

Аппроксимация суммами аналитических ядер

К. Ю. Федоровский

МГУ имени М. В. Ломоносова

Международная Казанская школа-конференция
«Теория функций, её приложения и смежные вопросы»
23–28 августа 2025, Казань, Россия

В докладе рассматривается задача об аппроксимации функций **суммами аналитических ядер**, т.е. функциями вида

$$\sum_{j=1}^n K(z - a_j),$$

где $K(\cdot)$ — **аналитическое ядро**, а $a_1, \dots, a_n$ — некоторый набор точек в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Важно, что сумма рассматривается с **единичными коэффициентами**. Такие суммы часто называются **квантованными**.

Аналитические ядра K в рассматриваемом контексте — это фундаментальные решения различных эллиптических дифференциальных уравнений, воспроизводящие ядра различных пространств аналитических функций, и другие похожие аналитические объекты.

Основными в рамках этого доклада будут ядра $K(z) = 1/z$ (ядро Коши) и $K(z) = \bar{z}/z$ (бианалитическое ядро).

В целом исследуемые нами задачи являются частным случаем **общей задачи о квантованных приближениях**: какие условия на подмножество M заданного банахова пространства $\mathcal{X}$ необходимы или достаточны для того, чтобы множество $R(M) = \{x_1 + \dots + x_n : x_k \in M, n \in \mathbb{N}\}$ было всюду плотно в $\mathcal{X}$, то есть чтобы любой элемент из $\mathcal{X}$ сколь угодно точно приближался конечными суммами элементов из M ?

У нас $M = \{K(z - a) : a \in E\}$, где $E \subset \mathbb{C}$.

В частности, мы используем один факт из общей теории: для плотности $R(M)$ в $\mathcal{X}$ необходимо, чтобы множество M было **разносторонним**: для всякого ненулевого функционала $f \in \mathcal{X}^*$ найдется такой элемент $x \in M$, что $\operatorname{Re} f(x) < 0$. Природа этого утверждения довольно ясна: если такого элемента нет, то M лежит в полупространстве, $R(M)$ также лежит в полупространстве и не может быть плотно в $\mathcal{X}$.

- **Первая часть** доклада будет посвящена тематике аппроксимации наипростейшими дробями (случай $K(z) = 1/z$) и, в частности, задаче и гипотезе Чуи для весовых пространств Бергмана. Эта часть, в основном, будет основана на работе Е. Абакумова (Univ. Gustave Eiffel, Франция), А. Боричева (Aix-Marseille Univ., Франция) и К. Ф. (*Mathematische Annalen*, **379** (2021), 1507—1532; arXiv:2009.01898).
- **Вторая часть** доклада будет посвящена равномерной аппроксимации наипростейшими бианалитическими дробями (случай $K(z) = \bar{z}/z$). Этот сюжет основан на работе П. Бородина (МГУ имени М. В. Ломоносова) и К. Ф., находящейся на рассмотрении в «Математическом сборнике».

В начале рассмотрим следующий естественный и вопрос:

Как разместить N точечных единичных положительных зарядов на единичной окружности $\mathbb{T} = \{|z| = 1\}$ в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ таким образом, чтобы минимизировать среднюю напряженность соответствующего электростатического поля в единичном круге $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$ при условии, что сила обратно пропорциональна расстоянию?

С. К. Чуи в 1971 году предположил, что средняя напряженность соответствующего поля минимальна когда заряды распределены равномерно на $\mathbb{T}$. Удивительно, что эта весьма и весьма естественная и «элементарно выглядящая» гипотеза до сих пор является открытой.

Наипростейшие дроби

Наипростейшая дробь (далее НД) — это рациональная функция r комплексного переменного z следующего вида:

$$r(z) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{z - a_k},$$

где N — натуральное число, а $a_1, \dots, a_N$ — точки в $\mathbb{C}$.

Заметим, что $r(z)$ является **логарифмической производной** многочлена $\prod_{k=1}^N (z - a_k)$; также можно понимать $r(z)$ как **преобразование Коши меры**, равной сумме δ -мер Дирака с единичными массами в точках $a_1, \dots, a_N$.

