РАСПРЕДЕЛЕНИЕ КОРНЕЙ ГОЛОМОРФНЫХ НА КРУГЕ ФУНКЦИЙ

С СУБГАРМОНИЧЕСКОЙ МАЖОРАНТОЙ

Б. Н. Хабибуллин

Институт математики с вычислительным центром
Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук
Уфа, Республика Башкортостан, Российская Федерация

15:00 – 15:45, 27 августа 2025 г. Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Казань, Российская Федерация
XVII Международная Казанская школа-конференция ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ

Основная задача

Постановка задачи

Пусть $\mathrm{Z}\colon D \to \overline{\mathbb{N}}_0 := \{0, 1, 2, \dots, +\infty\}$ — распределение точек на области $D \subseteq \mathbb{C}$. Пусть M — функция на D со значениями в $\mathbb{R}$ или $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. При каких соотношениях между Z и M

[$\exists$] существует или [$\nexists$] не существует

голоморфная функция $f \neq 0$ с $\ln|f| \leqslant M$ и распределением корней $\mathcal{Z}_f \geqslant \mathrm{Z}$ на $\mathbb{C}$?

Если [$\nexists$], то Z — распределение единственности по функции M.
Если [$\exists$], то Z — распределение неединственности по M.
В рамках этой задачи имеет смысл рассматривать только Z, ограниченные на каждом компакте из D. В частности, при $D := \mathbb{C}$ или $D := \mathbb{D}$ с конечной считающей радиальной функцией $\mathrm{Z}^{\mathrm{r}}\colon r \underset{r\geqslant 0}{\longmapsto} \sum\limits_{|z|\leqslant r} \mathrm{Z}(z) \in \mathbb{R}_+$ при всех $r < +\infty$, когда $D := \mathbb{C}$, или при всех $r < 1$, когда $D := \mathbb{D}$.

Недавние общие результаты для $\mathrm{D} = \mathbb{C}$: Хабибуллин Б. Н. Распределение корней целых функций с субгармонической мажорантой // Матем. сб. – 2025. – Т. 216. – № 7. – С. 109–152.

Не будем приводить основные результаты для $\mathrm{D} := \mathbb{C}$ здесь, а обратимся к его промежуточной чисто субгармонической версии, в которой оказался заложен и потенциал для переноса результатов на случай $\mathrm{D} := \mathbb{D}$, который не отражен в указанной нашей статье. Это потребует определённой подготовки.

Для функции M на окружности радиуса r с центром в нуле

$$\mathrm{M}^{\mathrm{or}} := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{M}(\mathrm{r}e^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta$$

— интегральное среднее по этой окружности в предположении интегрируемости функции M на ней.

Субфункции на промежутке

Как обычно, функция $F\colon I \to \mathbb{R}$ — выпуклая на промежутке $I \subseteq \mathbb{R}$, если для любых двух пар чисел $a, b \in I$ и $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ из неравенств $F(x) \leqslant c_1 x + c_2$ при $x := a$ и $x := b$ следует выполнение такого же неравенства при любых $x \in [a, b]$.
Функция $F\colon I \to \mathbb{R}$ — выпуклая относительно логарифма $\ln$, или, кратко, $\ln$-выпуклая, на промежутке $I \subseteq \mathbb{R}^+$, если для любых двух пар $a, b \in I$ и $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ из неравенств $F(x) \leqslant c_1 \ln x + c_2$ при $x := a$ и $x := b$ следует такое же неравенство при всех $x \in [a, b]$.
При $p \in \mathbb{R}^+$ функция $s\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ p-тригонометрически выпуклая на $\mathbb{R}$, если для любых двух пар чисел $a \leqslant b < a + \pi/p$ и $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ из неравенств $s(x) \leqslant c_1 \cos px + c_2 \sin px$ при $x := a$ и $x := b$ следует выполнение такого же неравенства при любых $x \in [a, b]$.
При $0 < p \in \mathbb{R}^+$ функцию $F\colon I \to \mathbb{R}$ на промежутке $I \subseteq \mathbb{R}^+$ называем p-степенно выпуклой на I, если для любых двух пар чисел $a, b \in I$ и $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ из выполнения неравенств $F(x) \leqslant c_1 x^p + c_2 x^{-p}$ при $x := a$ и $x := b$ следует выполнение такого же неравенства при любых $x \in [a, b]$. По определению функцию F на промежутке $I \subseteq \mathbb{R}$ называем 0-степенно выпуклой, если и только если она $\ln$-выпукла на этом промежутке.

