

Основы теории открытых квантовых систем. Лекция 6. Уравнения Блоха во внешнем поле и в равновесном резервуаре

Теретёнков Александр Евгеньевич

15 октября 2025 г.

В прошлой лекции...

Решение уравнения Блоха

$$\frac{d}{dt}\vec{v} = [\vec{\omega} \times \vec{v}]$$

имеет вид

$$\vec{v}(t) = \frac{\sin(|\vec{\omega}|t)}{|\vec{\omega}|} [\vec{\omega} \times \vec{v}_0] + \cos(|\vec{\omega}|t) \left(\vec{v}_0 - \frac{1}{|\vec{\omega}|^2} \vec{\omega}(\vec{\omega}, \vec{v}_0) \right) + \frac{1}{|\vec{\omega}|^2} \vec{\omega}(\vec{\omega}, \vec{v}_0).$$

2-уровневая система во внешнем поле

$$\sigma_{\pm} = \frac{1}{2}(\sigma_x \pm i\sigma_y)$$

$$\sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2-уровневая система во внешнем поле

$$\sigma_{\pm} = \frac{1}{2}(\sigma_x \pm i\sigma_y)$$

$$\sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Дипольный момент

$$\vec{d} = \vec{d}_{12}^* \sigma_+ + \vec{d}_{12} \sigma_- = \operatorname{Re} \vec{d}_{12} \sigma_x + \operatorname{Im} \vec{d}_{12} \sigma_y$$

2-уровневая система во внешнем поле

$$\sigma_{\pm} = \frac{1}{2}(\sigma_x \pm i\sigma_y)$$

$$\sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Дипольный момент

$$\vec{d} = \vec{d}_{12}^* \sigma_+ + \vec{d}_{12} \sigma_- = \text{Re } \vec{d}_{12} \sigma_x + \text{Im } \vec{d}_{12} \sigma_y$$

Дипольное взаимодействие

$$H_d(t) = -(\vec{d}, \vec{E}(t))$$

$$\begin{aligned} H_d(t) &= -(\text{Re } \vec{d}_{12} \sigma_x - \text{Im } \vec{d}_{12} \sigma_y, \vec{E}(t)) = \\ &= -\text{Re } (\vec{d}_{12}, \vec{E}(t)) \sigma_x - \text{Im } (\vec{d}_{12}, \vec{E}(t)) \sigma_y \end{aligned}$$

2-уровневая система во внешнем поле

$$\frac{d}{dt}\rho = -i[H_0 + H_d(t), \rho],$$

$$H_0 = \frac{1}{2}\omega_0\sigma_z, \quad H_d(t) = -\text{Re}(\vec{d}_{12}, \vec{E}(t))\sigma_x - \text{Im}(\vec{d}_{12}, \vec{E}(t))\sigma_y$$

$$\Omega_{\text{Re}}(t) = -2\text{Re}(\vec{d}_{12}, \vec{E}(t)), \quad \Omega_{\text{Im}}(t) = -2\text{Im}(\vec{d}_{12}, \vec{E}(t))$$

- Л. Мандель, Э. Вольф. Оптическая когерентность и квантовая оптика. Физматлит М., 2000. Раздел 15.3

2-уровневая система во внешнем поле

$$\vec{E}(t) = \vec{e}\mathcal{E}e^{-i\omega_1 t} + c.c.$$

В случае циркулярно-поляризованной волны $\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1 + i\vec{e}_2)$ и для переходов $\Delta m = \pm 1$ (дипольный момент имеет вид $\vec{d}_{12} = |\vec{d}_{12}|\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1 + i\vec{e}_2)$). Кроме того, $\mathcal{E} = |\mathcal{E}|e^{i\varphi}$.