Для данного множества $E \subset \mathbb{C}$ пусть

$$\mathcal{SF}(E) := \left\{ \sum_{k=1}^N \frac{1}{z - a_{N,k}} : N \geq 1, a_{N,1}, \dots, a_{N,N} \in E \right\}.$$

Задача и гипотеза Чуи

В начале 1970-х Чуи поставил вопрос: является ли множество $\mathcal{SF} := \mathcal{SF}(\mathbb{T})$ плотным в пространстве Бергмана $A^1 = A^1(\mathbb{D})$, состоящем из всех голоморфных и интегрируемых функций в $\mathbb{D}$ (по нормированной мере Лебега m_2 в $\mathbb{D}$), и оснащенном стандартной $L^1(\mathbb{D}, m_2)$ -нормой.

В связи с этим вопросом Чуи и выдвинул гипотезу, упоминавшуюся ранее. Аккуратная формулировка этой гипотезы состоит в следующем:

Гипотеза Чуи

Для любого целого $N > 0$ и для любого набора точек $\{a_1, \dots, a_N\}$ на единичной окружности $\mathbb{T}$ выполнено

$$\left\| \sum_{k=1}^N \frac{1}{z - a_k} \right\|_{L^1(\mathbb{D}, m_2)} \geq \left\| \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{z - e^{2\pi i k/N}} \right\|_{L^1(\mathbb{D}, m_2)}.$$

Задача и гипотеза Чуи

При $N > 0$ положим

$$\psi_N(z) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{z - e^{2\pi i k/N}}.$$

Легко проверяется, что $\|\psi_N\|_{L^1(\mathbb{D}, m_2)} \geq C$ для некоторой абсолютной константы $C > 0$. Таким образом, справедливость гипотезы Чуи должна была показать, что $\mathcal{SF}$ не плотно в A^1 .

Через год после публикации гипотезы Чуи Д. Ньюман доказал (по другому и очень просто), что $\mathcal{SF}$ не плотно в A^1 . Точнее говоря, он установил, что

$$\left\| \sum_{k=1}^N \frac{1}{z - a_k} \right\|_{L^1(\mathbb{D}, m_2)} \geq \frac{\pi}{18}$$

для любого набора $\{a_1, \dots, a_N\}$ точек на $\mathbb{T}$.

Однако, оригинальная гипотеза Чуи остается открытой.

Еще один результат Чуи

Задача Чуи о плотности $\mathcal{SF}$ в пространстве A^1 естественно приводит к аналогичной задаче во всей шкале классических весовых пространств Бергмана $A_\alpha^p = A_\alpha^p(\mathbb{D})$ и для весовых пространств Бергмана $A_{(g)}^p = A_{(g)}^p(\mathbb{D})$ с весами g достаточно общего вида.

Напомним, что пространство A_α^p , $0 < p < \infty$, $-1 < \alpha < \infty$ состоит из всех голоморфных функций f в $\mathbb{D}$ с конечной нормой $\|f\|_{p,\alpha}$, где

$$\|f\|_{p,\alpha}^p = (\alpha + 1) \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p (1 - |z|^2)^\alpha dm_2(z).$$

В начале 1970-х Чуи рассмотрел вопрос об аппроксимации функций НД в жордановых областях D в $\mathbb{C}$ в пространствах Берса — в весовых L^1 -пространствах с весами λ_D^{2-q} , $0 < q < \infty$, где λ_D — это метрика Пуанкаре для D .

Еще один результат Чуи

Не останавливаясь на соответствующих определениях отметим, что Чуи доказал, что для любой жордановой области D и для любого $q > 2$ множество $\mathcal{SF}(\partial D)$ плотно в соответствующем пространстве Берса в D .

При $D = \mathbb{D}$ и $q = \alpha + 2$ соответствующее пр-во Берса совпадает с пространством A_α^1 , $\alpha > 0$. Таким образом, Чуи показал, что $\mathcal{SF}$ плотно в A_α^1 при $\alpha > 0$. А цитированный выше результат Ньюмана говорит, что $\mathcal{SF}$ не плотно в A_0^1 .

Таким образом, $\mathcal{SF}$ плотно в $A_\alpha^1 \iff \alpha > 0$.

