

Топологическая интерпретация универсальных меток элементов диаграмм узлов

Никонов Игорь Михайлович

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

- 1 Введение
- 2 Универсальные метки элементов узлов
- 3 Гомотопические классы элементов узлов
 - Биквандлоид
 - Кроссоиды
- 4 Комплекс пересечений
- 5 Инварианты

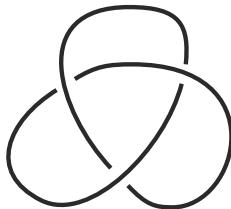


Рис.: Узел

Топологический подход

Комбинаторный подход

Определение узла

вложения $S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ / изотопии

диаграммы/движения
Рейде-
мейстера

Рейде-
мейстера

Инварианты

индекс зацепления, род, группа узла, гиперболический объем, полином Александера

индекс зацепления, полиномиальные инварианты, коцикл (би)квандла, гомологии Хованова

Движения Рейдемейстера

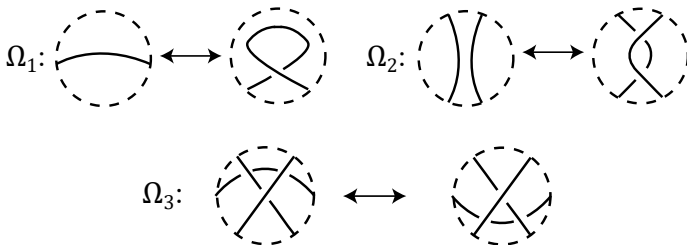


Рис.: Движения Рейдемейстера

Элементы диаграммы узла

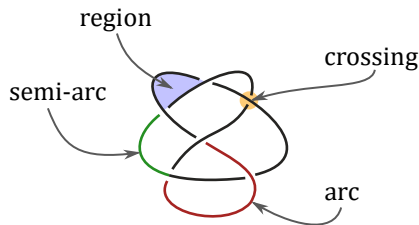
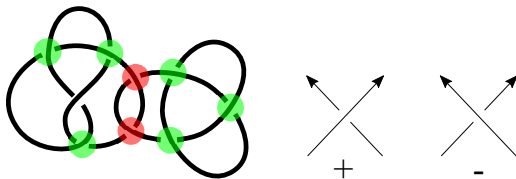


Рис.: Элементы диаграммы узла D

Обозначим

- $\mathcal{A}(D)$ — множество дуг диаграммы D ;
- $\mathcal{SA}(D)$ — множество полудуг диаграммы D ;
- $\mathcal{C}(D)$ — множество перекрестков диаграммы D ;
- $\mathcal{R}(D)$ — множество областей диаграммы D .

Пример комбинаторного инварианта



Индекс зацепления двухкомпонентного зацепления $L = K_1 \cup K_2$

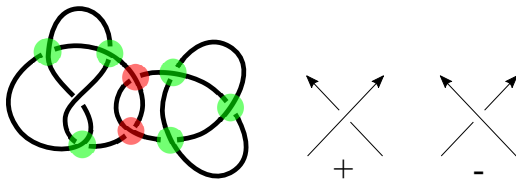
$$lk(K_1, K_2) = \frac{1}{2} \sum_{c \in K_1 \cap K_2} sgn(c)$$

использует два вида меток перекрестков:

- компонентный тип: чистые и смешанные перекрестки;
- знак перекрестка.

Другие примеры используют метки дуг (раскраски квандлами), полудуг (раскраски биквандлами), перекрестков (скобки четности и индексные многочлены) и областей (теневые коциклы, квандлов).

Пример комбинаторного инварианта



Индекс зацепления двухкомпонентного зацепления $L = K_1 \cup K_2$

$$lk(K_1, K_2) = \frac{1}{2} \sum_{c \in K_1 \cap K_2} sgn(c)$$

использует два вида меток перекрестков:

- компонентный тип: чистые и смешанные перекрестки;
- знак перекрестка.

Другие примеры используют метки дуг (раскраски квандлами), полудуг (раскраски биквандлами), перекрестков (скобки четности и индексные многочлены) и областей (теневые коциклы квандлов).

Инвариантные метки элементов диаграммы

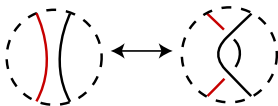


Рис.: Условие инвариантности для второго движения Рейдемейстера

Инвариантные метки = образы универсальных меток

Универсальные инвариантные метки = классы эквивалентности
элементов диаграмм по модулю движений Рейдемейстера

Инвариантные метки элементов диаграммы

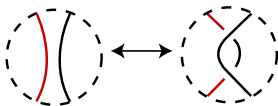


Рис.: Условие инвариантности для второго движения Рейдемейстера

Инвариантные метки = образы универсальных меток

Универсальные инвариантные метки = классы эквивалентности
элементов диаграмм по модулю движений Рейдемейстера

Инвариантные метки элементов диаграммы

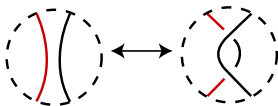


Рис.: Условие инвариантности для второго движения Рейдемейстера

Инвариантные метки = образы универсальных меток

Универсальные инвариантные метки = классы эквивалентности
элементов диаграмм по модулю движений Рейдемейстера

Элементы диаграмм с комбинаторной точки зрения

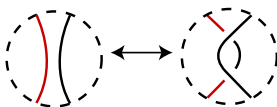


Рис.: Условие инвариантности для второго движения Рейдемейстера

Универсальные инвариантные метки = классы эквивалентности элементов диаграмм по модулю движений Рейдемейстера

Таким образом, узлу K сопоставляются множества:

- дуг узла $\mathcal{A}(K)$;
- полудуг узла $\mathcal{SA}(K)$;
- перекрестков узла $\mathcal{C}(K)$;
- областей узла $\mathcal{R}(K)$.

Элементы диаграмм с комбинаторной точки зрения

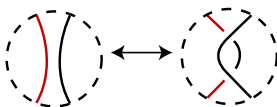


Рис.: Условие инвариантности для второго движения Рейдемейстера

Универсальные инвариантные метки = классы эквивалентности элементов диаграмм по модулю движений Рейдемейстера

Таким образом, узлу K сопоставляются множества:

- дуг узла $\mathcal{A}(K)$;
- полудуг узла $\mathcal{SA}(K)$;
- перекрестков узла $\mathcal{C}(K)$;
- областей узла $\mathcal{R}(K)$.

Элементы диаграмм с топологической точки зрения

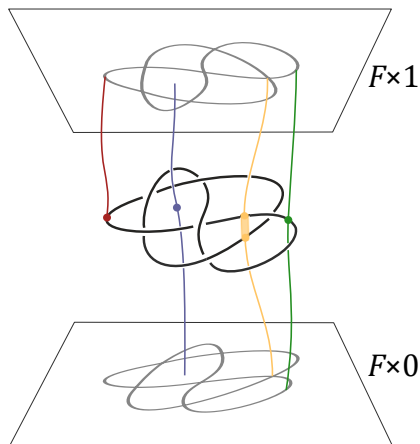


Рис.: Топологическая интерпретация элементов диаграммы

Инварианты и коинварианты узлов

Коинвариант узла — это инвариант, определенный с точностью до изотопии.