2-уровневая система во внешнем поле

$$\vec{E}(t) = \vec{e}\mathcal{E}e^{-i\omega_1 t} + c.c.$$

В случае циркулярно-поляризованной волны $\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1 + i\vec{e}_2)$ и для переходов $\Delta m = \pm 1$ (дипольный момент имеет вид $\vec{d}_{12} = |\vec{d}_{12}|\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1 + i\vec{e}_2)$). Кроме того, $\mathcal{E} = |\mathcal{E}|e^{i\varphi}$.

$$\Omega_{\text{Re}}(t) = -2(\text{Re } \vec{d}_{12}, \vec{E}(t)) = -2|\vec{d}_{12}||\mathcal{E}| \cos(\omega_1 t - \varphi)$$

$$\Omega_{\text{Im}}(t) = -2(\text{Im } \vec{d}_{12}, \vec{E}(t)) = -2|\vec{d}_{12}||\mathcal{E}| \sin(\omega_1 t - \varphi)$$

Частота Раби

$$\Omega = 2|\vec{d}_{12}||\mathcal{E}|$$

2-уровневая система во внешнем поле

$$\frac{d}{dt}\vec{v} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 & -\Omega \sin(\omega_1 t - \varphi) \\ \omega_0 & 0 & \Omega \cos(\omega_1 t - \varphi) \\ \Omega \sin(\omega_1 t - \varphi) & -\Omega \cos(\omega_1 t - \varphi) & 0 \end{pmatrix}}_{G(t)} \vec{v}$$

— зависящее от времени уравнение Блоха.

2-уровневая система во внешнем поле

Переход во вращающуюся систему координат (из представления Шредингера)

$$\rho_h(t) \equiv e^{iht} \rho(t) e^{-iht}, \quad X_h(t) = e^{iht} X e^{-iht}$$

$$\frac{d}{dt} \rho(t) = -i[H, \rho(t)] + \sum_j \left(C_j \rho(t) C_j^\dagger - \frac{1}{2} C_j^\dagger C_j \rho(t) - \frac{1}{2} \rho(t) C_j^\dagger C_j \right)$$

2-уровневая система во внешнем поле

Переход во вращающуюся систему координат (из представления Шредингера)

$$\rho_h(t) \equiv e^{iht} \rho(t) e^{-iht}, \quad X_h(t) = e^{iht} X e^{-iht}$$

$$\frac{d}{dt} \rho(t) = -i[H, \rho(t)] + \sum_j \left(C_j \rho(t) C_j^\dagger - \frac{1}{2} C_j^\dagger C_j \rho(t) - \frac{1}{2} \rho(t) C_j^\dagger C_j \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_h(t) &\equiv i h e^{iht} \rho(t) e^{-iht} + e^{iht} \frac{d}{dt} \rho(t) e^{-iht} - i e^{iht} \rho(t) e^{-iht} h = \\ &= -i[H_h(t) - h, \rho_h(t)] + \\ &+ \underbrace{\sum_j \left((C_j)_h(t) \rho_h(t) (C_j)_h^\dagger(t) - \frac{1}{2} (C_j)_h^\dagger(t) (C_j)_h(t) \rho_h(t) - \frac{1}{2} \rho_h(t) (C_j)_h^\dagger(t) (C_j)_h(t) \right)}_{\mathcal{D}_h(\rho(t))} \end{aligned}$$

2-уровневая система во внешнем поле

$$H_d(t) = -\frac{1}{2}\Omega(e^{-i(\omega_1 t - \varphi)}\sigma_+ + e^{i(\omega_1 t - \varphi)}\sigma_-)$$

$$H_0 = \frac{1}{2}\omega_0\sigma_z = \omega_0\sigma_+\sigma_- - \frac{\omega_0}{2}I$$

2-уровневая система во внешнем поле

$$H_d(t) = -\frac{1}{2}\Omega(e^{-i(\omega_1 t - \varphi)}\sigma_+ + e^{i(\omega_1 t - \varphi)}\sigma_-)$$

$$H_0 = \frac{1}{2}\omega_0\sigma_z = \omega_0\sigma_+\sigma_- - \frac{\omega_0}{2}I$$

Положим

$$h = \omega_1\sigma_+\sigma_-$$

2-уровневая система во внешнем поле

$$H_d(t) = -\frac{1}{2}\Omega(e^{-i(\omega_1 t - \varphi)}\sigma_+ + e^{i(\omega_1 t - \varphi)}\sigma_-)$$

$$H_0 = \frac{1}{2}\omega_0\sigma_z = \omega_0\sigma_+\sigma_- - \frac{\omega_0}{2}I$$