Еще один взгляд на аппроксимацию НД

Мак Лейн в 1949 году начал изучение задачи об аппроксимации функций многочленами комплексного переменного с ограничением на расположение нулей.

Скажем, что множество $E \subset \mathbb{C}$ является подходящим для области $G \subset \mathbb{C}$ в смысле полиномиальной аппроксимации без нулей, если всякая голоморфная функция в G , не имеющая в G нулей, может быть локально равномерно в G (т.е. равномерно на компактах в G) приближена многочленами с нулями, расположенными только на E .

Мак Лейн доказал, что если G — это жорданова область со спрямляемой границей ∂G , то ∂G является подходящим для G в указанном смысле.

Кореваар в 1964 (*Annals of Mathematics*) рассмотрел задачу Мак Лейна в существенно более общем виде и связал ее с тематикой аппроксимации наипростейшими дробями.

Теорема (Korevaar, 1964)

Пусть G — ограниченная односвязная область в $\mathbb{C}$, а $E \subset \mathbb{C}$ — такое множество, что $E \cap G = \emptyset$. Следующие условия эквивалентны:

- 1) Множество E является подходящим для G в смысле полиномиальной аппроксимации без нулей.
- 2) Для любой точки $w \in E$ ф-ия $z \mapsto (z - w)^{-1}$ может быть приближена лок. равном. в G многочленами с нулями только на E .
- 3) Найдется набор конечных семейств точек $\{a_{N,k} \in E: 0 \leq k < N\}$ таких, что
$$\sum_{0 \leq k < N} \frac{1}{z - a_{N,k}} \rightarrow 0 \text{ лок. равном. в } G \text{ при } N \rightarrow \infty.$$
- 4) Множество $\text{clos } E$ разделяет плоскость и G содержится в одной из ограниченных связным компонент множества $\mathbb{C} \setminus \text{clos } E$.

Т.е. возможность аппроксимации ф-ии, свободной от нулей, многочленами с нулями на E , эквивалентна возможности аппроксимации нулевой функции наипростейшими дробями с полюсами на E .

Еще один взгляд на аппроксимацию НД

В качестве следствия из теоремы Кореваара можно получить следующее утверждение об аппроксимации для произвольных голоморфных функций (не обязательно свободных от нулей):

Пусть $K \subset G$ — компакт со связным дополнением. Тогда семейство $\mathcal{SF}(\partial G)$ плотно в пространстве $CA(K)$, состоящем из всех непрерывных функций на K , голоморфных на внутренности K .

Этот результат Кореваара был сравнительно недавно (2016) существенно усилен П. Бородиным («Мат. сборник»):

Теорема (Бородин, 2016)

Пусть K и Y — компакты в $\mathbb{C}$ такие, что $\mathbb{C} \setminus K$ связно, $Y \cap K = \emptyset$ и $K \subset \hat{Y}$, где $\hat{Y}$ — это объединение Y и всех ограниченных связных компонент множества $\mathbb{C} \setminus Y$. Тогда $\mathcal{SF}(Y)$ плотно в $CA(K)$.

Напомним, что $\hat{Y}$ часто называют **полиномиальной оболочкой** компакта Y .

$A_{(g)}^2$ -версия задачи Чуи

Рассмотрим вариант задачи Чуи для весовых пространств Бергмана квадратично интегрируемых функций.

Наряду с пространствами A_α^2 при $\alpha > -1$, рассмотрим более общие весовые пространства. Для положительной интегрируемой функции g на отрезке $[0, 1]$ рассмотрим соответствующее (радиальное) весовое пространство Бергмана

$$A_{(g)}^2 = \left\{ f \in \text{Hol}(\mathbb{D}) : \|f\|_{(g)}^2 = \kappa \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 g(1 - |z|^2) dm_2(z) < \infty \right\},$$

где $\kappa = \left(\int_0^1 g(t) dt \right)^{-1}$.

- При $\lambda \in \mathbb{T}$ имеем $\frac{1}{z - \lambda} \in A_{(g)}^2 \iff \int_0^1 \frac{g(s)}{s} ds < \infty$.
- $\mathcal{SF} \subset A_\alpha^2$ для любого $\alpha > 0$.
- $\mathcal{SF} \cap A_\alpha^2 = \emptyset$ для любого $\alpha \in (-1, 0]$.