Инварианты узлов

- числовые инварианты (сложность, род, индекс зацепления, число раскрасок, инвариант Расмуссена, гиперболический объем, ...)
- полиномиальные инварианты (Александера, Джонса, HOMFLY)
- инварианты конечного порядка

Коинварианты узлов

- группа узла
- гомологии (Хованова, Хегора–Флоера)
- раскраски квандлами
- гомотопический тип Хованова

Инварианты и коинварианты

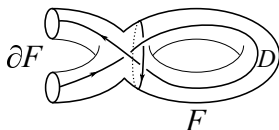
Определение

Инвариант категории $\mathcal{D}$ — это функтор $F: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$, такой что для любого морфизма $f: d \rightarrow d'$ $F(f) = id_{F(d)}$.

Коинвариант категории $\mathcal{D}$ — это функтор $F: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$, такой что для любого морфизма $f: d \rightarrow d'$ морфизм $F(f): F(d) \rightarrow F(d')$ является изоморфизмом.

Пример

1. Пусть $\mathcal{C}$ — малая категория. Любой инвариант $F: \mathcal{D}_s \rightarrow \mathcal{C}$ категории диаграмм узлов является инвариантом узлов (в обычном смысле) со значениями в $Ob(\mathcal{C})$.
2. Пусть Q — квандл. Соответствие $D \mapsto Col_Q(D)$, сопоставляющее диаграмме множество раскрасок ее дуг квандлом Q , есть коинвариант $Col_Q: \mathcal{D}_s \rightarrow Set$.



Определение

Пусть F — компактная ориентированная связная поверхность.

Тангл — это вложение $T: M \rightarrow F \times (0, 1)$ ориентированного компактного 1-многообразия M в утолщение поверхности F .

Диаграмма тангла — это вложение D графа с вершинами валентности 4 и 1 в F , такое что вершины валентности 4 имеют структуру прохода–перехода.

Стратификация танглов

Пространство танглов $\Sigma = \Sigma(F, Y)$ стратифицируется по отношению к проекции $p: F \times I \rightarrow F$:

$$\Sigma = \Sigma_0 \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \dots$$

где

- танглы в Σ_0 имеют только двойные точки;
- танглы в Σ_1 имеют одну особую точку коразмерности 1;
- танглы в Σ_2 имеют одну особую точку коразмерности 2 или две точки коразмерности 1.



Рис.: Особенности коразмерности 1

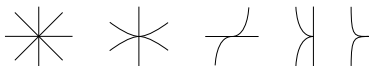


Рис.: Особенности коразмерности 2

Категория диаграмм тангла

жесткая

комбинаторная

$$\mathfrak{D}_s$$

Ob = диаграммы танглов

Mor = последовательности движений Рейдемейстера

$$\mathfrak{D}_h$$

Ob = диаграммы танглов

Mor = последовательности движений Рейдемейстера по модулю сокращений, соотношений коразмерности 2 и дальней коммутативности

топологическая

$$\mathfrak{T}_s$$

Ob = танглы в общем положении

Mor = Σ_1 -трансверсальные изотопии танглов с точностью до гомотопии

$$\mathfrak{T}_h$$

Ob = танглы в общем положении

Mor = изотопии танглов с точностью до гомотопии

гомотопическая

Разрешение особенностей коразмерности 2

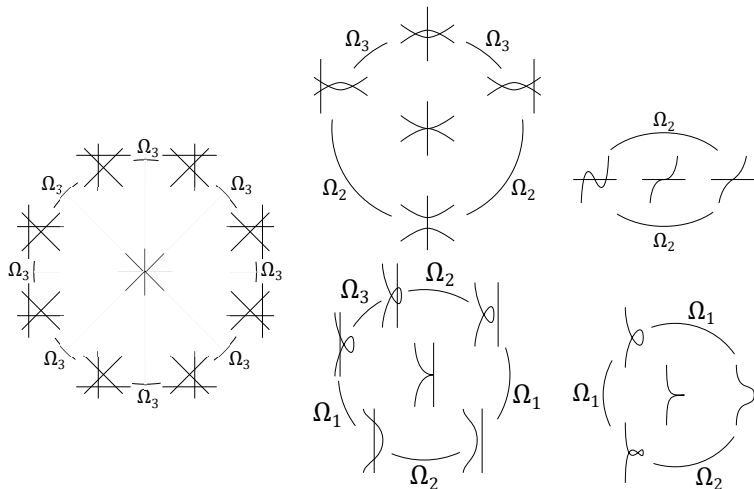


Рис.: Разрешение особенностей коразмерности 2

Элементы диаграмм как функторы

Пусть D — диаграмма тангла и $\mathcal{E} = \mathcal{A}, \mathcal{SA}, \mathcal{C}$ или $\mathcal{R}$. Отображения $D \mapsto \mathcal{E}(D)$ образуют функтор

$$\mathcal{E}: \mathfrak{D}_s \rightarrow \mathbf{Rel},$$

такой что

- для изотопии $f: D \rightarrow D'$, $\mathcal{E}(f): \mathcal{E}(D) \rightarrow \mathcal{E}(D')$ является биекцией.
- для движения Рейдемейстера $f: D \rightarrow D'$, $e' \in \mathcal{E}(f)(e)$ тогда и только тогда, когда элементы e и e' имеют общую точку вне области движения.

Следовательно, внутренние элементы движения f никуда не отображаются.

Элементы диаграмм: первое движение Рейдемейстера

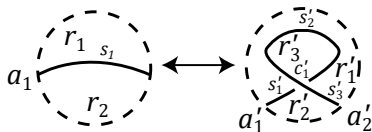


Рис.: Первое движение Рейдемейстера

$$\mathcal{A}(\Omega_1) : a_1 \mapsto \{a'_1, a'_2\},$$

$$\mathcal{SA}(\Omega_1) : s_1 \mapsto \{s'_1, s'_3\},$$

$$\mathcal{R}(\Omega_1) : r_1 \mapsto r'_1, r_2 \mapsto r'_2,$$

$$\mathcal{A}(\Omega_1^\dagger) : a'_1 \mapsto a_1, a'_2 \mapsto a_1,$$

$$\mathcal{SA}(\Omega_1^\dagger) : s'_1 \mapsto s_1, s'_2 \mapsto \emptyset, s'_3 \mapsto s_1,$$

$$\mathcal{R}(\Omega_1^\dagger) : r'_1 \mapsto r_1, r'_2 \mapsto r_2, r'_3 \mapsto \emptyset,$$

$$\mathcal{C}(\Omega_1^\dagger) : c'_1 \mapsto \emptyset.$$

Определение

Определим отношения:

- (сродство) $x_1 \approx_c x_2 \Leftrightarrow \exists f : f_*(x_1) \cap f_*(x_2) \neq \emptyset$;
- (эквивалентность в сильном смысле) порождается правилом $\forall f : D \rightarrow D' \forall y_i \in f_*(x_i) \ x_1 \sim_D^s x_2 \Rightarrow y_1 \sim_{D'}^s y_2$;
- (эквивалентность в слабом смысле) порождается правилом $\forall f : D \rightarrow D' \forall y \in f_*(x) \text{ верно } x \sim^w y$.

$$1. \ x_1 \approx_D x_2 \implies x_1 \sim_D^s x_2 \implies x_1 \sim^w x_2.$$

2. $\approx_D$ рефлексивно и симметрично, но не транзитивно в общем случае.

