

Построение правильных многоугольников минимальной секцией угла

С.Ф. Адлай

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН

<https://SemjonAdlaj.com/>

Весьма возможно, что построение правильного пятиугольника не было известно до Пифагора Самосского (570–495 гг. до н.э.), признанного основателя теории музыки, ставшей одним из фундаментальных античных направлений математики. И лишь в 1796 году был впервые построен правильный 17-угольник Карлом Гауссом. Им же, в работе “Disquisitiones Arithmeticae”, изданной в 1801 году, сформулировано необходимое и достаточное условие построения правильного многоугольника бисекцией угла, осуществимой циркулем (линейка, как было доказано Георгом Мором в работе “Euclides Danicus”, 1672 года, не обязательна). В статье “Recherches sur les moyens de reconnaître si un Problème de Géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas”, 1837 года, Пьером Ванцелем была чётко доказана не только достаточность, но и необходимость выдвинутого Гауссом условия.

В статье “Angle Trisection, the Heptagon, and the Triskaidecagon”, 1988 года, Андрию Глисон сформулировал необходимое и достаточное условие построения правильного многоугольника, если наряду с бисекцией угла допустить его трисекцию. Он построил 7-угольник и 13-угольник и предложил читателю (с восклицательным знаком в конце своего предложения) «построение 19-угольника!» В той же статье он указал, что построение 11-угольника потребует квинтисекции угла.

Попытки явного построения 11-угольника обсуждались на открытых интернет сайтах, в частности, с 2016 по 2023 гг. на сайтах “Constructing the 11-gon by splitting an angle in five” и “Simplifying a radical-trigonometric expression for the hendecagon angle”. Полученные, применением алгоритма “Mathematica ToRadicals”, выражения в радикалах оказались чрезвычайно громоздкими. Так, на странице Wolfram MathWorld “Trigonometry Angles” (обновлённой 28 августа 2025 года) указан случай простого числа 23 как “очень трудный и требующий большого времени”. Однако дела с такими алгоритмами представления алгебраических чисел в радикалах обстоят значительно хуже того, в чём готова признаться “Wolfram Alpha”, умалчивая объём полученных выражений после признанных ею долгими вычислений.

На предстоящем докладе мы обсудим причины столь затянувшегося построения (даже после нынешнего распространения методов компьютерной алгебры) правильных многоугольников (с малым количеством сторон) минимальной секцией угла и узнаем, какие фундаментальные результаты теории чисел (и их усиления) требуются для осуществления конкретных построений.

Предстоящий, на семинаре «Современные проблемы теории чисел», доклад продолжает серию докладов на вышеуказанную тему построения правильных многоугольников минимальной секцией угла, первый из которых состоялся 5 мая 2025 года на 939-ом заседании семинара «Эварист Галуа», основанном Юрием Ивановичем Мерзляковым в апреле 1987 года.