$A_{(g)}^2$ -версия задачи Чуи

В дальнейшем будем считать, что $\alpha > 0$ and g — это допустимый вес, т.е. $g \not\equiv 0$ и $\int_0 \frac{g(s)}{s} ds < \infty$.

Определим

$$\mathcal{SF}_N = \left\{ \sum_{j=1}^N \frac{1}{z - z_{N,j}} : z_{N,1}, \dots, z_{N,j} \in \mathbb{T} \right\},$$

т.е. $\deg F = N$ при $F \in \mathcal{SF}_N$.

Вопросы, аналогичные вопросам Чуи, для пространств $A_{(g)}^2$:

- Как разместить N точек $a_1, \dots, a_N$ на $\mathbb{T}$ так, чтобы минимизировать $\|F\|_{(g)}$ (в частности, $\|F\|_{2,\alpha}$), где $F \in \mathcal{SF}_N$?
- Описать $A_{(g)}^2$ -замыкания $\mathcal{SF}$ (для общих весов g и, в частности, для весов $g(r) = r^\alpha$).

$A^2_{(g)}$ -версия задачи Чуи: оптимальное распределение

Следующий результат дает ответ на вопрос, аналогичный вопросу Чуи об оптимальном распределении точек, для широкого класса весовых пространств $A^2_{(g)}$.

Теорема (Abakimov, Borichev, F., 2021)

Пусть g — допустимый вес, пусть $g(0) = 0$, и пусть g вогнута и не убывает на $[0, 1]$. Тогда для любого натурального N и для любого набора точек $\{a_1, \dots, a_N\}$ на $\mathbb{T}$ выполнено

$$\left\| \sum_{k=1}^N \frac{1}{z - a_k} \right\|_{(g)} \geq \left\| \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{z - e^{2\pi i k/N}} \right\|_{(g)} = \|\psi_N\|_{(g)}.$$

Более того, если $\{a_1, \dots, a_N\}$ — такие точки на $\mathbb{T}$, что

$$\left\| \sum_{0 \leq k < N} \frac{1}{z - a_k} \right\|_{(g)} = \|\psi_N\|_{(g)},$$

то точки $\{a_1, \dots, a_N\}$ равномерно распределены на $\mathbb{T}$.

A_α^2 -версия задачи Чуи: оптимальность при $0 < \alpha \leq 1$ и асимптотика $\|\Psi_N\|_{2,\alpha}$

Следствие

Для любого $\alpha \in (0, 1]$, для любого натурального N , для любого набора точек $\{a_1, \dots, a_N\}$ на $\mathbb{T}$ выполнено

$$\left\| \sum_{0 \leq k < N} \frac{1}{z - a_k} \right\|_{2,\alpha} \geq \|\Psi_N\|_{2,\alpha}.$$

- Если $0 < \alpha < 1$, то $\|\Psi_N\|_\alpha = \left\| \frac{Nz^{N-1}}{z^N - 1} \right\|_\alpha \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$;
- Если $\alpha > 1$, то $\|\Psi_N\|_\alpha \rightarrow +\infty$ при $N \rightarrow \infty$.

Следующее утверждение дает точную асимптотику:

Теорема (Abakimov, Borichev, F., 2021)

Для любого $\alpha > 0$ выполнено

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N^{\alpha-1} \|\Psi_N\|_\alpha^2 = \Gamma(\alpha + 2) \zeta(\alpha + 1) > 0.$$

В частности, $\lim_{N \rightarrow \infty} \|\Psi_N\|_1 = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

A_α^2 -версия задачи Чуи: оптимальность при $\alpha > 1$

Неизвестно, является ли равномерное распределение точек оптимальным для пространств A_α^2 при $\alpha > 1$. Однако, асимптотически это так, с точностью до постоянной:

Теорема (Abakumov, Borichev, F., 2021)