Эквивалентность в сильном и слабом смысле элементов диаграмм

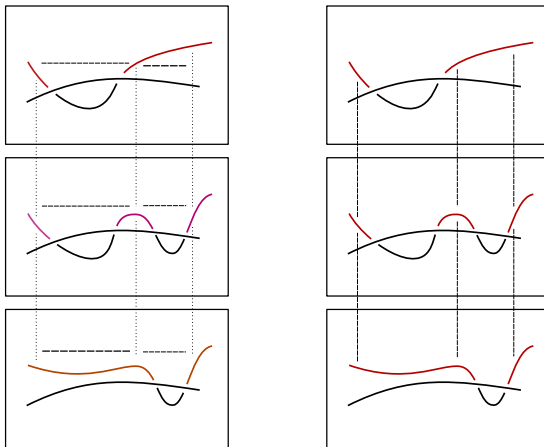


Рис.: Эквивалентность в сильном и слабом смысле

Указатель дуги

Определение

Пусть дан тангл $T \in \Sigma_0$ и его диаграмма D . Обозначим

$$M_T = \overline{F \times [0, 1]} \setminus N(T).$$

Указатель дуги — это вложение $\gamma: ([0, 1]; 0; 1) \hookrightarrow (M_T; F \times \{1\}; \partial N(T))$.

Для дуги $a \in \mathcal{A}(D)$ (и точки $x \in a$) определяется *вертикальный указатель дуги* γ_a .

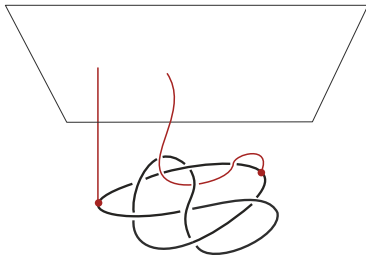


Рис.: Указатель дуги

Топологическое сродство дуг

Предложение

Пусть $a, b \in \mathcal{A}(D)$. Тогда $a \approx b$, если и только если между вертикальными указателями дуг γ_a и γ_b есть вложенный квадрат:

$$([0, 1] \times [0, 1], 0 \times [0, 1], 1 \times [0, 1], [0, 1] \times 0, [0, 1] \times 1) \hookrightarrow (M_T, \gamma_a, \gamma_b, F \times 1, \partial N(T)).$$

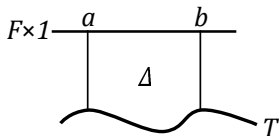


Рис.: Вложенный квадрат между γ_a и γ_b

Для указателей дуг γ, γ' обозначим $\gamma \approx^t \gamma'$, если между ними есть вложенный квадрат.

Нетранзитивность сродства дуг

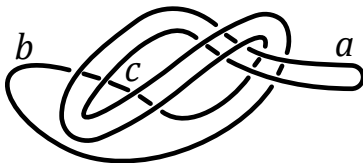
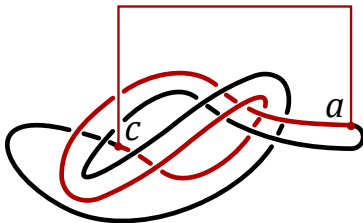


Рис.: $a \approx b$, $b \approx c$, но $a \not\approx c$

Нетранзитивность сродства дуг



Предположим, что между γ_a и γ_c есть вложенный квадрат Δ . Тогда край $\partial\Delta$ — тривиальный узел.

Эквивалентность дуг в сильном смысле

Предложение

Обозначим транзитивное замыкание отношения $\approx^t$ через $\sim^t$. Для указателей дуг γ, γ' условие $\gamma \sim^t \gamma'$ равносильно изотопности γ и γ' .

Следствие

$\forall a, b \in \mathcal{A}(D) \ a \sim^s b \Leftrightarrow \gamma_a$ изотопен γ_b .

Универсальный коинвариант дуг

Определение

Назовем множество классов изотопии указателей дуг *множеством дуг тангла T в сильном смысле* и обозначим через $\tilde{\mathcal{A}}_T^s$.

Теорема

Множество $\tilde{\mathcal{A}}^s(T)$ является универсальным коинвариантом дуг.

Универсальный коинвариант дуг

Определение

Назовем множество классов изотопии указателей дуг *множеством дуг тангла* T в сильном смысле и обозначим через $\tilde{\mathcal{A}}_T^s$.

Теорема

Множество $\tilde{\mathcal{A}}^s(T)$ является универсальным коинвариантом дуг.

Определение

Пусть N — подмногообразие в многообразии M . Движение N в M — это путь f_t , $t \in [0, 1]$, в $\text{Diff}(M)$, такой что $f_0 = \text{id}$ и $f_1(N) = N$.

Движение f_t называется *стационарным*, если $f_t(N) = N$ для всех $t \in [0, 1]$.

Два движения f_t и g_t эквивалентны, если движение $g_t^{-1} \circ f_t$ гомотопно (с фиксированными концами) стационарному движению. Множество $\mathcal{M}(M, N)$ классов эквивалентности движений называется *группой движений*.

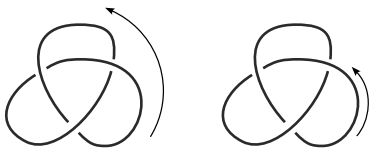


Рис.: Движение и стационарное движение

Универсальный инвариант дуг

Теорема

Множество $\hat{\mathcal{A}}_T = \tilde{\mathcal{A}}_T^s / \mathcal{M}(F \times [0, 1], T)$ является универсальным инвариантом дуг.

Предложение

Пусть $K \subset F \times [0, 1]$ — классический узел (узел в утолщенной сфере). Тогда $\hat{\mathcal{A}}_T$ состоит из одного элемента.

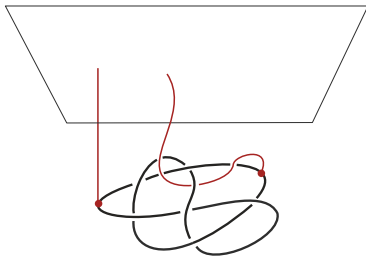


Рис.: Указатели дуг — скрытые дуги диаграммы

Предложение

Для любого множества дуг тангла α в $\hat{\mathcal{A}}_T$ существует диаграмма D , такая что $\alpha \subset \mathcal{A}(D)$.