Положим

$$h = \omega_1\sigma_+\sigma_-$$

Тогда

$$e^{iht}\sigma_{\pm}e^{-iht} = e^{\pm i\omega_1 t}\sigma_{\pm}$$

$$e^{iht}H_0e^{-iht} = \omega_0e^{i\omega_1 t}\sigma_+\sigma_-e^{-i\omega_1 t} - \frac{\omega_0}{2}I = H_0$$

$$e^{iht}H_d(t)e^{-iht} = -\frac{1}{2}\Omega(e^{i\varphi}\sigma_+ + e^{-i\varphi}\sigma_-)$$

$$H_h - h = (\omega_0 - \omega_1)\sigma_+\sigma_- - \frac{\omega_0}{2}I - \frac{1}{2}\Omega(e^{i\varphi}\sigma_+ + e^{-i\varphi}\sigma_-)$$

2-уровневая система во внешнем поле

Таким образом, во вращающейся система координат

$$\frac{d}{dt}\rho_h(t) = -i[\Delta\omega\sigma_+\sigma_- - \frac{1}{2}\Omega(e^{i\varphi}\sigma_+ + e^{-i\varphi}\sigma_-), \rho_h(t)]$$

$\Delta\omega = \omega_0 - \omega_1$ — расстройка. Если $\Delta\omega = 0$, то переход во вращающуюся систему координат соответствует переходу в представление взаимодействия $h = H_0$.

2-уровневая система во внешнем поле

Уравнения Блоха во вращающейся системе координат

$$\frac{d}{dt}\vec{v}_h = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -\Delta\omega & \Omega \sin(\varphi) \\ \Delta\omega & 0 & \Omega \cos(\varphi) \\ -\Omega \sin(\varphi) & -\Omega \cos(\varphi) & 0 \end{pmatrix}}_{G_h} \vec{v}_h$$

$$\frac{d}{dt}\vec{v}_h(t) = [\vec{\omega}_h, \vec{v}_h(t)], \quad \vec{\omega}_h = (-\Omega \cos \varphi, \Omega \sin \varphi, \Delta\omega)^T.$$

2-уровневая система во внешнем поле

Окончательный ответ в представлении Шредингера имеет вид

$$\vec{v}(t) = e^{-t[\vec{\omega}_1 \times \cdot]} e^{t[\vec{\omega}_h \times \cdot]} \vec{v}_0$$

$$\vec{\omega}_1 = (0, 0, -\omega_1)^T, \quad \vec{\omega}_h = (-\Omega \cos \varphi, \Omega \sin \varphi, \Delta\omega)^T$$

Упражнение. Пусть $\Delta\omega = 0, \varphi = 0$.

Вычислите $e^{-t[\vec{\omega}_1 \times \cdot]} e^{t[\vec{\omega}_h \times \cdot]}$.

2-уровневая система в бозонном равновесном резервуаре

Бозонный резервуар (фононы, фотоны) при обратной температуре β

$$\mathcal{D}(\rho) = \gamma_0(N+1) \left(\sigma_- \rho \sigma_+ - \frac{1}{2} \sigma_+ \sigma_- \rho - \frac{1}{2} \rho \sigma_+ \sigma_- \right) + \\ + \gamma_0 N \left(\sigma_+ \rho \sigma_- - \frac{1}{2} \sigma_- \sigma_+ \rho - \frac{1}{2} \rho \sigma_- \sigma_+ \right),$$

где $N = \frac{1}{e^{\beta\omega_0} - 1}$ — распределение Бозе-Эйнштейна на частоте перехода.