Пусть $\alpha > 1$. Найдутся абсолютная постоянная $C_1 > 0$ и число $C_2(\alpha) > 0$ такие, что для любого натурального N выполнено

$$\alpha C_1 N^{1-\alpha} \leq \min_{a_k \in \mathbb{T}, k=1 \dots N} \left\| \sum_{k=1}^N \frac{1}{z - a_k} \right\|_{2,\alpha}^2 \leq C_2(\alpha) N^{1-\alpha}.$$

Теорема (Абакумов, Borichev, F., 2021)

Пусть g — допустимый вес. Тогда

$$\text{clos}_{A^2_{(g)}} \mathcal{SF} = \begin{cases} \mathcal{SF}, & t = O(g(t)), t \rightarrow 0, \\ A^2_{(g)}, & g(t) = o(t), t \rightarrow 0. \end{cases}$$

В частности,

- $\mathcal{SF}$ — это замкнутое нигде не плотное подмножество в A^2_α при $0 < \alpha \leq 1$, и
- $\mathcal{SF}$ плотно в A^2_α при $\alpha > 1$.

Плотность $\mathcal{SF}$ в пространствах A_α^p при $p \neq 1, 2$

Пусть $0 < p < +\infty$, $-1 < \alpha < +\infty$. Вопрос о плотности НД в пространствах A_α^p при всех $p \neq 1, 2$ был недавно полностью решен М. А. Комаровым:

Теорема (Комаров, 2024)

- ① $\mathcal{SF} \subset A_\alpha^p \iff \alpha > p - 2.$
- ② $\mathcal{SF}$ плотно в $A_\alpha^p \iff \alpha > p - 1.$

Аппроксимация наипростейшими бианалитическими дробями I

Рассматривается задача о равномерном приближении функций **наипростейшими бианалитическими дробями**, т.е. функциями вида

$$\sum_{k=1}^N \frac{\bar{z} - \bar{a}_k}{z - a_k}, \quad (1)$$

где $a_1, \dots, a_N$ — некоторый набор точек в $\mathbb{C}$.

Наипростейшую бианалитическую дробь естественно интерпретировать как квантованную (с коэффициентами 1) сумму фундаментальных решений для дифференциального оператора $\bar{\partial}^2$, где $\bar{\partial} = \partial/\partial\bar{z} = \frac{1}{2}(f'_x + if'_y)$ — стандартный оператор **Коши–Римана**.

Напомним, что функция f называется **бианалитической** на открытом множестве $U \subset \mathbb{C}$, если f представима на U в виде

$f(z) = \bar{z}f_1(z) + f_0(z)$, где $f_0, f_1 \in \text{Hol}(U)$ — голоморфные ф-ии в U .

Пространство всех бианалитических функций в U обозначим $Bi(U)$.

Аппроксимация наимпростейшими бианалитическими дробями II

Пусть $SBF(E)$ обозначает совокупность всех наимпростейших бианалитических дробей, у которых все точки (полюсы) $a_1, \dots, a_N$ принадлежат множеству $E \subset \mathbb{C}$.

Нас интересуют следующие задачи:

- 1) Пусть Ω — ограниченная односвязная область в $\mathbb{C}$, и E — некоторое подмножество $\mathbb{C} \setminus \Omega$. При каких условиях множество $SBF(E)$ плотно в пространстве $Bi(\Omega)$? В частности, при каких условиях множество $SBF(\partial\Omega)$ плотно в $Bi(\Omega)$?
- 2) Пусть X — компакт в $\mathbb{C}$. При каких условиях множество $SBF(\mathbb{C} \setminus X)$ плотно в пространстве $CBi(X)$, состоящем из всех функций, непрерывных на X и бианалитических на внутреннейности X ?

Лемма

Пусть Ω — область комплексной плоскости, $E \subset \mathbb{C} \setminus \Omega$. Множество $SBF(E)$ плотно в $Bi(\Omega)$ тогда и только тогда, когда множество пар сумм

$$\left\{ \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{z - a_k}, \sum_{k=1}^n \frac{\overline{a_k}}{z - a_k} \right) : a_k \in E, n \in \mathbb{N} \right\} \quad (2)$$

плотно в пространстве $Hol(\Omega) \times Hol(\Omega)$ пар ф-ий, голоморфных в Ω .