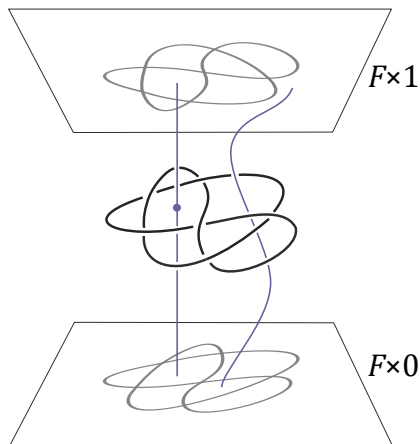


Рис.: Указатель области

Указатель полудуги

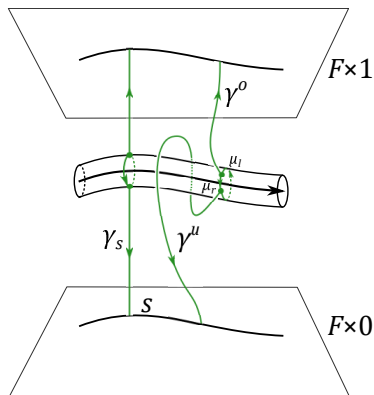


Рис.: Указатель полудуги

Указатель перекрестка

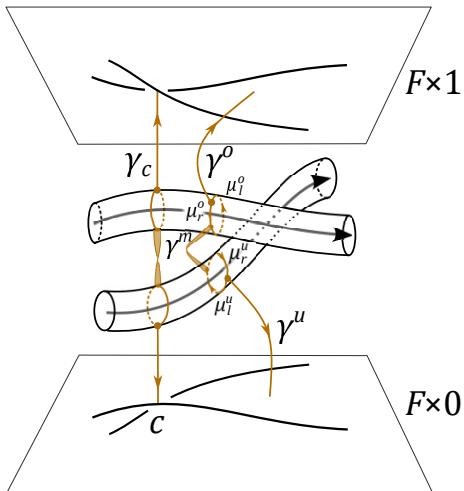


Рис.: Указатель перекрестка

Оснащение вертикального указателя перекрестка

Определение

Для перекрестка $c \in \mathcal{C}(D)$ определим его *вертикальный указатель* как тройку $\gamma_c = (\gamma_c^o, \gamma_c^m, \gamma_c^u)$, где $\gamma_c^o, \gamma_c^m, \gamma_c^u$ являются компонентами $c \times [0, 1] \setminus N(T)$, а оснащение задано как на рис.

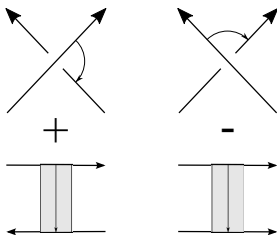
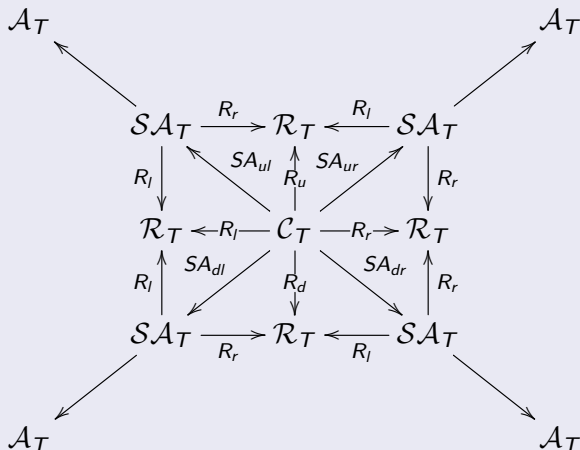


Рис.: Оснащение указателя перекрестка

Отображения между элементами диаграммы

Предложение

Множества элементов тангла T связаны следующими морфизмами.



Срединные перекрестки

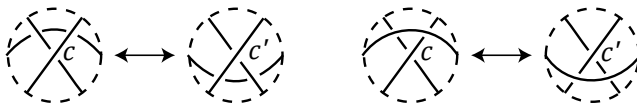


Рис.: Нижнее и верхнее движения Рейдемейстера

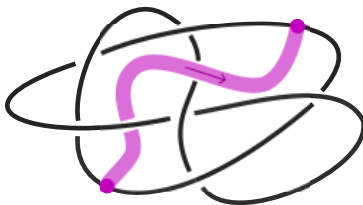


Рис.: Указатель срединного перекрестка

Срединные перекрестки и преобразования узлов

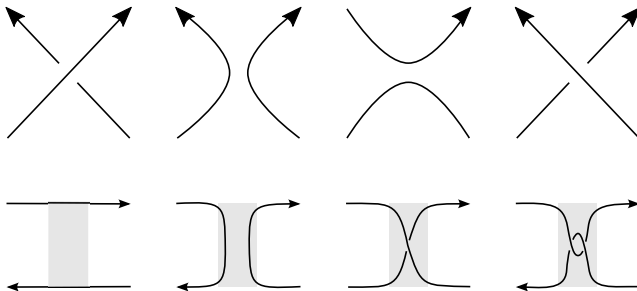


Рис.: Преобразования узла в срединном перекрестке

Каждое правило преобразования задает отображение $\widetilde{\mathcal{MC}}$ в множество классов изотопии танглов.

Косметические и разделяющие срединные перекрестки

(Неориентированный) срединный перекресток γ узла K называется *разделяющим*, если существует S , такой что $\gamma \subset S$, $K \cap S = \partial\gamma$, а оснащение ортогонально S . Множество разделяющих срединных перекрестков в $\widetilde{\mathcal{MC}}_K$ конечно.

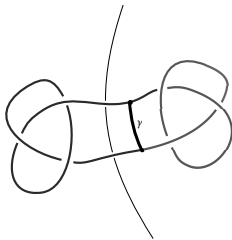


Рис.: Разделяющий срединный перекресток

(Неориентированный) срединный перекресток γ узла K называется *косметическим*, если замена перекрестка в γ создает узел, изотопный K .

Ленточные срединные перекрестки

Узел K называется *ленточным*, если он затягивается погруженным диском, имеющим только ленточные самопересечения.

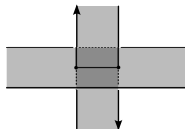


Рис.: Ленточное самопересечение

Набор срединных перекрестов $(\gamma_1, \dots, \gamma_k)$ называется *ленточным*, если ориентированное сглаживание всех срединных перекрестков γ_i дает тривиальное зацепление.

