

# Парные корреляции нулей дзета-функции и теория операторов

В. В. Капустин  
ПОМИ РАН

Казань, 28 августа 2025 г.

# Дзета-функция Римана

Дзета-функция:  $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ ,  $\operatorname{Re} s > 1$ ; аналитическое продолжение в  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$

Функциональное уравнение:  $\xi(1-s) = \xi(s)$  для  $\xi(s) = \frac{1}{2} s(s-1) \pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$

# Дзета-функция Римана

Дзета-функция:  $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ ,  $\operatorname{Re} s > 1$ ; аналитическое продолжение в  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$

Функциональное уравнение:  $\xi(1-s) = \xi(s)$  для  $\xi(s) = \frac{1}{2} s(s-1) \pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$

Тривиальные нули  $\zeta$ : отрицательные чётные числа

Функция  $\xi$  вещественна на  $\mathbb{R}$  и на  $\{\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}\}$ ,

её нули находятся в полосе  $\{\operatorname{Re} s \in (0, 1)\}$  и имеют две оси симметрии

Гипотеза Римана: все нетривиальные нули  $\zeta$  находятся на прямой  $\{\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}\}$

# Дзета-функция Римана

Дзета-функция:  $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ ,  $\operatorname{Re} s > 1$ ; аналитическое продолжение в  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$

Функциональное уравнение:  $\xi(1-s) = \xi(s)$  для  $\xi(s) = \frac{1}{2} s(s-1) \pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$

Тривиальные нули  $\zeta$ : отрицательные чётные числа

Функция  $\xi$  вещественна на  $\mathbb{R}$  и на  $\{\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}\}$ ,

её нули находятся в полосе  $\{\operatorname{Re} s \in (0, 1)\}$  и имеют две оси симметрии

Гипотеза Римана: все нетривиальные нули  $\zeta$  находятся на прямой  $\{\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}\}$

Считающая функция нетривиальных нулей имеет вид  $\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \log \xi$

# Дзета-функция Римана

Дзета-функция:  $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ ,  $\operatorname{Re} s > 1$ ; аналитическое продолжение в  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$

Функциональное уравнение:  $\xi(1-s) = \xi(s)$  для  $\xi(s) = \frac{1}{2} s(s-1) \pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$

Тривиальные нули  $\zeta$ : отрицательные чётные числа

Функция  $\xi$  вещественна на  $\mathbb{R}$  и на  $\{\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}\}$ ,

её нули находятся в полосе  $\{\operatorname{Re} s \in (0, 1)\}$  и имеют две оси симметрии

Гипотеза Римана: все нетривиальные нули  $\zeta$  находятся на прямой  $\{\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}\}$

Считающая функция нетривиальных нулей имеет вид  $\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \log \xi = [\dots] + \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \log \zeta$

На высоте  $T$  плотность нулей приблизительно равна  $\frac{\log T}{2\pi}$

Имеем  $\frac{1}{T} \int_T^{2T} \chi_{(a,b)} \left( \frac{\operatorname{Im} \log \zeta(\frac{1}{2}+it)}{\sqrt{\pi \log \log T}} \right) dt \rightarrow \int_a^b \exp(-\pi \tau^2) d\tau$

Самосопряжённый оператор со спектром  $\{x : \xi(\frac{1}{2} + ix) = 0\}$  существует тогда и только тогда, когда гипотеза Римана верна

Спектр самосопряжённого оператора лежит на вещественной оси

Спектральная теорема для компактных самосопряжённых операторов:

$\sum a_n(\cdot, e_n)e_n$ , где  $(e_n)$  — ортонормированный базис,  $a_n \in \mathbb{R}$ ,  $a_n \rightarrow 0$

Собственные числа самосопряжённых операторов, обратных к компактным:  $a_n^{-1} \rightarrow \infty$

Самосопряжённый оператор со спектром  $\{x : \xi(\frac{1}{2} + ix) = 0\}$  существует тогда и только тогда, когда гипотеза Римана верна

Спектр самосопряжённого оператора лежит на вещественной оси

Спектральная теорема для компактных самосопряжённых операторов:

$\sum a_n(\cdot, e_n)e_n$ , где  $(e_n)$  — ортонормированный базис,  $a_n \in \mathbb{R}$ ,  $a_n \rightarrow 0$

Собственные числа самосопряжённых операторов, обратных к компактным:  $a_n^{-1} \rightarrow \infty$

В соответствии с выделением регулярной части считающей функции  $\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \log \xi$  естественно рассматривать возмущения операторов. Если гипотеза Римана верна, то можно ограничиться самосопряжёнными операторами.