2-уровневая система в бозонном равновесном резервуаре

Бозонный резервуар (фононы, фотоны) при обратной температуре β

$$\mathcal{D}(\rho) = \gamma_0(N+1) \left(\sigma_- \rho \sigma_+ - \frac{1}{2} \sigma_+ \sigma_- \rho - \frac{1}{2} \rho \sigma_+ \sigma_- \right) + \\ + \gamma_0 N \left(\sigma_+ \rho \sigma_- - \frac{1}{2} \sigma_- \sigma_+ \rho - \frac{1}{2} \rho \sigma_- \sigma_+ \right),$$

где $N = \frac{1}{e^{\beta\omega_0} - 1}$ — распределение Бозе-Эйнштейна на частоте перехода.

А где химический потенциал?

2-уровневая система в бозонном равновесном резервуаре

Бозонный резервуар (фононы, фотоны) при обратной температуре β

$$\mathcal{D}(\rho) = \gamma_0(N+1) \left(\sigma_- \rho \sigma_+ - \frac{1}{2} \sigma_+ \sigma_- \rho - \frac{1}{2} \rho \sigma_+ \sigma_- \right) + \\ + \gamma_0 N \left(\sigma_+ \rho \sigma_- - \frac{1}{2} \sigma_- \sigma_+ \rho - \frac{1}{2} \rho \sigma_- \sigma_+ \right),$$

где $N = \frac{1}{e^{\beta\omega_0} - 1}$ — распределение Бозе-Эйнштейна на частоте перехода.

А где химический потенциал?

$\mu = 0$ для фотонов и фононов.

2-уровневая система в бозонном равновесном резервуаре

Отметим, что $\mathcal{D}_h(\rho) = \mathcal{D}(\rho)$ при $h = \omega_0 \sigma_+ \sigma_-$. Поэтому от члена вида $h = \omega_0 \sigma_+ \sigma_-$ можно избавиться перейдя во вращающуюся систему координат:

$$\frac{d}{dt}\rho = \mathcal{D}(\rho)$$

2-уровневая система в бозонном равновесном резервуаре

Отметим, что $\mathcal{D}_h(\rho) = \mathcal{D}(\rho)$ при $h = \omega_0\sigma_+\sigma_-$. Поэтому от члена вида $h = \omega_0\sigma_+\sigma_-$ можно избавиться перейдя во вращающуюся систему координат:

$$\frac{d}{dt}\rho = \mathcal{D}(\rho)$$

Уравнение Блоха:

$$\frac{d}{dt}\vec{v} = G\vec{v} + \vec{b}$$

$$G = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\gamma}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\gamma_0 \end{pmatrix}, \quad \gamma = (2N + 1)\gamma_0$$

Упражнение. Проверить, что это действительно так.

2-уровневая система в бозонном равновесном резервуаре

Решение линейного ОДУ:

$$\frac{d}{dt}\vec{v} = G\vec{v} + \vec{b}$$
$$\vec{v} = e^{Gt}\vec{v}_0 + \frac{e^{Gt} - I}{G}\vec{b}$$

(Данное выражение можно сделать осмысленным и при $\det G = 0$.)

2-уровневая система в бозонном равновесном резервуаре

Решение линейного ОДУ:

$$\frac{d}{dt}\vec{v} = G\vec{v} + \vec{b}$$
$$\vec{v} = e^{Gt}\vec{v}_0 + \frac{e^{Gt} - I}{G}\vec{b}$$

(Данное выражение можно сделать осмысленным и при $\det G = 0$.)

Стационарное решение:

$$G\vec{v}_{st} + \vec{b} = 0$$
$$\vec{v}_{st} = -G^{-1}\vec{b}$$

2-уровневая система в бозонном равновесном резервуаре

Решение линейного ОДУ:

$$\frac{d}{dt}\vec{v} = G\vec{v} + \vec{b}$$
$$\vec{v} = e^{Gt}\vec{v}_0 + \frac{e^{Gt} - I}{G}\vec{b}$$

(Данное выражение можно сделать осмысленным и при $\det G = 0$.)

