

Domains in semigroups

Artem Shevlyakov

~~Malcev Meeting 2011~~

~~Омский алгебраический семинар~~

Омский алгебраический семинар

The unions of algebraic sets over a field

Suppose $V_k(f = 0), V_k(g = 0)$ are the solution sets of polynomials $f, g \in k[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Then the union $V_k(f) \cup V_k(g)$ is also algebraic, since

$$V_k(f) \cup V_k(g) = V_k(fg = 0).$$

One can repeat this trick for any commutative associative ring without zero-divisors (domains) not merely for a field k .

Equational domain

An algebraic structure of a language $\mathcal{L}$ is an **equational domain** if any finite union of algebraic sets is algebraic.

In [DMR4] (E. Daniyarova, A. Myasnikov, V. Remeslennikov “Algebraic geometry over algebraic structures IV: Equational domains and co-domains”) was proved that a group G is an equational domain iff the set $V_G(x = 1) \cup V_G(y = 1)$ is algebraic. In other words, there exists a system of equations $\mathbf{S} = \{w_i(x, y) = 1 \mid i \in I\}$ such that $V_G(\mathbf{S}) = V_G(x = 1) \cup V_G(y = 1)$.

Different group theories

Let G be a group. One can consider the different group languages

- 1 $\mathcal{L}_1 = \{\cdot, ^{-1}, 1\};$
- 2 $\mathcal{L}_G = \{\cdot, ^{-1}, 1\} \cup \{g | g \in G\};$
- 3 $\mathcal{L}_H = \{\cdot, ^{-1}, 1\} \cup \{h | h \in H \leq G\};$

As each language determines the set of atomic formulas (equations), a group G maybe an equational domain in $\mathcal{L}_G$ and may not in $\mathcal{L}_1$.

Statement[DMR4]

Any group in the language $\mathcal{L}_1$ is not an equational domain.

Equational domains in the language $\mathcal{L}_G$

Definition

An element $1 \neq x \in G$ is called a **zero-divisor** if there exists $1 \neq y \in G$ such that $[x, y^g] = 1$ for all $g \in G$.

Theorem[DMR4]

A group G is an equational domain in the language $\mathcal{L}_G$ iff it has no zero-divisors.

In the language $\mathcal{L}_G$ the next groups are equational domains

- 1 non-abelian free group (в отличие от свободных моноидов);
- 2 simple non-abelian group (e.g. $A_n, n \geq 5$);

Абелевы группы не являются областями!

Are there equational domains in semigroups?

For a semigroup S it is sufficient to find a system of equations $\mathbf{S}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ with $V_S(\mathbf{S}) = V_S(x_1 = x_2) \cup V_S(x_3 = x_4)$.

A.A. Klyachko's idea

Suppose $S = A_5$. As the group A_5 is an equational domain in the language $\mathcal{L}_G$, there exists a system $\mathbf{S}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ with $V_S(\mathbf{S}) = V_S(x_1 = x_2) \cup V_S(x_3 = x_4)$. However, $\mathbf{S}$ may contain the variables in negative powers. As $|A_5| = 60$, then $x^{-1} = x^{59}$. Thus, one can replace negative powers in $\mathbf{S}$ to the sufficiently large positive ones. Finally, $\mathbf{S}$ becomes the system of the semigroup language $\mathcal{L}_S = \{\cdot\} \cup \{s | s \in S\}$. Thus, the semigroup A_5 is an equational domain in the language $\mathcal{L}_S$.

What did we prove?

Theorem

Any semigroup in the standard semigroup language $\mathcal{L}_0 = \{\cdot\}$ is not an equational domain.

This result is a simple fact for groups, however for semigroups its proof is not trivial.

А если рассматривать полугруппу S в языке $\mathcal{L}_S = \{\cdot\} \cup \{s \mid s \in S\}$ (это позволяет использовать элементы полугруппы S как параметры в уравнениях). Алгебраических множеств над языком $\mathcal{L}_S$ становится больше и (вполне возможно) множество $V_S(x_1 = x_2) \cup V_S(x_3 = x_4)$ может стать алгебраическим.

Супер-теорема

Пусть S полугруппа, но не группа. Тогда S не может быть эквациональной областью в языке $\mathcal{L}_S$.

Но для её доказательства очень мало информации. Поэтому мы сконцентрировались на тех полугруппах, которые легко отличить от групп.

Инверсные полугруппы

Полугруппа называется **инверсной**, если для любого $s \in S$ существует элемент s^{-1} такой, что $ss^{-1}s = s$, $s^{-1}ss^{-1} = s^{-1}$.

Теорема

Инверсная полугруппа является группой тогда и только тогда, когда в ней существует единственный идемпотент.

Операция $^{-1}$ является алгебраической в инверсной полугруппе, поэтому мы будем рассматривать полугруппы в языке

$$\mathcal{L}_{S-inv} = \mathcal{L}_S \cup \{^{-1}\}$$

Свойства инверсных полугрупп

Let E be the set of idempotents of an inverse semigroup S . Then

- 1 all elements of E commute, i.e. idempotents of an inverse semigroup form a semilattice;
- 2 $ss^{-1} \in E$;
- 3 for any $e \in E$, $s \in S$ it holds $ss^{-1} \in E$, $ses^{-1} \in E$;

Let $e, f \in E$ be idempotents of an inverse semigroup S . Define a partial order over E by

$$e \leq f \Leftrightarrow ef = e.$$

Представление инверсных полугрупп

Let $\mathcal{M}$ be a set and $T(\mathcal{M})$ the set of all partial injections defined on the set $\mathcal{M}$. For example, if $\mathcal{M} = \{1, 2, 3\}$ then $T(\mathcal{M})$ consists of the mappings:

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, f_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, f_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$f_7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, f_8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, f_9 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$f_{10} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, f_{11} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, f_{12} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$f_{13} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, f_{14} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, f_{15} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$f_{16} = \emptyset.$$

Легко показать, что $T(\mathcal{M})$ — инверсная полугруппа. Но верна и

Теорема (Вагнер-Престон)

Любая инверсная полугруппа вкладывается в $T(\mathcal{M})$ для некоторого множества $\mathcal{M}$.