# Оператор для нулей дзета-функции

Спектр невозмущенного самосопряженного оператора  $A$  есть множество тех  $\tau \in \mathbb{R}$ , для которых  $K_{\frac{1-i\tau}{2}}(2\pi) + K_{\frac{1+i\tau}{2}}(2\pi) = 0$ , где  $K$  — модифицированная функция Бесселя

Функция распределения имеет вид  $\frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi e} + O(1)$ , это регуляризация нетривиальных нулей дзета-функции, для которой имеем то же выражение с остаточным членом  $O(\log T)$  (если гипотеза Римана верна, то  $O(\frac{\log T}{\log \log T})$ )

Несамосопряжённое возмущение для нулей дзета-функции:  $A^{-1} + K$ ,  $\text{rank } K = 1$



# Оператор для нулей дзета-функции

Спектр невозмущенного самосопряженного оператора  $A$  есть множество тех  $\tau \in \mathbb{R}$ , для которых  $K_{\frac{1-i\tau}{2}}(2\pi) + K_{\frac{1+i\tau}{2}}(2\pi) = 0$ , где  $K$  — модифицированная функция Бесселя

Функция распределения имеет вид  $\frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi e} + O(1)$ , это регуляризация нетривиальных нулей дзета-функции, для которой имеем то же выражение с остаточным членом  $O(\log T)$  (если гипотеза Римана верна, то  $O(\frac{\log T}{\log \log T})$ )

Несамосопряжённое возмущение для нулей дзета-функции:  $A^{-1} + K$ ,  $\text{rank } K = 1$

Предположим, что гипотеза Римана верна.

В каком классе можно выбрать **самосопряжённый** оператор, возмущающий  $A^{-1}$ , чтобы спектр возмущенного оператора давал множество нулей дзета-функции?

## Фольклор

Два самосопряжённых оператора с чисто точечными спектрами получают друг из друга резольвентным самосопряжённым возмущением ранга 1 тогда и только тогда, когда их спектры чередуются

## Фольклор

Два самосопряжённых оператора с чисто точечными спектрами получаются друг из друга резольвентным самосопряжённым возмущением ранга 1 тогда и только тогда, когда их спектры чередуются

Пусть  $(a_n)$  — возрастающая последовательность, спектр невозмущенного самосопряжённого оператора  $A$

Возмущения ранга 2 реализуются при условии  $b_n \in (a_{n-1}, a_{n+1})$

## Фольклор

Два самосопряжённых оператора с чисто точечными спектрами получают друг из друга резольвентным самосопряжённым возмущением ранга 1 тогда и только тогда, когда их спектры чередуются

Пусть  $(a_n)$  — возрастающая последовательность, спектр невозмущенного самосопряжённого оператора  $A$

Возмущения ранга 2 реализуются при условии  $b_n \in (a_{n-1}, a_{n+1})$

Для возмущений ранга  $2r$  получаем условие  $b_n \in (a_{n-r}, a_{n+r})$

# Возмущения самосопряжённых операторов

## Фольклор

Два самосопряжённых оператора с чисто точечными спектрами получаются друг из друга резольвентным самосопряжённым возмущением ранга 1 тогда и только тогда, когда их спектры чередуются

Пусть  $(a_n)$  — возрастающая последовательность, спектр невозмущенного самосопряжённого оператора  $A$

Возмущения ранга 2 реализуются при условии  $b_n \in (a_{n-1}, a_{n+1})$

Для возмущений ранга  $2r$  получаем условие  $b_n \in (a_{n-r}, a_{n+r})$

## Лемма

Пусть числа  $n_r > r$ ,  $r \in \mathbb{N}$ , таковы, что при всех  $n \leq n_r$  выполняется условие  $a_{n-r} < b_n < a_{n+r}$ . Тогда существует самосопряжённый оператор  $B$  со спектром в точках  $b_n$ , для которого разность  $A^{-1} - B^{-1}$  есть компактный оператор, для модулей собственных чисел которого имеет место оценка  $\sigma_{2r+1} \leq \frac{2}{a_{n_r-r}}$

# Возмущения операторов для нулей дзета-функции

$\tau_n$  — нули  $K_{\frac{1+iz}{2}}(2\pi) + K_{\frac{1-iz}{2}}(2\pi)$ ,  $\frac{1}{2} + i\gamma_n$  — нетривиальные нули  $\zeta$

Для каждого  $n$  имеем  $\gamma_n \in (\tau_{n-r}, \tau_{n+r})$ , где  $r = r(n) = o(\log n)$