Считающая радиально-аргументная функция для меры

Для радоновской меры $\varDelta$ на круге $\mathbb{D}$ и 2π-периодической на $\mathbb{R}$ положительной непрерывной функции s считающей радиально-аргументной функцией для $\varDelta$ с весом s называется функция $\varDelta^{\mathfrak{ra}(\mathrm{s})}$ на интервале $[0,1)\subset\mathbb{R}$, определяемая равенством

$$\varDelta^{\mathfrak{ra}(\mathrm{s})}(\mathrm{t}) \underset{\mathrm{t}\in[0,1)}{:=} \iint_{|\mathrm{z}|\leqslant \mathrm{t}} \mathrm{s}(\arg \mathrm{z})\,\mathrm{d}\varDelta(\mathrm{z}), \quad \mathrm{s}(\arg 0) := \|\mathrm{s}\|_{\mathbb{R}} := \sup_{\mathbb{R}} \mathrm{s}. \tag{1}$$

При $\mathrm{s}=1$ это считающая радиальная функция $\varDelta^{\mathfrak{r}} := \varDelta^{\mathfrak{ra}(1)}$. Субгармонической на области $\mathrm{D}\subseteq\mathbb{C}$ функции $\mathrm{u}\colon \mathrm{D}\to\overline{\mathbb{R}}$ при $\mathrm{u}\not\equiv-\infty$ сопоставляется риссовское распределение масс, определяемое как радоновская мера $\varDelta_{\mathrm{u}} := \frac{1}{2\pi}\triangle \mathrm{u}$, где $\triangle$ — оператор Лапласа, действующий в смысле теории обобщённых функций на D. При $\mathrm{D}:=\mathbb{D}$, определена, конечно, $\varDelta_{\mathrm{u}}^{\mathfrak{ra}(\mathrm{s})}$.

Неравенства для риссовских распределений масс субгармонических функций на круге

Теорема

Пусть $p \in \mathbb{R}^+$, функция $s\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ — 2π-периодическая p-тригонометрически выпуклая, а для $(r, R) \subset [0, 1]$ функция $F\colon (r, R) \to \mathbb{R}^+$ — убывающая и p-степенно выпуклая с $F(R) := \lim\limits_{R>t\to R} F(t) \in \mathbb{R}^+$ и

$$F(r) := \lim_{r<t\to r} F(t) < +\infty, \quad F'_{пр}(r) := \lim_{r<t\to r} \frac{F(t) - F(r)}{t - r} > -\infty. \tag{2}$$

Если u и M — субгармонические на $\mathbb{D}$ функции, $u(z) \leqslant M(z)$ при всех $z \in \mathbb{D}$ и $u(0) \neq -\infty$, то для

$Q_{p,F}(r) := p\bigl(F(r) - F(R)\bigr) - rF'_{пр}(r) \overset{(2)}{<} +\infty$ выполнено неравенство

$$\int_r^R \bigl(-F'_{пр}(t)\bigr)\Bigl(\varDelta_u^{\mathfrak{ra}(s)}(t) - \varDelta_M^{\mathfrak{ra}(s)}(t)\Bigr)\,dt \leqslant \|s\|_{\mathbb{R}} Q_{p,F}(r)\bigl(M^{\circ r} - u(0)\bigr). \tag{3}$$

Одно содержательное упрощение

Следствие

Если в рамках теоремы функция F положительная убывающая p-степенно выпуклая на всём промежутке $(0, R) \subset [0, 1)$, то при условии конечности верхнего предела

$$\operatorname{lim}_0^p F \underset{p>0}{:=} \limsup_{0<t\to 0} t^p F(t) \quad \text{или} \quad \operatorname{lim}_0^0 F \underset{p=0}{:=} \limsup_{0<t\to 0} \frac{F(t)}{\ln(1/t)} \tag{4}$$

неравенство (3) выполняется при всех $r \in (0, R)$ с сомножителем

$$\frac{\operatorname{lim}_0^p F}{r^p} \cdot \begin{cases} 2p & \text{при } p > 0, \\ 1 & \text{при } p = 0 \end{cases} \tag{5}$$

вместо $Q_{p,F}(r)$ в правой части (3).

К распределениям точек

Любую функцию $Z\colon \mathbb{D} \to \overline{\mathbb{N}}_0$ называем распределением точек на единичном открытом круге $\mathbb{D}$ с кратностями $Z(z) \in \overline{\mathbb{N}}_0$ точек $z \in \mathbb{D}$ в Z. При положительной функции $s \geqslant 0$ считающая радиально-аргументная функция для распределения точек Z с весом s на $\mathbb{D}$ — это положительная возрастающая и непрерывная справа на интервале $[0,1)$ функция

$$Z^{\mathfrak{ra}(s)}(t) \underset{t\in[0,1)}{:=} \sum_{|z|\leqslant t} Z(z)s(\arg z) \in \overline{\mathbb{R}}^{+}. \tag{6}$$

Так, при $s = 1$ — это обычная считающая радиальная функция

$$Z^{\mathfrak{r}}\colon t \underset{t\geqslant 0}{\longmapsto} Z^{\mathfrak{ra}(1)}(t) = \sum_{|z|\leqslant t} Z(z),$$

В отличие от последней считающая радиально-аргументная функция (6) с непостоянным весом s по аргументам весьма тонко учитывает распределение точек из Z не только по радиусу, но и по аргументам.

