

Обобщённые канторовские множества и плохо приближаемые точки.

Мы начнём доклад с определения обобщённых канторовских множеств на заданном отрезке $I \subset \mathbb{R}$. При определённых условиях они обладают рядом примечательных свойств. В частности, может быть оценена снизу их размерность Хаусдорфа, а также пересечение любого числа обобщённых Канторовских множеств снова является обобщённым Канторовским множеством со своими параметрами.

Далее мы покажем, что различные множества плохо приближаемых чисел в $\mathbb{R}$ и точек в $\mathbb{R}^2$ могут быть описаны в терминах обобщённых канторовских множеств. Такое описание позволяет получать оценки снизу для размерности Хаусдорфа таких множеств и, в частности, их непустоту.

Например, с помощью данного метода Б. совместно с Велани и Поллингтоном доказали известную проблему Шмидта, которая звучит следующим образом. Определим множества

$$\mathbf{Bad}(i, j) := \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid \liminf_{q \rightarrow \infty} q \cdot \max\{||q\alpha||^{1/i}, ||q\beta||^{1/j}\} > 0\},$$

где $i, j \geq 0, i+j = 1$. Тогда пересечение любых двух множеств $\mathbf{Bad}(i_1, j_1) \cap \mathbf{Bad}(i_2, j_2)$ имеет полную размерность Хаусдорфа.

Другой результат, полученный недавно тем же методом, положительно отвечает на вопрос, поставленный Давенпортом в 1964 г. Он говорит, что пересечение $\mathbf{Bad}(i, j) \cap \mathcal{C}$ имеет полную размерность Хаусдорфа для любой невырожденной плоской кривой $\mathcal{C}$.