Запишем  $r = \alpha_n \log n$ ,  $\alpha_n \searrow 0$ . Можно взять  $n_r \asymp \exp(\frac{r}{\alpha_n})$  и, поскольку  $n \asymp \tau_n \cdot \frac{\log \tau_n}{2\pi}$ , лемма даст оценку для модуля  $(2r+1)$ -го собственного числа

$$\frac{2}{\tau_{n_r-r}} \asymp \frac{\log \tau_{n_r-r}}{\pi(n_r-r)} \asymp \frac{\log n_r}{\pi n_r} \asymp \frac{r/\alpha_n}{\pi e^{r/\alpha_n}}$$

Поскольку  $\alpha_n \rightarrow 0$ , получаем субэкспоненциальную оценку  $\text{const} \cdot e^{-Ar}$  для сколь угодно большого  $A$

Предположим, что гипотеза Римана верна, и для нулей дзета-функции  $\frac{1}{2} + i\gamma_n$  введём нормированную последовательность:  $\delta_n = \gamma_n \cdot \frac{\log |\gamma_n|}{2\pi}$ , для которой имеем

$$\frac{1}{T} \cdot \#\left\{\delta_n \in (0, T)\right\} \rightarrow 1$$

Предположим, что гипотеза Римана верна, и для нулей дзета-функции  $\frac{1}{2} + i\gamma_n$  введём нормированную последовательность:  $\delta_n = \gamma_n \cdot \frac{\log |\gamma_n|}{2\pi}$ , для которой имеем

$$\frac{1}{T} \cdot \#\left\{\delta_n \in (0, T)\right\} \rightarrow 1$$

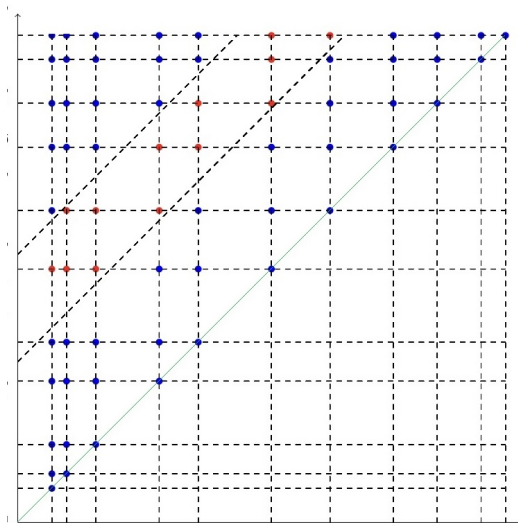
Парные корреляции контролируют попарные разности:

$$F(d) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \#\left\{(\delta_m, \delta_n) : \delta_m, \delta_n \in (0, T), \delta_m - \delta_n \in (0, d)\right\}$$

$$F(d_2) - F(d_1) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \#\left\{(\delta_m, \delta_n) : \delta_m, \delta_n \in (0, T), \delta_m - \delta_n \in (d_1, d_2)\right\}$$



$$F(d_2) - F(d_1) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \#\left\{(\delta_m, \delta_n) : \delta_m, \delta_n \in (0, T), \delta_m - \delta_n \in (d_1, d_2)\right\}$$



## Парные корреляции (2)

$$F(d) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \#\left\{(\delta_m, \delta_n) : \delta_m, \delta_n \in (0, T), \delta_m - \delta_n \in (0, d)\right\}$$

Гипотеза Х. Монтгомери: 
$$F(d) = \int_0^d \left\{1 - \left(\frac{\sin \pi u}{\pi u}\right)^2\right\} du$$

Гипотеза подтверждается компьютерными экспериментами (А. Odlyzko)

Монтгомери доказал это свойство для преобразования Фурье на интервале  $(-1, 1)$

Montgomery H.L. *The pair correlation of zeros of the zeta function*. Analytic number theory, Proc. Sympos. Pure Math., vol. XXIV, AMS, Providence, R.I., 1973, 181–193.

Приведём формулировку из статьи P.Bourgade, J.Keating, *Quantum chaos...*, 2010

### Теорема

Пусть  $f \in C^\infty$ ,  $\text{supp } f \subset (-1, 1)$ . Тогда для  $m, n = 1, \dots, N$ ,  $m \neq n$  имеем

$$\int f(t) \left( \frac{1}{N} \sum \exp(2\pi i t(\delta_m - \delta_n)) \right) dt \rightarrow \int_{-1}^1 f(t) |t| dt = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(u) \left\{1 - \left(\frac{\sin(\pi u)}{\pi u}\right)\right\}^2 du$$

При предположении, что гипотеза Римана верна, существует ли **самосопряженное** резольвентное возмущение оператора  $A$  оператором ранга 1, для спектра которого выполнено корреляционное свойство Монтгомери?