К голоморфным функциям

Если f — голоморфная на $\mathbb{D}$ функция, то распределение точек, равное в каждой точке $\mathrm{z} \in \mathbb{D}$ кратности корня функции f в этой точке, называем распределением корней голоморфной функции f на $\mathbb{D}$ и обозначаем его как $\mathcal{Z}_{\mathrm{f}}$. Для субгармонической функции $\mathrm{u} := \ln|\mathrm{f}|$ точная взаимосвязь между рисcовским распределением масс $\varDelta_{\ln|\mathrm{f}|}$ и распределением корней $\mathcal{Z}_{\mathrm{f}}$ устанавливается равенством

$$\varDelta_{\ln|\mathrm{f}|}(\mathrm{S}) = \sum_{\mathrm{z}\in \mathrm{S}} \mathcal{Z}_{\mathrm{f}}(\mathrm{z}) \quad \text{для любого } \mathrm{S} \subseteq \mathbb{D}.$$

Разности субгармонических функций

Пусть $\mathcal{M} = \mathrm{M}^{\mathrm{up}} - \mathrm{M}_{\mathrm{low}}$ — разность субгармонических на $\mathbb{D}$ функций $\mathrm{M}^{\mathrm{up}} \not\equiv -\infty$ и $\mathrm{M}_{\mathrm{low}} \not\equiv -\infty$, значения которой определены почти всюду по лебеговской мере $\mathfrak{m}_2$ в $\mathbb{D}$. Тогда однозначно определёно риссовское распределение зарядов

$$\varDelta_{\mathcal{M}} := \varDelta_{\mathrm{M}^{\mathrm{up}}} - \varDelta_{\mathrm{M}_{\mathrm{low}}}$$

с соответствующей радиально-аргументной считающей функцией

$$\varDelta_{\mathcal{M}}^{\mathfrak{ra}(\mathrm{s})} \overset{(1)}{:=} \varDelta_{\mathrm{M}^{\mathrm{up}}}^{\mathfrak{ra}(\mathrm{s})} - \varDelta_{\mathrm{M}_{\mathrm{low}}}^{\mathfrak{ra}(\mathrm{s})}.$$

риссовского распределения зарядов $\varDelta_{\mathcal{M}}$ с весом s.

Итоговый результат для голоморфных на $\mathbb{D}$ функций

Из предшествующих субгармонических теоремы и следствия в этих обозначениях и для тех же функций s и F, что и в теореме с условиями (2) на F, выводится следующий общий результат для голоморфных на $\mathbb{D}$ функций f с $f(0) \neq 0$.

Теорема

Пусть $\ln|f| \leqslant \mathcal{M}$ на $\mathbb{D}$ почти всюду по $\mathfrak{m}_2$. Тогда

$$\int_r^R \bigl(-F'_{\text{пр}}(t)\bigr)\Bigl(\mathcal{Z}_f^{\mathfrak{ra}(s)}(t)-\varDelta_{\mathcal{M}}^{\mathfrak{ra}(s)}(t)\Bigr)\,dt \leqslant \|s\|_{\mathbb{R}} Q_{p,F}(r)\bigl(\mathcal{M}^{\circ r}-\ln|f(0)|\bigr). \tag{7}$$

Если функция F задана уже на $(0,R)$ и такая же, как в следствии, то при условии (4) неравенство (7) выполняется при всех $r \in (0,R)$ с (5) вместо $Q_{p,F}(r)$ в правой части (7).

Что отсюда можно получить?

Утверждению, обратному к противоположному последней теореме, можно придать форму необъятной шкалы разнообразных теорем единственности подобно тому, как это было проделано в в исходной статье 2025 г. [1, теоремы 2.2, 2.3, следствия 2.4–2.7] применительно к целым функциям и к субгармоническим функциям на комплексной плоскости. Они будут содержать в себе как довольно специальные предшествующие наши результаты в этом направлении из статей [2] и [3] с нерадиальными по существу условиями на распределения точек, формулируемые в терминах частных проявлений считающей радиально-аргументной функции (6). По схемам из [4] последняя теорема может широко применятся к вопросам аппроксимации, спектральной теории операторов, теории связи и сигналов и пр.

Определённая равномерность оценок в последней теореме относительно пар s, F тестовых функций s и F позволяет технически достаточно просто перенести результаты на шары и полидиски в $\mathbb{C}^{\mathrm{n}}$.