С помощью этой леммы нетрудно показать, что для наипростейших бианалитических дробей аналог утверждения Кореваара неверен уже для круга $\mathbb{D}$.

Действительно, для всяких $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{T}$ функции f_0 и f_1 в паре

$$f_1(z) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{z - a_k}, \quad f_0(z) = \sum_{k=1}^n \frac{\overline{a_k}}{z - a_k} = \frac{1}{z} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{z - a_k} + \frac{1}{a_k} \right)$$

Приближение внутри области II

связаны тождеством $f_0(z) = (f_1(z) - f_1(0))/z$, а значит, такие пары не плотны в $Hol(\mathbb{D}) \times Hol(\mathbb{D})$.

Имеет место “еще более отрицательный” пример, когда наипростейшие бианалитические дроби с полюсами в целом слое вблизи границы односвязной области не плотны в пространстве бианалитических функций в этой области. Для жорданова контура Γ и числа $\varepsilon > 0$ положим

$$E_\varepsilon(\Gamma) := \{z \in \text{Ext } \Gamma : \text{dist}(z, \Gamma) < \varepsilon\}.$$

Теорема (Бородин, Ф., 2025)

Существуют такие спрямляемый жорданов контур Γ и число $\varepsilon > 0$, что множество $S\mathcal{BF}(E_\varepsilon(\Gamma))$ не плотно в $Bi(\text{Int } \Gamma)$.

Следующее утверждение не только дает первый пример ситуации, когда множество $S\mathcal{BF}(E_\varepsilon(\Gamma))$ плотно в $Bi(\text{Int } \Gamma)$ для некоторого контура Γ , но и используется в последующих теоремах.

Приближение внутри области III

Теорема (Бородин, Ф., 2025)

Пусть $0 < R_1 < R_2$, $C_1 = \{a : |a| = R_1\}$, $C_2 = \{a : |a| = R_2\}$, $U = \{z : |z| < R_1\}$. Множество $\mathcal{SBF}(C_1 \cup C_2)$ плотно в $Bi(U)$.

Отметим одно простое, но полезное следствие этой теоремы: Пусть Ω — ограниченная односвязная область в $\mathbb{C}$. Тогда множество $\mathcal{SBF}(\mathbb{C} \setminus \Omega)$ плотно в $Bi(\Omega)$.

С использованием теоремы “о двух окружностях” можно построить пример области, для которой справедлив аналог утверждения Кореваара.

Теорема (Бородин, Ф., 2025)

Существует такая ограниченная односвязная область Ω , что $\mathcal{SBF}(\partial\Omega)$ плотно в $Bi(\Omega)$.

Приведем основные шаги конструкции такой области: Положим $\rho_n = 2 - 1/n$ и $C_n = \{z : |z| = \rho_n\}$, $n = 1, 2, \dots$ и определим

$$\Omega = \{z : |z| < 2\} \setminus [1, 2] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} (C_n \setminus \gamma_n),$$

Приближение внутри области IV

где γ_n — малые открытые дуги окружностей C_n с центрами в точках $-\rho_n$, $n = 1, 2, \dots$, которые последовательно определяются ниже.

Пусть $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ — все многочлены комплексного переменного с рациональными коэффициентами, как-то занумерованные.

Фиксируем произвольное натуральное k . По теореме “о двух окружностях” найдутся такие функции $r_{jm}^k \in \mathcal{SBF}(C_{2k-1} \cup C_{2k})$, $j, m = 1, \dots, k$, что

$$\|p_j(z) + \bar{z}p_m(z) - r_{jm}^k(z)\|_{C(\bar{D}_k)} < \frac{1}{k},$$

при $\bar{D}_k = \{|z| \leq \rho_{2k-1} - 2^{-k}\}$. Можно считать, что точки $-\rho_{2k-1}$ и $-\rho_{2k}$ не являются полюсами бианалитических дробей r_{jm}^k (если это не так, можно слегка пошевелить эти полюсы на $C_{2k-1} \cup C_{2k}$ с сохранением требуемой оценки). Выберем на C_{2k-1} и C_{2k} такие открытые дуги γ_{2k-1} и γ_{2k} соответственно с центрами в точках $-\rho_{2k-1}$ и $-\rho_{2k}$, что на этих дугах нет полюсов функций r_{jm}^k .