При предположении, что гипотеза Римана верна, существует ли **самосопряженное** резольвентное возмущение оператора  $A$  оператором ранга 1, для спектра которого выполнено корреляционное свойство Монтгомери?

Переформулировка:

Существует ли последовательность  $(x_n)$ , где  $x_n \in (n-1, n)$ , для которой

$$\int f(t) \left( \frac{1}{N} \sum_{m \neq n} \exp(2\pi i t(x_m - x_n)) \right) dt \rightarrow \int_{-1}^1 f(t) |t| dt = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(u) \left\{ 1 - \left( \frac{\sin(\pi u)}{\pi u} \right) \right\}^2 du$$

для любой бесконечно гладкой функции  $f$  с носителем на  $(-1, 1)$  ?

# Постановка задачи

При предположении, что гипотеза Римана верна, существует ли **самосопряженное** резольвентное возмущение оператора  $A$  оператором ранга 1, для спектра которого выполнено корреляционное свойство Монтгомери?

Переформулировка:

Существует ли последовательность  $(x_n)$ , где  $x_n \in (n-1, n)$ , для которой

$$\int f(t) \left( \frac{1}{N} \sum_{m \neq n} \exp(2\pi i t(x_m - x_n)) \right) dt \rightarrow \int_{-1}^1 f(t) |t| dt = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(u) \left\{ 1 - \left( \frac{\sin(\pi u)}{\pi u} \right) \right\}^2 du$$

для любой бесконечно гладкой функции  $f$  с носителем на  $(-1, 1)$  ?

Для решения естественно задействовать вероятностные методы (Д.Н. Запорожец)

# Постановка задачи

При предположении, что гипотеза Римана верна, существует ли **самосопряженное** резольвентное возмущение оператора  $A$  оператором ранга 1, для спектра которого выполнено корреляционное свойство Монгмери?

Переформулировка:

Существует ли последовательность  $(x_n)$ , где  $x_n \in (n-1, n)$ , для которой

$$\int f(t) \left( \frac{1}{N} \sum_{m \neq n} \exp(2\pi i t(x_m - x_n)) \right) dt \rightarrow \int_{-1}^1 f(t) |t| dt = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(u) \left\{ 1 - \left( \frac{\sin(\pi u)}{\pi u} \right) \right\}^2 du$$

для любой бесконечно гладкой функции  $f$  с носителем на  $(-1, 1)$  ?

Для решения естественно задействовать вероятностные методы (Д.Н. Запорожец)

Для возмущений конечного ранга условие состоит в ограниченности  $(x_n - n)$

Ответ отрицательный (однако напомним, что сами нули  $\zeta$  получаются при субэкспоненциальном убывании собственных чисел возмущающего оператора)

Если  $(x_n)$  такова, что 
$$\int f(t) \left( \frac{1}{N} \sum \exp(2\pi i t(x_m - x_n)) \right) dt \rightarrow \int_0^1 f(t) t dt$$
 для любой гладкой функции  $f$  с носителем на  $(0, 1)$ , то  $x_n - n$  неограничены

Если  $(x_n)$  такова, что  $\int f(t) \left( \frac{1}{N} \sum \exp(2\pi i t(x_m - x_n)) \right) dt \rightarrow \int_0^1 f(t) t dt$   
 для любой гладкой функции  $f$  с носителем на  $(0, 1)$ , то  $x_n - n$  неограничены

**Доказательство** (от противного): докажем, что функция  $n(x) - x$  неограничена.  
 Для  $T \in [x_N, x_{N+1}]$  определим

$$r_T(x) = \chi_{(0,T)} \cdot (n(x) - x) = \chi_{(0,T)} \cdot \left( \sum_{k=1}^N \chi_{(x_k, \infty)}(x) - x \right)$$

Функции  $r_T$  не могут быть равномерно ограниченными, если показать, что

$$\frac{1}{T} \int_0^T |r_T(x)|^2 dx = \boxed{\frac{1}{T} \int_{\mathbb{R}} |\hat{r}_T(t)|^2 dt} \quad \text{становится большим с ростом } T$$



## Доказательство (2)

$$\begin{aligned}\hat{r}_T(t) &= \int r(x) e^{-2\pi i x t} dx = \sum_{k=1}^n \int_{x_k}^T e^{-2\pi i x t} dx - \int_0^T x e^{-2\pi i x t} dx \\&= \frac{i}{2\pi t} \sum_{k=1}^n (e^{-2\pi i t T} - e^{-2\pi i t x_k}) - \left( \frac{T e^{-2\pi i t T}}{-2\pi i t} + \frac{1}{2\pi i t} \int_0^T e^{-2\pi i x t} dx \right) \\&= \boxed{\frac{1}{2\pi i t} \sum_{k=1}^n e^{-2\pi i t x_k}} + \frac{i e^{-2\pi i t T} (n - T)}{2\pi t} - \frac{e^{-2\pi i t T} - 1}{4\pi^2 t^2}\end{aligned}$$

