О проблеме стабилизации периодических возмущений положения равновесия для двумерного кинетического уравнения Бродвелла.

Е.В. Радкевич, О.А. Васильева, Г. А. Филлиппов

Хорошо известно, особенно при численных экспериментах рассогласование правой и левой частей кинетического уравнения Больцмана. В этом смысле интересны результаты, полученные К. С. Платоновой, А. В. Боровских [1]. Не совершенство кинетического уравнения Больцмана к необходимости построения так называемых дискретных кинетических уравнений [2]-[7]. В докладе будет исследована проблема стабилизации периодических возмущений положения равновесия для двумерного кинетического уравнения Бродвелла:

$$
\begin{aligned}
\partial_t n_1 + \partial_x n_1 &= \frac{1}{\varepsilon}(n_3 n_4 - n_1 n_2), \\
\partial_t n_2 - \partial_x n_2 &= \frac{1}{\varepsilon}(n_3 n_4 - n_1 n_2), \\
\partial_t n_3 + \partial_y n_3 &= \frac{1}{\varepsilon}(n_1 n_2 - n_3 n_4), \\
\partial_t n_4 - \partial_y n_4 &= \frac{1}{\varepsilon}(n_1 n_2 - n_3 n_4),
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Метод фурье решений приводит к препятствиям к доказательству стабилизации коэффициентов фурье на кресте

$$(k^2 - l^2) l = 0.$$

Система уравнений для коэффициентов фурье на кресте одинакова с системой для одномерной модели Бродвелла

$$
\begin{aligned}
\partial_t f_1 + \partial_x f_1 &= \frac{1}{\varepsilon}(f_3 f_4 - f_1 f_2), \\
\partial_t f_2 - \partial_x f_2 &= \frac{1}{\varepsilon}(f_3 f_4 - f_1 f_2), \\
\partial_t f_3 + \partial_x f_3 &= \frac{1}{\varepsilon}(f_1 f_2 - f_3 f_4), \\
\partial_t f_4 - \partial_x f_4 &= \frac{1}{\varepsilon}(f_1 f_2 - f_3 f_4),
\end{aligned}
\tag{2}
$$

В чем проблематичность этой модели. Для одномерной модели частицы с равными скоростями разнесены по разным группам(пары f_1, f_3 и f_2, f_4). Правая же часть моделирует интеграл столкновений, построенный для четырех групп частиц с жестким условием РАЗНОСТИ ИХ ГРУППОВЫХ СКОРОСТЕЙ. Таким образом, мы имеем **РАССОГЛАСОВАНИЕ правой и левой частей модели (2)**. Но это справедливо и для много скоростных многомерных дискретных моделей кинетики, правая часть которых построена на основе разбиения частиц по группам, с различными групповыми скоростями. Как мы показали выше, для двумерной модели Бродвелла проблема **РАССОГЛАСОВАНИЕ правой и левой частей** возникает на " кресте " . Естественно, та же проблема **РАССОГЛАСОВАНИЕ правой и левой частей** возникнет для много скоростных многомерных дискретных моделей кинетики на аналоге " кресте " модели Бродвелла, который назовем " обобщенном крестом". Отметим, что Уравнение Больцмана можно рассматривать как "континуальную сумму" моделей типа Бродуэлла. Рассогласование правой и левой частей уравнения Больцмана отмечено в [1].

Рассогласование правой и левой частей в (2) приводит в методе Фурье к препятствиям построения ануляторов секулярных членов соответствующей проекции. Для одномерной модели (2) препятствия(например u проекции):

$$\sqrt{v_e}v_k^0 + \sqrt{z_e}z_k^0 = 0,\ \sqrt{w_e}w_k^0 + \sqrt{u_e}u_k^0 = 0,\ k \in Z_0. \tag{3}$$

Такие препятствия не позволяют построить решение задачи для любых начальных данных, периодических возмущений положения равновесия(включая распределения максвелла-бегущие волны):

$$f_1 = f_3 = 1 + \varepsilon^2\varphi(t-x),\ f_1 = f_3 = 1 + \varepsilon^2\varphi(t+x)).$$

Ометим, что у модели Карлемана [7](так же и для моделей Годунова-Султангазина [2], [3])

$$\begin{aligned} \partial_t f_1 + \partial_x f_1 &= \frac{1}{\varepsilon}(f_2^2 - f_1^2), \\ \partial_t f_2 - \partial_x f_2 &= -\frac{1}{\varepsilon}(f_2^2 - f_1^2), \end{aligned} \tag{4}$$

нет распределений максвелла: $(f_1(t-x)), f_2(t+x))$, поэтому периодические возмущения любых положений равновесия стабилизируются экспоненциально быстро [8]-[10].

Доклад будет посвящен исследованию природы стабилизации периодических возмущений положения равновесия к распределению максвелла(бегущим волнам.)

Список литературы

[1] *К. С. Платонова, А. В. Боровских* , Групповой анализ од- номерного уравнения Больцмана. Инварианты и проблема замыкания моментной системы// ТМФ, 2021, том 208, номер 3, 367Ц386

[2] *С. К. Годунов, У. М. Султангазин* О дискретных моделях кинетического уравнения Больцмана// Успехи МН(1974), т. XXVI, в. 3(159), стр. 3-51

[3] Султангазин У.М. Дискретные нелинейные Модели уравнения Больцмана. Алма- Ата: Наука, 1985.

[4] Euler N., Steeb W.-H. Painleve Test and Discrete Boltzmann Equations.// Aust. J. Phys., 42, 1989, P.1-10.

[5] *T. E. Broadwell* Study of rarified shear flow by the discrete velocity method// J. of Fluid Mechanics 19:3(1964)

[6] *Веденяпин В. В.* Кинетические уравнения Больцмана и Власова
М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. - 112 с. - ISBN 5-9221-0187-0.

[7] *Т. К а р л е м а н*, Математические задачи кинетической теории газов// М., ИЛ, 1960.

[8] *E. V. Radkevich, O. A. Vasil′eva, S. A. Dukhnovskii*, Local equilibrium of the Carleman equation//Journal of Mathematical Sciences, Vol. 207, No. 2, May, 2015

[9] *О.В. Ильин*, Изучение существования решений и устойчивости кинетической системы Карлемана// Журнал вычислительной математики и математической физики, (2007) вып. 47, N 12, стр. 2076-2087

[10] *Е.В. Радкевич, О. А. Васильева, С. А. Духновский*, О природе локального равновесия уравнений Карлемана и Годунова-Султангазина// Современная математика. Фундаментальные направления. Том 60 (2016). С. 1-58 (2016)

[11] *E. V. Radkevich, O. A. VasilŸeva, G. A. Filippov* On stabilization rate of solutions of the Cauchy problem for the two-dimensional kinetic Broadwell equation with periodic initial data (a regular process)//Eurasian J. of mathematical and computer applications, 2025. .

[12] *Е.В. Радкевич, О.А. Васильева* О скорости максвеллизации процесса, моделируемого одномерной кинетической моделью Бродвелла(принята к публикации), , 2025.