Приближение внутри области V

Сделав такую процедуру для всех натуральных k , получим требуемую область. Действительно, для всякой функции $f \in Bi(\Omega)$, всякого компакта $K \subset \Omega$ и всякого $\varepsilon > 0$ найдутся такие числа k , $j < k$ и $m < k$, что $1/k < \varepsilon/2$,

$$K \subset \{z : |z| \leq \rho_{2k-1} - 2^{-k}\}$$

и, наконец,

$$\|f(z) - p_j(z) - \bar{z}p_m(z)\|_{C(K)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Последнее свойство вытекает из того, что голоморфные компоненты f_0 и f_1 функции f (т.е. такие функции класса $Hol(\Omega)$), что $f = \bar{z}f_1 + f_0$ могут быть (по классической теореме Рунге) приближены на $\hat{K}$ многочленами комплексного переменного, а $\hat{K} \subset \Omega$, так как Ω односвязна по построению.

Для дроби $r_{jm}^k \in \mathcal{SBF}(\partial\Omega)$ (приближающей многочлен $p_j + \bar{z}p_m$) получаем $\|f - r_{jm}^k\|_{C(K)} < \varepsilon$.

Приближение на компактах I

Напомним, что компакт $X \subset \mathbb{C}$ называется *компактом Каратеодори*, если $\partial X = \partial \widehat{X}$, где $\widehat{X}$ — полиномиальная оболочка X .

Теорема (Бородин, Ф., 2025)

Пусть X — компакт Каратеодори, у которого всякая ограниченная компонента дополнения не является неванлинновской областью. Тогда $SBF(\mathbb{C} \setminus X)$ плотно в $CBi(X)$.

Свойство области быть **неванлинновской** — это специальная аналитическая характеристика ограниченных односвязных областей в $\mathbb{C}$, которая возникла в связи с задачей равномерного приближения функций полианалитическими многочленами. Напомним, что ограниченная односвязная область Ω в $\mathbb{C}$ называется *неванлинновской*, если существуют такие две ограниченные голоморфные функции u, v в области Ω , что **равенство** $\bar{z} = u(z)/v(z)$ выполнено почти всюду на $\partial\Omega$ в смысле конформного отображения.

Приближение на компактах II

Последнее означает, что если φ — это некоторое конформное отображение круга $\mathbb{D}$ на область Ω , то для почти всех точек $\zeta \in \mathbb{T}$ выполняется равенство *угловых граничных значений*
 $\overline{\varphi(\zeta)} = u(\varphi(\zeta))/v(\varphi(\zeta))$.

В частности, образ единичного круга при конформном отображении при помощи однолистной в $\mathbb{D}$ рациональной функции и, в частности, однолистного многочлена, является неванлинновской областью.

Идея доказательства критерия приближаемости для компактов Каратеодори. Возьмем в $\mathbb{C} \setminus X$ две концентрические окружности C_1 и C_2 , окружающие X . Дробями из $SBF(C_1 \cup C_2)$ можно с произвольной точностью равномерно на X приблизить любой биналитический многочлен, а такие многочлены плотны в $CBi(X)$.

Приближение на компактах III

Возникает вопрос о приближении бианалитическими наипростейшими дробями на компактах X с неванлинновскими ограниченными компонентами дополнения.

Оказывается, в этом случае возможна как ситуация, когда бианалитические наипростейшие дроби с полюсами вне X плотны в $SBi(X)$, так и ситуация, когда эти дроби не плотны. Причем обе возможности реализуются на очень простом классе компактов — на неванлинновских контурах (границах жордановых неванлинновских областей), которые могут быть получены как границы образов единичного круга при отображении однолиственными многочленами.

Вначале приведем примеры неванлинновских контуров Γ , для которых множество $SBF(\mathbb{C} \setminus \Gamma)$ не плотно в $C(\Gamma)$.

Так, $SBF(\mathbb{C} \setminus \mathbb{T})$ не плотно в $C(\mathbb{T})$. В самом деле, интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{\bar{z} - \bar{a}}{z - a} \cdot z \, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{1 - \bar{a}z}{z - a} \, dz$$

Приближение на компактах IV

равен 0 при $|a| > 1$ и равен $1 - |a|^2$ при $|a| < 1$, так что множество $\mathcal{SBF}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{T})$ не является разносторонним в $C(\mathbb{T})$.