Для модулей второго и третьего слагаемых имеем

$$\left| \frac{i e^{-2\pi i t T} (n - T)}{2\pi t} \right| = \frac{n - T}{2\pi t}, \quad \left| \frac{e^{-2\pi i t T} - 1}{4\pi^2 t^2} \right| \leq \frac{1}{2\pi^2 t^2} \text{ соответственно.}$$

## Доказательство (3)

Возьмём  $\varphi \in C^\infty$  с носителем на  $(0, 1)$  и со значениями на  $[0, 1]$ :

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{T} \int_{\mathbb{R}} |\hat{r}_T(t)|^2 dt \right)^{1/2} \geq \left( \frac{1}{T} \int_{\mathbb{R}} |\hat{r}_T(t)|^2 \varphi(t) dt \right)^{1/2} \\ & \geq \left( \frac{1}{T} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{4\pi^2 t^2} \left| \sum_{k=1}^n e^{-2\pi i t x_k} \right|^2 \varphi(t) dt \right)^{1/2} - \left( \frac{1}{T} \int_{\mathbb{R}} \frac{(n-T)^2}{4\pi^2 t^2} \varphi(t) dt \right)^{1/2} - \left( \frac{1}{T} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{4\pi^4 t^4} \varphi(t) dt \right)^{1/2} \\ & = \boxed{\frac{1}{2\pi} \left( \int_{\mathbb{R}} \left\{ \frac{1}{T} \sum_{k,l=1}^n e^{-2\pi i t (x_k - x_l)} \right\} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt \right)^{1/2}} - \frac{|n-T|}{2\pi\sqrt{T}} \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt \right)^{1/2} - \frac{1}{2\pi\sqrt{T}} \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(t)}{t^4} dt \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Второе и третье слагаемые стремятся к нулю (если  $x_n - n = o(\sqrt{n})$  при  $T \rightarrow \infty$ )

Первое стремится к  $\frac{1}{2\pi} \left( \int_{\mathbb{R}} t \cdot \frac{\varphi(t)}{t^2} dt \right)^{1/2}$ , что может быть сколь угодно большим

(использовано, что для функции Монтгомери  $\eta(t) = |t|$  имеем  $\int_0^\varepsilon \frac{\eta(t)}{t^2} dt = \infty$ )

## Доказательство (3)

Возьмём  $\varphi \in C^\infty$  с носителем на  $(0, 1)$  и со значениями на  $[0, 1]$ :

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{T} \int_{\mathbb{R}} |\hat{r}_T(t)|^2 dt \right)^{1/2} \geq \left( \frac{1}{T} \int_{\mathbb{R}} |\hat{r}_T(t)|^2 \varphi(t) dt \right)^{1/2} \\ & \geq \left( \frac{1}{T} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{4\pi^2 t^2} \left| \sum_{k=1}^n e^{-2\pi i t x_k} \right|^2 \varphi(t) dt \right)^{1/2} - \left( \frac{1}{T} \int_{\mathbb{R}} \frac{(n-T)^2}{4\pi^2 t^2} \varphi(t) dt \right)^{1/2} - \left( \frac{1}{T} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{4\pi^4 t^4} \varphi(t) dt \right)^{1/2} \\ & = \boxed{\frac{1}{2\pi} \left( \int_{\mathbb{R}} \left\{ \frac{1}{T} \sum_{k,l=1}^n e^{-2\pi i t (x_k - x_l)} \right\} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt \right)^{1/2}} - \frac{|n-T|}{2\pi\sqrt{T}} \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(t)}{t^2} dt \right)^{1/2} - \frac{1}{2\pi\sqrt{T}} \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(t)}{t^4} dt \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Второе и третье слагаемые стремятся к нулю (если  $x_n - n = o(\sqrt{n})$  при  $T \rightarrow \infty$ )

Первое стремится к  $\frac{1}{2\pi} \left( \int_{\mathbb{R}} t \cdot \frac{\varphi(t)}{t^2} dt \right)^{1/2}$ , что может быть сколь угодно большим

(использовано, что для функции Монтгомери  $\eta(t) = |t|$  имеем  $\int_0^\varepsilon \frac{\eta(t)}{t^2} dt = \infty$ )

**Спасибо за внимание!**