Это позволяет смотреть на элементы инверсной полугруппы S как на отображения:

$$\mathbf{dom}(f) = \{\mu \in \mathcal{M} \mid \phi \text{ is defined at } m\}, \quad (1)$$

$$\mathbf{im}(f) = \{\mu \in \mathcal{M} \mid \exists \eta \in \mathcal{M} \text{ such that } \mu f = \eta\}. \quad (2)$$

Свойства отображений

- 1 if $f \in T(\mathcal{M})$ is idempotent ($ff = f$), then $\mathbf{dom}(f) = \mathbf{im}(f)$ and $\mu f = \mu$ for any $\mu \in \mathbf{dom}(f)$;
- 2 for any $f \in T(\mathcal{M})$ the map ff^{-1} is idempotent and $\mathbf{dom}(ff^{-1}) = \mathbf{dom}(f)$;
- 3 for any idempotents $e, f \in T(\mathcal{M})$ it holds $\mathbf{dom}(ef) = \mathbf{dom}(e) \cap \mathbf{dom}(f)$;
- 4 for idempotents $e \leq f$ we have $\mathbf{dom}(e) \subseteq \mathbf{dom}(f)$.

Что уже известно

В статье B. Rosenblatt “On equations in inverse semigroups” была доказана

Теорема

Над любой инверсной полугруппой S (которая не является группой) не существует уравнения $w(x_1, x_2, x_3, x_4) = w'(x_1, x_2, x_3, x_4)$ такого, что $V_S(w = w') = V_S(x_1 = x_2) \cup V_S(x_3 = x_4)$.

Но из этой теоремы ещё не следует отсутствие эквациональных областей среди инверсных полугрупп. Но из метода доказательства можно извлечь полезные идеи.

Хорошие термы

A term $t(x)$ of a language $\mathcal{L}_{S-inv}$ is called **good**, if one of the following holds:

- 1 $t(x)$ is empty;
- 2 $t(x) = x$;
- 3 there exist constants $s_1, s_2, \dots, s_n \in S$ such that either

$$t(x) = s_1 x s_1^{-1} s_2 x s_2^{-1} \dots s_n x s_n^{-1}$$

А зачем нужны хорошие термы

Let E be the set of idempotents of an inverse semigroup S . Then

- 1 if $e \in E$ then $t(e) \in E$ for any good term $t(x)$;
- 2 if $e, f \in E$ and $t(x)$ is good, then $t(e f) = t(e) t(f)$;
- 3 if $e \leq f$ then for any good term $t(x)$ we have $t(e) \leq t(f)$.
- 4 for every term $t(x)$ of a language $\mathcal{L}_{S-inv}$ there exists a good one $t'(x)$ such that $t(e) = t'(e) d$ for any $e \in E$, where d is a constant;
- 5 for every term $t(x, y)$ of a language $\mathcal{L}_{S-inv}$ there exist good terms $t'(x), r'(y)$ such that $t(e, f) = t'(e) r'(f) d$ for any $e, f \in E$, where d is a constant;

Основной результат

Теорема

Если S — инверсная полугруппа, и S не является группой, то в языке $\mathcal{L}_{S-inv}$ полугруппа S не может быть эквациональной областью.

Идея доказательства

Так как S не является группой, то в ней существуют по крайней мере два идемпотента e, f . Так как множество идемпотентов инверсной полугруппы образует полурешётку, то имеем ровно два случая:

- 1 e, f несравнимы относительно порядка $\leq$.
- 2 $f < e$ и все идемпотенты линейно упорядочены.

Рассмотрение первого случая

Рассматриваем объединение $V_S(x = e) \cup V_S(x = f)$. Предположим, что оно совпадает с решением системы S . Тогда доказывается, что точка $x = ef$ также принадлежит решению системы S , что противоречит предположению.

Напомним, что над подполугруппой идемпотентов произвольное уравнение системы S записывается в виде:

$$t(x)d = t'(x)d',$$

где $t(x)$ — хороший терм. Дано

$$t(e)d = t'(e)d',$$

$$t(f)d = t'(f)d'.$$

Требуется доказать

$$t(ef)d = t'(ef)d', \text{ или}$$

$$t(e)t(f)d = t'(e)t'(f)d'.$$

Второй случай

Рассматриваем объединение $V_S(x = e) \cup V_S(y = e)$. Предположим, что оно совпадает с решением системы $\mathbf{S}$. Тогда доказывается, что точка (f, f) также принадлежит решению системы $\mathbf{S}$, что противоречит предположению.

Для уравнения системы $\mathbf{S}$ существуют хорошие термы $t(x), r(y), t'(x), r'(y)$ и константы d, d' такие, что

$$t(e)r(e)d = t'(e)r'(e)d',$$

$$t(e)r(f)d = t'(e)r'(f)d',$$

$$t(f)r(e)d = t'(f)r'(e)d'.$$

И мы доказываем, что

$$t(f)r(f)d = t'(f)r'(f)d'.$$