- Хабибуллин Б. Н. Распределение корней целых функций с субгармонической мажорантой // Матем. сб. – 2025. – Т. 216. – № 7. – С. 109–152.
- Khabibullin B. N., Khabibullin F. B. Zeros of holomorphic functions in the unit disk and ρ-trigonometrically convex functions // Analysis and Mathematical Physics. – 2019. – V. 9. – No. 3. – P. 1087–1098.
- Хабибуллин Б. Н. Распределения единственности для голоморфных функций с ограничениями на рост в единичном круге // Материалы Воронежской международной весенней математической школы «Современные методы краевых задач. Понтрягинские чтения—XXXV», Воронеж, 26–30 апреля 2024 г. Часть 1. – Итоги науки и техн. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. – М.: ВИНИТИ РАН, 2024. – С. 109–120.
- Хабибуллин Б. Н. Полнота систем экспонент и множества единственности (монография-обзор, изд. четвёртое, доп.) – Уфа: РИЦ БашГУ, 2012 – xvi+176 с.

Субфункции одной переменной (G. Valiron, 1932; E. Beckenbach, 1937; M. Peixoto, 1948; J. W. Green, 1953; L. K. Jackson, 1953-70; И. И. Ибрагимов, 1971; А. И. Хейфиц, 1981; ХБН, Р.Р. Мурясов, 2024)

Определение

Пусть I — промежуток в $\mathbb{R}$, а $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ — пара функции. Функция $F\colon I \to \mathbb{R}$ называется $\langle f, g\rangle$-выпуклой, если для любого $[a, b] \subset I$ и любых $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ из неравенства $F(x) \leqslant c_1 f(x) + c_2 g(x)$ при $x := a$ и $x := b$ следует то же неравенство для всех $x \in [a, b]$.

Примеры (именных классов субфункций)

1. $\langle 1, x \mapsto x\rangle$-выпуклость — это обычная выпуклость.
2. $\langle 1, \ln\rangle$-выпуклость при $I \subset \mathbb{R}_+$ — выпуклость относительно $\ln$.
3. $\langle x \mapsto \cos px, x \mapsto \sin px\rangle$-выпуклость для $p \in \mathbb{R}_+$ и длине I не больше π/p — это p-тригонометрическая выпуклость.
4. $\langle x \mapsto x^p, x \mapsto x^{-p}\rangle$-выпуклость для $p \in \mathbb{R}_+$ и $I \subset \mathbb{R}_+$ — это p-степенная выпуклость в нашей терминологии.

Специальные нормированные классы субфункций

При $p \in \mathbb{R}_+$ через p-trc обозначаем класс всех 2π-периодических p-тригонометрически выпуклых положительных функций на $\mathbb{R}$, нормированных условием $\sup s = 1$.
При $0 < p \in \mathbb{R}_+$ через $p\text{-pwc}_1^{+\downarrow}(0, R)$ обозначаем класс всех p-степенно выпуклых положительных убывающих функций F на промежутке $(0, R) \subset \mathbb{R}_+$, нормированных условием

$$\lim_{0<t\to 0} t^p F(t) = 1.$$

При $p = 0$ к классу $0\text{-pwc}_1^{+\downarrow}(0, R)$ удобно отнести класс всех выпуклых относительно $\ln$ положительных убывающих функций F на промежутке $(0, R) \subset \mathbb{R}_+$, нормированных условием

$$\lim_{0<t\to 0} \frac{F(t)}{-\ln t} = 1.$$

Общая теорема единственности для $\mathbb{C}$

Теорема (единственности, ХБН, 2025)

Пусть Z и $\varDelta$ — распределения точек и масс на $\mathbb{C}$. Если

$$\sup_{1\leqslant r<R\in\mathbb{R}_+}\ \sup\left\{\frac{r^p}{\check{p}\,\mathsf{max}\{\varDelta^{\mathfrak{r}^\circ}(r),1\}}\int_r^R\Bigl(\mathrm{Z}^{\mathfrak{r}\mathfrak{a}(s)}(t)-\varDelta^{\mathfrak{r}\mathfrak{a}(s)}(t)\Bigr)\bigl(-F'_{rh}(t)\bigr)dt\ \middle|\ p\in\mathbb{R}_+,\quad s\in p\text{-}\mathrm{trc}_1^{+}\ \text{в паре с}\ F\in p\text{-}\mathrm{pwc}_1^{+\downarrow}(0,R)\right\}=+\infty,\qquad(8)$$

где $\check{p}=p$ при $p>0$, но $\check{0}=1$ при $p=0$, то Z — распределение единственности по любой субгармонической функции M с $\varDelta_M\leqslant\varDelta$.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00002, https://rscf.ru/project/24-21-00002/.

Большое спасибо за Ваше внимание!

Дикъкат белән тыңлаганыгыз өчен ихлас күңелдән бик зур рәхмәт сезгә!