: МИАН, 2025.

Мергелян С.Н. *О некоторых результатах в теории равномерных и наилучших приближений полиномами и рациональными функциями* // Приложение к кн.: Дж. Л. Уолш, Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области, ИЛ, М., 1961, 461–499.

Парфенов О.Г. *Поперечники единичного шара H^∞ в весовых пространствах $L^q(\mu)$* // Матем. сб., **188:8** (1997), 149–157.

Рахманов Е.А. Теорема Гончара–Шталя о ρ^2 и связанные с ней направления исследований по рациональным аппроксимациям аналитических функций // Матем. сб., 2016, том 207, номер 9, 57–90.

Рудин У. Теория функций в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$. М.: Мир, 1984.

Осипенко К.Ю. Об оптимальных методах восстановления в пространствах Харди–Соболева // Матем. сб., **192**:2 (2001), 67–86.

Садуллаев А. Плюрисубгармонические функции // Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, **8** (1985), 65–113.

Садуллаев А., Атамуратов А.А. Полиномиальные аппроксимации на параболических многообразиях // Матем. сб., **215**:5 (2024), 146–160.

Суетин П.К. Ряды по многочленам Фабера. М.: Наука, 1984.

Тихомиров В. М. *Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений* // УМН, **15:3(93)** (1960), 81—120.

Тихомиров В. М. *Некоторые вопросы теории приближений*. М.: МГУ, 1976.

Тихомиров В.М. *Теория приближений* // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т.14. Итоги науки и техники ВИНТИ АН СССР. — М., 1987. — С. 103-260.

Тихомиров В.М. *Проблемы теории аппроксимации и принципы теории экстремума*. М.: Декабрь 2004.

Уолш Дж. Л. *Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области*. М.: ИЛ, 1961.

Фарков Ю.А. *Базисные функции Фабера–Ерохина многих переменных и оценки ε -энтропии* // Изв. вузов. Матем., 1982, № 3, 81–88.

Фарков Ю.А. *Базисные функции Фабера–Ерохина в окрестности нескольких континуумов* // Матем. заметки, **36:6** (1984), 883–892.

Фарков Ю.А. *О поперечниках классов аналитических функций с ограниченными производными* // Изв. вузов. Матем., 4 (1988), 84–86.

Фарков Ю.А. *Поперечники классов Харди и Бергмана в шаре из $\mathbb{C}^n$* // УМН, 45:5(275) (1990), 197–198.

Фарков Ю.А. *О наилучшем линейном приближении голоморфных функций* // Фундамент. и прикл. матем., 19:5 (2014), 185–212.

Фарков Ю.А. *О наилучшей линейной аппроксимации функций, аналитических в окрестности компактного множества* // Современные проблемы математики и механики. Материалы международной конференции, посвященной 80-летию академика В.А. Садовниченко. Москва: МАКС Пресс, 2019. — С. 529–532.

Шабозов М.Ш., Шабозова А.А. *О совместном приближении некоторых классов функций в пространстве Бергмана B_2* // Изв. вузов. Матем., 2024, № 6, 80–88.

Шведенко С.В. *Классы Харди и связанные с ними пространства аналитических функций в единичном круге, поликруге и шаре* // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ, **23** (1985), 3–124

Aleães D.J.J., Tozoni S.A. *Estimates for n -widths of sets of smooth functions on complex spheres* // J. Complexity **64**, Article ID 101537, 30 p. (2021).

Aleães D.J.J., Tozoni S.A. *Estimates for entropy numbers of sets of smooth functions on complex spheres* // J. Approx. Theory **308**, Article ID 106151, 35 p. (2025).

Bandtlow O.F., Nivoche S. *New solution of a problem of Kolmogorov on width asymptotics in holomorphic function spaces* // J. Eur. Math. Soc. (JEMS), **24:7** (2022), 2493–2532.

Baratchart L., Prokhorov V.A., Saff E.B. *On Blaschke products associated with n -widths* // J. Approx. Theory, **126:1** (2004), 40–51.