Представление элементов узлов с помощью пространственных графов

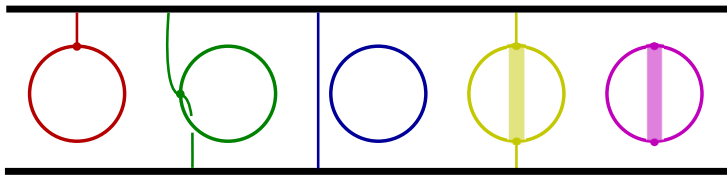


Рис.: Представление элементов узлов с помощью пространственных графов

- 1 Введение
- 2 Универсальные метки элементов узлов
- 3 Гомотопические классы элементов узлов
 - Биквандлоид
 - Кроссоиды
- 4 Комплекс пересечений
- 5 Инварианты

Гомотопические классы элементов узлов

гомотопические классы	структура
дуги	квандл
полудуги	биквандлоид
области	частичная тернарная квазигруппа
перекрестки	кроссоид

Инвариантные раскраски элементов диаграммы

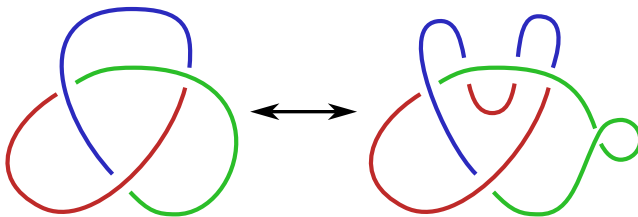


Рис.: 3-раскраски дуг диаграмм трилистника

Правило распространения раскраски элементов диаграммы



Рис.: Правило распространения для смежной области и противоположной полудуги

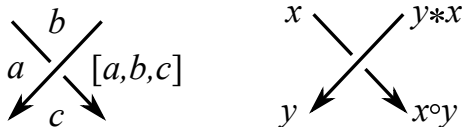


Рис.: Правила распространения для тройной скобки и биквандла

Правило многоугольника

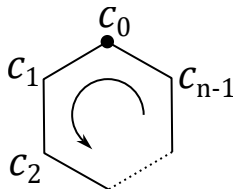


Рис.: Правило многоугольника $c_0 = f(c_1, \dots, c_{n-1})$

Определение

Множество B с двумя бинарными операциями $\circ, *: B \times B \rightarrow B$ называется *биквандлом*, если:

- 1 $x \circ x = x * x$ для всех $x \in B$;
- 2 для всех $y \in B$ операторы $\alpha_y: B \rightarrow B, x \mapsto x \circ y$, и $\beta_y: B \rightarrow B, x \mapsto x * y$, обратимы;
- 3 отображение $S: B \times B \rightarrow B \times B, (x, y) \mapsto (x \circ y, y * x)$, есть биекция;
- 4 для всех $x, y, z \in B$

$$(x \circ z) \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ (z * y),$$

$$(x \circ z) * (y \circ z) = (x * y) \circ (z * y),$$

$$(x * z) * (y * z) = (x * y) * (z \circ y).$$

Примеры биквандлов

Пример (Квандлы)

Биквандл B , в котором для всех $x, y \in B$ выполнено $x * y = x$, называется *квандлом*.

Пример (Фундаментальный биквандл)

Пусть D — диаграмма узла L . *Фундаментальный биквандл* $FB(D)$ для L задается универсальным свойством: для любой раскраски диаграммы $c \in Col_B(D)$ биквандлом B существует единственный гомоморфизм $f: FB(D) \rightarrow B$, такой что $c = f(c_F)$, где $c_F \in Col_{FB(D)}(D)$ — некоторая заданная (фундаментальная) раскраска. Фундаментальный биквандл имеет копредставление

$$FB(D) = \langle \text{полудуги диаграммы } D \mid \text{правила раскраски в перекрестках} \rangle.$$

Топологический биквандл (Е. Хорват)

Определение

Пусть $L \subset S^2 \times I$ — классическое зацепление, $N(L)$ — трубчатая окрестность L и $E_L = \overline{(S^2 \times I) \setminus N(L)}$. Выберем точки $z_0 \in S^2 \times 0$ и $z_1 \in S^2 \times 1$. Пусть B_L — множество гомотопических классов пар путей (a_0, a_1) , таких что

$$a_0: (I, 0, 1) \rightarrow (E_L, \partial N(L), z_0), \quad a_1: (I, 0, 1) \rightarrow (E_L, \partial N(L), z_1),$$

и $a_0(0) = a_1(0)$. Определим структуру биквандла формулами

$$(a_0, a_1) \circ (b_0, b_1) = (a_0, a_1 b_1^{-1} m_{b_1(0)} b_1),$$

$$(a_0, a_1) * (b_0, b_1) = (a_0 b_0^{-1} m_{b_0(0)}^{-1} b_0, a_1)$$

где m_x , $x \in \partial N(L)$ — меридиан $\partial N(L)$, проходящий через x .

Биквандл B_L называется *топологическим биквандлом* зацепления L .

Элементы топологического биквандла

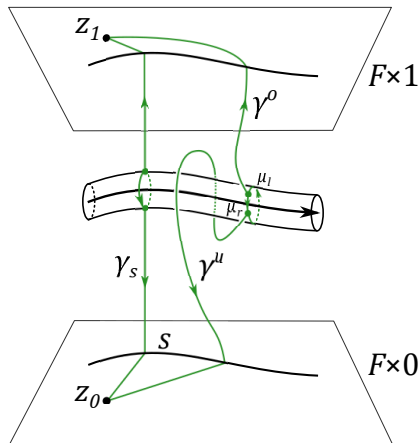


Рис.: Элементы топологического биквандла

Применимость операций биквандла

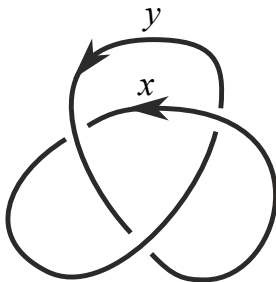


Рис.: Композиция $x * y$ не реализуема на классических диаграммах

Правило согласованности: две полудуги могут образовать перекресток тогда и только тогда, когда они инцидентны одной области.

Определение

Биквандлоид есть пара множеств (B, R) с отображениями $\sigma_l, \sigma_r: B \rightarrow R$ (левым и правым отображением инцидентности) и $\circ, *: B \times_R B \rightarrow B$, где $B \times_R B = \{(a, b) \in B \times B \mid \sigma_r(a) = \sigma_r(b)\}$, такими что

- ❶ для всех $a, b \in B$, таких что $\sigma_r(a) = \sigma_r(b)$, имеем $\sigma_r(a \circ b) = \sigma_r(a * b) = \sigma_l(b)$ и $\sigma_l(a \circ b) = \sigma_l(b * a)$.
- ❷ для всех $b, c \in B$, таких что $\sigma_l(b) = \sigma_r(c)$, существуют единственные $a', a'' \in B$, такие что $\sigma_r(a') = \sigma_r(a'') = \sigma_r(b)$ и $c = a' \circ b = a'' * b$.
- ❸ для всех $c, d \in B$, таких что $\sigma_l(c) = \sigma_l(d)$, существуют единственные $a, b \in B$, такие что $\sigma_r(a) = \sigma_r(b)$ и $c = a * b, d = b \circ a$.
- ❹ для всех $a \in B$ $a \circ a = a * a$.
- ❺ для всех $a, b, c \in B$, таких что $\sigma_r(a) = \sigma_r(b) = \sigma_r(c)$

$$(a \circ b) \circ (c \circ b) = (a \circ c) \circ (b * c), \quad (a * b) * (c * b) = (a * c) * (b \circ c),$$
$$(a \circ b) * (c \circ b) = (a * c) \circ (b \circ c).$$

Раскраски биквандлоидами

Раскраска диаграммы D биквандлоидом (B, R) — это отображение множества полудуг диаграммы D в B , такое что образы дуг удовлетворяют правилу раскраски.