Пусть теперь $\Gamma = P_N(\mathbb{T})$, где $P_N(z) = z + z^N/N$ при $N \geq 2$. Тогда $\mathcal{SBF}(\mathbb{C} \setminus \Gamma)$ не плотно в $C(\Gamma)$. Как и раньше, рассмотрим интеграл

$$\begin{aligned} I(a) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\bar{z} - \bar{a}}{z - a} (P_N^{-1}(z))^N dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{\bar{w} + \bar{w}^N/N - \bar{a}}{w + w^N/N - a} w^N P'_N(w) dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{w^{N-1} + 1/N - \bar{a}w^N}{P_N(w) - a} P'_N(w) dw. \end{aligned}$$

Если $a \in \text{Ext } \Gamma$, то $P_N(w) - a \neq 0$ при $|w| \leq 1$, откуда $I(a) = 0$.

Приближение на компактах V

Если $a \in \text{Int } \Gamma$, то существует ровно одна такая точка $w_0 \in \mathbb{D}$, что $P_N(w_0) - a = 0$. В этом случае получаем

$$\begin{aligned} I(a) &= w_0^{N-1} + \frac{1}{N} - \bar{a}w_0^N \\ &= w_0^{N-1} + \frac{1}{N} - \left(\overline{w_0} + \frac{1}{N} \overline{w_0}^N \right) w_0^N \\ &= w_0^{N-1} + \frac{1}{N} - |w_0|^2 w_0^{N-1} - \frac{1}{N} |w_0|^{2N} \\ &= w_0^{N-1} (1 - |w_0|^2) + \frac{1}{N} (1 - |w_0|^{2N}) \\ &= \frac{1 - |w_0|^2}{N} \left(N w_0^{N-1} + \sum_{k=0}^{N-1} |w_0|^{2k} \right) \end{aligned}$$

можно показать, что выражение в скобках имеет неотрицательную действительную часть для всякого $w_0 \in \mathbb{D}$. Таким образом, $\text{Re } I(a) \geq 0$ для всякого $a \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$. Следовательно, множество

Приближение на компактах VI

$SBF(\mathbb{C} \setminus \Gamma)$ не является разносторонним и, соответственно, не плотно в $C(\Gamma)$.

Многочлен P_N из последнего примера имеет все критические точки (нули производной) на окружности $\mathbb{T}$. Это условие играет ключевую роль, как показывает следующий результат.

Теорема (Бородин, Ф., 2025)

Пусть многочлен P степени $N \geq 2$ инъективен на $\mathbb{T}$, а его производная P' имеет хотя бы один нуль вне $\bar{\mathbb{D}}$. Тогда неванлинновский контур $\Gamma = P(\mathbb{T})$ обладает тем свойством, что $SBF(\mathbb{C} \setminus \Gamma)$ плотно в $C(\Gamma)$.

Более точно, для всяких достаточно больших $R_2 > R_1$ и всякого $t \in (0, 1)$, достаточно близкого к 1, множество

$$SBF(\{|a| = R_2\} \cup \{|a| = R_1\} \cup P(\{|w| = t\}))$$

плотно в $C(\Gamma)$.

Приближение на компактах VII

Условиям этой теоремы удовлетворяет, в частности, многочлен $P_\varepsilon(w) = w + \varepsilon w^N$, где $N \geq 2$ и $\varepsilon \in (0, 1/N)$. При этом многочлены P_0 и $P_{1/N}$ в этой серии фигурируют в примерах, когда плотности нет. В связи с последней теоремой возникает естественный вопрос: верно ли, что если многочлен P степени $N \geq 2$ однолистен в замкнутом круге $\overline{\mathbb{D}}$ и его производная P' имеет все нули на окружности $\mathbb{T}$, то $S\mathcal{BF}(\mathbb{C} \setminus P(\mathbb{T}))$ не плотно в $C(P(\mathbb{T}))$? Этот вопрос пока открыт.