DeVore R.A., Lorentz G.G. *Constructive approximation*. — Berlin/New York: Springer-Verlag, 1993.— 452 p.

Ding H. *The N -widths of Hardy-Sobolev and Bergman-Sobolev spaces of complex variables*// Anal. Appl., Singap., **2**:4(275) (2004), 309–335.

Ehler M., Filbir F. *Metric entropy, n -widths, and sampling of functions on manifolds* // J. Approx. Theory **225** (2018), 41-57.

Eiermann M., Niethammer W., Varga R.S. *A study of semiiterative methods for nonsymmetric systems of linear equations* // Numer. Math. **47**:4 (1985), 505-546.

Fang G., Li X. *Comparison theorems of Kolmogorov type and exact values of n -widths on Hardy-Sobolev classes*// Math. Comput., **75** (2006), 241-258.

Farkov Yu.A. *The N -widths of Hardy-Sobolev spaces of several complex variables* // J. Approx. Theory, **75**:2 (1993), 183–197.

Farkov Yu.A. *n -Widths, Faber expansion, and computation of analytic functions* // J. Complexity, **12**:1 (1996), 58–79.

Fisher S.D., Micchelli Ch. A. *The n -width of sets of analytic functions* // Duke Math. J., **47** (1980), 789-801.

Fisher S.D., Micchelli Ch. A. *Optimal sampling of holomorphic functions* // Amer. J. Math., **106**:3 (1984), 593-609.

Fisher S.D. *Envelopes, widths, and Landau problems for analytic functions* // Constr. Approx., **5**:2 (1989), 171-187.

Fisher S.D., Stessin M.I. *The n -width of the unit ball of H^q* // J. Approx. Theory, **67** (1991) 347–356.

Fisher S. D. *Pick-Nevalinna interpolation on finitely-connected domains* // Stud. Math., **103**:3 (1992), 265-273.

Fisher S.D., Stessin M.I. *Corrigendum: the n -width of the unit ball of H^q* // J. Approx. Theory, **79** (1994) 167–168.

Fisher S. D. *Widths and optimal sampling in spaces of analytic functions* // Constr. Approx., **12**:4 (1996), 463-480.

Fisher S.D. *Function theory on planar domains. A second course in complex analyses.* — New York: 2007. — 269 p.

Ganelius T. *Rational approximation in the complex plane and on the line* // Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A I, Math., **2** (1976), 129–145.

Guignard D., Jantsch P. *Nonlinear approximation of high-dimensional anisotropic analytic functions* // J. Approx. Theory, **300** (2024), Article ID 106040, 20 p.

Henrici P. *Applied and computation complex analyses*. Vol. 3. New York/Toronto: Wiley, 1986.

Horwitz A., Newman D.J. *An extremal problem for analytic functions with prescribed zeros and r th derivative in H^∞* . // Trans. Am. Math. Soc. **295** (1986), 699-713.

Magaril-Il'yaev G.G., Osipenko K.Yu., Tikhomirov V.M. *On exact values of n -widths in a Hilbert space* // J. Approx. Theory, **108**:1 (2001), 97-117.

Magaril-Il'yaev G.G., Osipenko K.Yu., Tikhomirov V.M. *Optimal recovery and extremum theory* // Comput. Methods Funct. Theory, **2**:1 (2002), 87-112.

Opfer G., Puri M.L. *Complex Chebyshev polynomials and generalizations with an application to the optimal choice of interpolating knots in complex planer splines* // J. Approx. Theory, **37**:1 (1983), 89-101.

Pinkus A. *n*-Widths in Approximation Theory. — Berlin/New York: Springer-Verlag, 1985.— 291 p.

Trefethen L.N. *Numerical analytic continuation* // Japan J. Ind. Appl. Math., **40**:3 (2023), 1587-1636.

Zakharyuta V. *Extendible bases and Kolmogorov problem on asymptotics of entropy and widths of some class of analytic functions* // Ann. Fac. Sci. Toulouse, Math., Spec. Issue **20**:6 (2011), 211-239.

Благодарю за внимание!