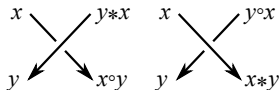


Рис.: Правило раскраски

Множество раскрасок биквандлоидом обозначим как $Col_{(B,R)}(D)$.

Теорема

Для любых диаграмм D и D' , связанных движением Рейдемейстера, имеется биекция между $Col_{(B,R)}(D)$ и $Col_{(B,R)}(D')$.

Пример (Биквандлы)

Если R состоит из одной точки, то биквандлоид удовлетворяет определению биквандла.

Пример (Топологический биквандлоид)

Пусть L — зацепление в $S^2 \times I$, а B_L — его топологический биквандл. Пусть $R_L = [I, 0, 1; E_L, z_0, z_1]$ — множество классов гомотопии путей из z_0 в z_1 . Рассмотрим отображения

$$\sigma_r(a_0, a_1) = a_0^{-1} a_1, \quad \sigma_l(a_0, a_1) = a_0^{-1} m_{a_0(0)} a_1$$

и ограничим операции биквандла на $B_L \times_R B_L$. Получим топологический биквандлоид зацепления L .

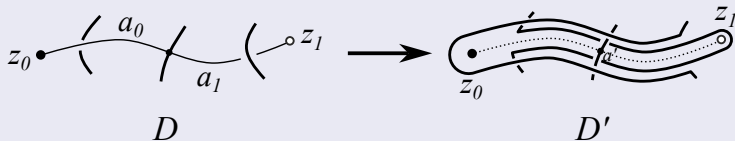
Топологический биквандлоид фундаментален

Теорема

Для любого биквандлоида (B, R) имеется биекция $Col_{(B,R)}(L) \simeq Hom((B_L, R_L), (B, R))$.

Доказательство.

Пусть $c \in Col_{(B,R)}(L)$. Построим гомоморфизм ϕ_c из (B_L, R_L) в (B, R) . Пусть $a = (a_0, a_1) \in B_L$. Рассмотрим проекцию a на S^2 . Притянем переходы на a к z_0 , а проходы — к z_1 . Образ указателя a есть цвет дуги a' в получившейся диаграмме D' : $\phi_c(a) = c(a')$.



Лемма

Рассмотрим раскрашенную биквандлоидом (B, R) часть тангла, которая состоит из $2n$ параллельных дуг $a_1, \dots, a_{2n}$ и дуги b , таких что дуги a_i и a_{2n+1-i} имеют противоположную ориентацию и одинаковый цвет. Тогда после применения вторых движений Рейдемейстера мы получим раскрашенный тангл, в котором дуги b' и b имеют одинаковый цвет, как и дуги a_i и a'_i , $i = 1, \dots, 2n$, а также дуги b_i и b'_i , $i = 1, \dots, 2n - 1$.

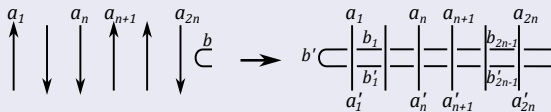


Рис.: Раскрашиваемый тангл

Определение

Кроссоид — это пара множеств (C, A) (C — цвета перекрестков и A — цвета дуг) и отображения:

- 1 знак $sgn: C \rightarrow \{-1, 1\}$. We denote $C_{\pm} = sgn^{-1}(\pm 1)$;
- 2 отображения инцидентности $A_{\alpha\beta}: C \rightarrow A$, $\alpha \in \{u, d\}$, $\beta \in \{l, r\}$.
- 3 отображения многоугольника $P_{\mathbf{o}}^{\epsilon}: C(\hat{\epsilon}, \mathbf{o}) \rightarrow C_{\epsilon_0}$, где $n \geq 2$,
 $\epsilon = (\epsilon_0, \epsilon_1, \dots, \epsilon_{n-1})$, $\hat{\epsilon} = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_{n-1})$, $\epsilon_i \in \{+, -\}$,
 $\mathbf{o} = (o_0, \dots, o_{n-1})$, $o_i \in \{\leftarrow, \rightarrow\}$, и

$$C(\hat{\epsilon}, \mathbf{o}) = \{(c_1, \dots, c_{n-1}) \in C_{\epsilon_1} \times \dots \times C_{\epsilon_{n-1}} \mid \\ A_{out}(c_i, o_{i-1}, o_i) = A_{in}(c_{i+1}, o_i, o_{i+1}), i = 1, \dots, n-2\},$$

и $P_{\mathbf{o}}^{\epsilon}: A \rightarrow C_{\epsilon}$, $\epsilon \in \{+, -\}$, $\mathbf{o} \in \{\leftarrow, \rightarrow\}$.

Отображения удовлетворяют следующим соотношениям.

Отображения инцидентности и многоугольника

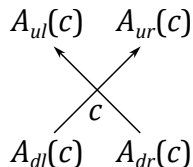


Рис.: Отношение инцидентности между перекрестком и дугами

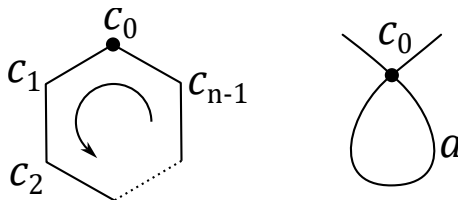


Рис.: Отображение многоугольника $c_0 = P_o^\epsilon(c_1, \dots, c_{n-1})$ and $c_0 = P_o^\epsilon(a)$

- 1 инцидентности многоугольника
- 2 вращения многоугольника
- 3 внутренние Ω_1 -соотношения
- 4 внешние Ω_1 -соотношения
- 5 внутренние Ω_2 -соотношения
- 6 внешние Ω_2 -соотношения
- 7 Ω_3 -соотношения

Соотношения крессоида II

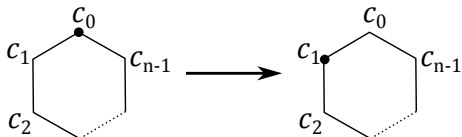


Рис.: Изменение базовой точки многоугольника

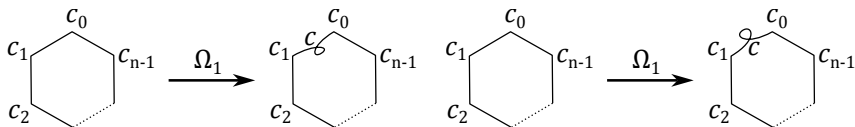


Рис.: Внутреннее и внешнее Ω_1 -движения

Соотношения крессоида III

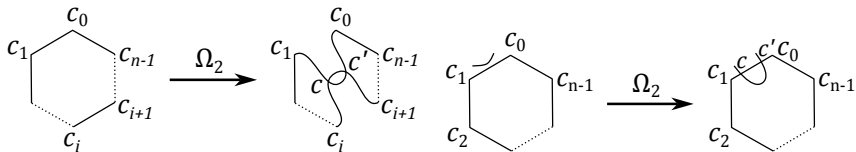


Рис.: Внутреннее и внешнее Ω_2 -движения

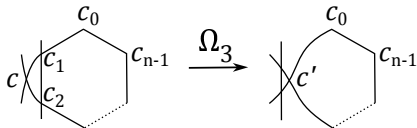


Рис.: Ω_3 -движение

Example (Кроссоид четности)