Стационарное решение:

$$G\vec{v}_{st} + \vec{b} = 0$$
$$\vec{v}_{st} = -G^{-1}\vec{b}$$

Решение в терминах стационарного решения

$$\vec{v} = e^{Gt}(\vec{v}_0 - \vec{v}_{st}) + \vec{v}_{st}$$
$$\vec{v} - \vec{v}_{st} = e^{Gt}(\vec{v}_0 - \vec{v}_{st})$$

2-уровневая система в бозонном равновесном резервуаре

В данном случае:

$$e^{Gt} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{\gamma}{2}t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\frac{\gamma}{2}t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\gamma t} \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_{st} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\gamma_0}{\gamma} \end{pmatrix}$$

2-уровневая система в бозонном равновесном резервуаре

В данном случае:

$$e^{Gt} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{\gamma}{2}t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\frac{\gamma}{2}t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\gamma t} \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_{st} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\gamma_0}{\gamma} \end{pmatrix}$$

$$\rho_{st} = \begin{pmatrix} \frac{1 - \frac{\gamma_0}{\gamma}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1 + \frac{\gamma_0}{\gamma}}{2} \end{pmatrix}$$

2-уровневая система в бозонном равновесном резервуаре

В данном случае:

$$e^{Gt} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{\gamma}{2}t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\frac{\gamma}{2}t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\gamma t} \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_{st} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\gamma_0}{\gamma} \end{pmatrix}$$

$$\rho_{st} = \begin{pmatrix} \frac{1 - \frac{\gamma_0}{\gamma}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1 + \frac{\gamma_0}{\gamma}}{2} \end{pmatrix}$$

Отношение населённостей

$$\frac{1 - \frac{\gamma_0}{\gamma}}{1 + \frac{\gamma_0}{\gamma}} = \frac{1 - \frac{1}{2N+1}}{1 + \frac{1}{2N+1}} = \frac{N}{N+1} = \frac{\frac{1}{e^{\beta\omega_0} - 1}}{\frac{1}{e^{\beta\omega_0} - 1} + 1} = \frac{1}{1 + e^{\beta\omega_0} - 1} = e^{-\beta\omega_0}$$

— соответствует распределению Гиббса.

2-уровневая система в бозонном равновесном резервуаре

Решение

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_{0x} e^{-\frac{\gamma}{2}t} \\ v_{0y} e^{-\frac{\gamma}{2}t} \\ v_{0z} e^{-\gamma t} - (1 - e^{-\gamma t}) \frac{\gamma_0}{\gamma} \end{pmatrix}$$

2-уровневая система в бозонном равновесном резервуаре

Решение

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_{0x} e^{-\frac{\gamma}{2}t} \\ v_{0y} e^{-\frac{\gamma}{2}t} \\ v_{0z} e^{-\gamma t} - (1 - e^{-\gamma t}) \frac{\gamma_0}{\gamma} \end{pmatrix}$$

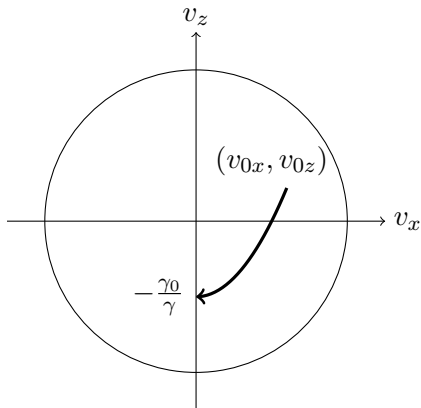
Нарисуем динамику в плоскости $v_x - v_z$:

$$e^{-\frac{\gamma}{2}t} = \frac{v_x}{v_{0x}}$$

$$v_z = \left(v_{0z} + \frac{\gamma_0}{\gamma} \right) e^{-\gamma t} - \frac{\gamma_0}{\gamma} = \left(v_{0z} + \frac{\gamma_0}{\gamma} \right) \frac{v_x^2}{v_{0x}^2} - \frac{\gamma_0}{\gamma}$$

— парабола с минимумом в точке $\left(0, -\frac{\gamma_0}{\gamma} \right)$.

2-уровневая система в бозонном равновесном резервуаре



2-уровневая система в бозонном равновесном резервуаре

$$\frac{d}{dt}\rho = -i[\omega_0\sigma_+\sigma_-, \rho] + \mathcal{D}(\rho)$$