Пусть G — группа. Положим $C = G \times \{-1, 1\}$ и $A = \{1\}$. Тогда отображения $A_{\alpha\beta}: C \rightarrow A$ тривиальны. Пусть $\text{sgn}(g, \epsilon) = \epsilon$. Определим отображения многоугольника формулой $P_o^\epsilon = (1, \epsilon)$ и

$$P_{(o_0, \dots, o_{n-1})}^{(\epsilon_0, \dots, \epsilon_{n-1})}((g_1, \epsilon_1), \dots, (g_{n-1}, \epsilon_{n-1})) = \left(\left(\prod_{i=1}^{n-1} g_i^{e(o_{i-1}, o_i)} \right)^{-e(o_{n-1}, o_0)}, \epsilon_0 \right),$$

где $e(o, o')$ — индекс инцидентности, задаваемый формулой

$$e(o, o') = \begin{cases} 1, & o = o', \\ -1, & o \neq o'. \end{cases}$$

Раскраска диаграммы кроссоидом $(G \times \{-1, +1\}, \{1\})$ называется *ориентируемой четностью со значениями в группе G* .

Пусть B — биквандл. Положим $C = (B \times B) \times \{-1, +1\}$ и $A = B$.
Определим знак как $\text{sgn}(a, b, s) = s$ и отображения инцидентности

$$\begin{aligned} A_{dr}(a, b, +) &= a, & A_{ur}(a, b, +) &= b, & A_{ul}(a, b, +) &= a \underline{*} b, & A_{dl}(a, b, +) &= b \overline{*} a, \\ A_{dr}(a, b, -) &= a, & A_{ur}(a, b, -) &= b, & A_{ul}(a, b, -) &= a \overline{*} b, & A_{dl}(a, b, -) &= b \underline{*} a. \end{aligned}$$

Положим $P_{\rightarrow}^{\epsilon}(a) = (k(a), k(a), \epsilon)$, где $k(a) \underline{*} k(a) = a$, $P_{\leftarrow}^{\epsilon}(a) = (a, a, \epsilon)$.

Кроссоид биквандла II

Определим отображение $P_o^\epsilon(c_1, \dots, c_{n-1})$, $\epsilon = (\epsilon_0, \dots, \epsilon_{n-1})$, $o = (o_0, \dots, o_{n-1})$. Пусть $a = A_{in}(c_1)$ и $b = A_{out}(c_{n-1})$. Значение отображения задается таблицей

ϵ_0	o_0	o_{n-1}	$P_o^\epsilon(c_1, \dots, c_{n-1})$
+	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$(c, d, +)$ where $a = c \underline{*} d, b = d \bar{*} c$
+	$\leftarrow$	$\rightarrow$	$(b, c, +)$ where $a = c \bar{*} b$
+	$\rightarrow$	$\leftarrow$	$(d, a, +)$ where $b = d \underline{*} a$
+	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$(a, b, +)$
-	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$(c, d, -)$ where $a = c \bar{*} d, b = d \underline{*} c$
-	$\leftarrow$	$\rightarrow$	$(b, c, -)$ where $a = c \underline{*} b$
-	$\rightarrow$	$\leftarrow$	$(d, a, -)$ where $b = d \bar{*} a$
-	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$(a, b, -)$

Для диаграммы D отображение $(\chi_C, \chi_A) \mapsto \chi_A$ есть биекция между раскрасками кроссоидом $Col_{(C,A)}(D)$ и раскрасками биквандлом $Col_B(D)$.

Пусть T — тангл в $S^2 \times I$. Пусть $C = \mathcal{C}(T)$ — множество гомотопических классов указателей перекрестков и $A = \mathcal{SA}(T)$ — множество гомотопических классов указателей полудуг. На паре $(\mathcal{C}(T), \mathcal{SA}(T))$ вводится структура кроссоида, обладающего свойством фундаментальности.

Теорема

Пусть D — диаграмма тангла T . Для любого кроссоида (C, A) имеется биекция между множеством раскрасок $\text{Col}_{(C,A)}(D)$ и множеством гомоморфизмов кроссоидов $\text{Hom}((\mathcal{C}(T), \mathcal{SA}(T)), (C, A))$.

- 1 Введение
- 2 Универсальные метки элементов узлов
- 3 Гомотопические классы элементов узлов
 - Биквандлоид
 - Кроссоиды
- 4 Комплекс пересечений
- 5 Инварианты

Комплекс пересечений I

Пусть T — тангл в утолщенной поверхности $F \times I$. Возьмем точку $x_0 \in F$ и обозначим $x^u = x_0 \times 0$ и $x^o = x_0 \times 1$.

Для $n \geq 0$ рассмотрим пространство $\mathcal{C}(T, n)$ гомотопических классов наборов путей $\gamma = (\gamma_0, \dots, \gamma_n)$

$$\begin{aligned}\gamma_0 &: (I, 0, 1) \rightarrow (M_T, x^u, \partial N(T)), \\ \gamma_i &: (I, 0, 1) \rightarrow (M_T, \partial N(T), \partial N(T)), \quad i = 1, \dots, n-1, \\ \gamma_n &: (I, 0, 1) \rightarrow (M_T, \partial N(T), x^o);\end{aligned}$$

таких что

- $\gamma_{i-1}(1)$ и $\gamma_i(0)$ — разные точки одного меридиана μ_i , $1 \leq i \leq n$. Обозначим часть меридиана μ_i от $\gamma_{i-1}(1)$ до $\gamma_i(0)$ как $\mu_{i,l}$, а часть от $\gamma_i(0)$ до $\gamma_{i-1}(1)$ как $\mu_{i,r}$.
- меридианы μ_i , $i = 1, \dots, n$, все различны;
- петля $p(\gamma_0 \mu_{1,l} \gamma_1 \cdots \gamma_{n-1} \mu_{n,l} \gamma_n)$ тривиальна в $\pi_1(F, x_0)$.

Комплекс пересечений II

Последовательность $(\mathcal{C}(T, n))_{n \geq 0}$ с отображениями $\partial_{i,l}^n, \partial_{i,r}^n: \mathcal{C}(T, n) \rightarrow \mathcal{C}(T, n-1)$, $i = 1, \dots, n$, заданными формулами

$$\begin{aligned}\partial_{i,l}^n(\gamma_0, \dots, \gamma_n) &= (\gamma_0, \dots, \gamma_{i-2}, \gamma_{i-1} \mu_{i,l} \gamma_i, \gamma_{i+1}, \dots, \gamma_n), \\ \partial_{i,r}^n(\gamma_0, \dots, \gamma_n) &= (\gamma_0, \dots, \gamma_{i-2}, \gamma_{i-1} (\mu_{i,r})^{-1} \gamma_i, \gamma_{i+1}, \dots, \gamma_n),\end{aligned}$$

образует полукубическое множество.

Рассмотрим подмножество $\mathcal{D}(T, n) = \bigcup_{i=1}^{n-1} \mathcal{D}_i(T, n) \subset \mathcal{C}(T, n)$, где $\mathcal{D}_i(T, n)$ состоит из элементов γ , таких что

$$\gamma_{\alpha_1 \dots \alpha_{i-1}}^{\alpha_i \dots \alpha_{n-2}} = \partial_{3, \alpha_{n-2}}^3 \circ \dots \circ \partial_{3, \alpha_i}^{n-i+1} \circ \partial_{1, \alpha_{i-1}}^{n-i+2} \circ \dots \circ \partial_{1, \alpha_1}^n(\gamma),$$

петлевой перекресток при некоторых $\alpha_j \in \{l, r\}$, $j = 1, \dots, n-2$.

Определение

Для абелевой группы M гомологии $H_*(T, M)$ комплекса

$$C_n(T, M) = (\mathcal{C}(T, n) \otimes M / \mathcal{D}(T, n) \otimes M)^{\pi_1(F)}$$

с дифференциалом

$$d(\gamma) = \sum_{i=1}^n (-1)^i (\partial_{i,l}^n(\gamma) - \partial_{i,r}^n(\gamma))$$

называются *гомотопическими гомологиями пересечений* тангла T с коэффициентами в M . Аналогично определяются гомотопические когомологии пересечений $H^*(T, M)$ тангла T с коэффициентами в M .

Предложение

Пусть $D = p(T)$ — диаграмма тангла T . Рассмотрим цепь

$$z(D) = \sum_{c \in \mathcal{C}(D)} \operatorname{sgn}(c) \gamma_c \in C_2(T, \mathbb{Z}).$$

- 1 цепь $z(D)$ является циклом: $d(z(D)) = 0$;
- 2 класс гомологий $cr(D) = [z(D)] \in H_2(T, \mathbb{Z})$ инвариантен, т.е. для любой изотопии $f: T \rightarrow T'$ имеем $f_*(cr(D)) = cr(D')$, где $D = p(T')$ — диаграмм тангла T' , а $f_*: H_*(T, \mathbb{Z}) \rightarrow H_*(T', \mathbb{Z})$ — гомоморфизм, индуцированный изотопией f .

Элемент $cr(D) \in H_2(T, \mathbb{Z})$ называется гомотопическим классом перекрестков тангла T .

Гомологии алгебраических структур, отвечающих за раскраску диаграмм I

Пусть M — абелева группа, и A — множество цветов, имеющее структуру квандла (биквандлоида, кроссоида и т.п.). Пусть $C_n(A)$ — множество раскрасок тангла T_n в диске, а $D_n(A) \subset C_n(A)$ — подмножество раскрасок, продолжающихся до раскраски тангла с петлевым перекрестком.

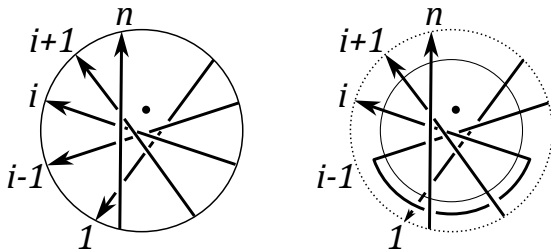
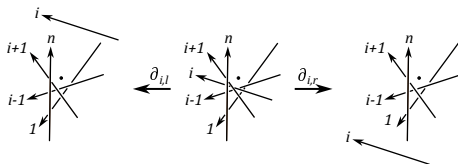


Рис.: Тангл T_n и тангл с петлевым перекрестком

Гомологии алгебраических структур, отвечающих за раскраску диаграмм II



Определение

Для абелевой группы M гомологии $H_*(A, M)$ комплекса

$$C_n(T, M) = C_n(A) \otimes M / D_n(A) \otimes M$$

с дифференциалом $d(\gamma) = \sum_{i=1}^n (-1)^i (\partial_{i,l}^n(\gamma) - \partial_{i,r}^n(\gamma))$ называются гомологиями квандла (биквандлоида, кроссоида и т.п.) A с коэффициентами в M .

Коциклический инвариант раскрасок

Предложение

Любая раскраска $c \in \text{Col}_A(T)$ диаграммы тангла T множеством цветов A индуцирует отображение

$$c_*: H_n(T, M) \rightarrow H_n(A, M)$$

Определение

Пусть $\theta \in Z^2(A, M)$ — 2-коцикл. Пусть D — диаграмма тангла T .

Сумма

$$\Phi_\theta(D) = \sum_{c \in \text{Col}_A(D)} \theta(c_*(z(D))) \in \mathbb{Z}[M]$$

называется коциклическим инвариантом тангла T .

Инвариантные диаграммные суммы

Определение

Пусть G — инвариантная разметка элементов диаграммы. Для диаграммы D назовем множество $s_G(D) \in \mathbb{Z}[G(D)]$ меток всех элементов диаграммы *диаграммной цепью*. Если $G(D)$ — абелева группа, образ $s_G(D)$ при естественном гомоморфизме $\mathbb{Z}[G(D)] \rightarrow G(D)$ назовем *диаграммной суммой*.

Если диаграммная сумма не зависит от выбора диаграммы узла, назовем ее *инвариантной диаграммной суммой*.

Пример

Для перекрестков примерами инвариантных диаграммных сумм являются индекс зацепления, индексные многочлены, инвариант коцикла квандлов.

Для дуг и областей все инвариантные диаграммные суммы тривиальны.

Инвариантные глобальные суммы

Пример (Инвариантные глобальные суммы)

Пусть G — инвариантная разметка элементов диаграммы. Пусть μ — мера на множестве классов изотопии диаграмм танглов. Тогда диаграммные цепи индуцируют меру μ_G на множестве $G(D)$. Для произвольной функции $f: G \rightarrow \mathbb{R}$ определим *инвариантную глобальную сумму* $I(D) = \int_{G(D)} f(x) d\mu_G$.

Пример (Скейн-инварианты)

Пусть $F: \mathfrak{D}_s \rightarrow Rel$ — некоторый функтор и (G, h) — его инвариант. Пусть имеется скейн-отображение $sk: G(D) \rightarrow R[\mathfrak{T}]$, где R — кольцо. Обозначим $\mathcal{S} = R[\mathfrak{T}]/\text{Im} sk$. Проекция $\mathfrak{T} \rightarrow \mathcal{S}$ называется *скейн-инвариантом*.

Дальнейшие направления

- топологизация комбинаторных инвариантов
- обобщения на другие теории узлов
 - многомерные узлы
 - узлы в 3-многообразиях
 - виртуальные узлы
- группы монодромии:
 - группа движений
 - монодромия элементов диаграммы
 - монодромия раскрасок
- инварианты конечного порядка элементов диаграмм
- кобордизмы узлов
- нерейдемейстерские теории узлов
- правила распространения раскрасок
- наборы элементов диаграммы
- универсальные циклы в комплексе пересечений

Спасибо за внимание!