Боровских А.В., Платонова К.С.

«Групповой подход к проблеме связи кинетических уравнений и уравнений сплошной среды. Одномерный случай: от идеи замыкания моментной системы к методу группового расслоения.»

Проблема связи между кинетическими уравнениями и уравнениями сплошной среды существует уже почти полтора столетия, она возникла тогда, когда была обнаружена дискретная структура вещества, и соответствующие представления поставили вопрос о логических основаниях уравнений сплошной среды, которые выводились исходя из субстанциональных представлений, то есть рассмотрения той или иной непрерывной субстанции.

Математически эта проблема звучит как проблема вывода уравнений сплошной среды из тех или иных кинетических уравнений. Модельным отношением здесь является удивительный переход от биномиального дискретного распределения к непрерывному гауссовскому, который обычно демонстрируют школьникам на доске Гальтона и который обоснован нетривиальными математическими средствами (формула Стирлинга).

Максвелл в середине XX века осуществил такой переход уже по отношению к реальным, пусть и простейшим физическим моделям. Впоследствии математическая проблема оформилась как задача вывода из уравнения Больцмана

$$f_t + cf_x + (Ff)_c = J_{col}$$

уравнений типа системы Навье-Стокса. Основной идеей такого вывода является то, что уравнения бесконечной моментной системы относительно моментных величин

$$f^\alpha = \int_{R_c^n} f(t,x,c)c^\alpha dc$$

в начальной своей части очень похожи на уравнения сплошной среды: первое уравнение просто совпадает с уравнением неразрывности, второе – описывает динамику течения, и т.д.

Сложность состоит в том, что система моментных уравнений является бесконечной, а уравнения сплошной среды всегда представляют собой конечную систему. Это означает, что для получения из моментной системы уравнений сплошной среды нужно моментную систему, во-первых, усечь, а во-вторых, замкнуть (поскольку система получается незамкнутой).

Основные два вопроса – где усечь и как замкнуть – являются дискуссионными на протяжении уже более ста лет. Основная идея (идущая от Д. Гильберта) состоит в использовании малого параметра, который присутствует в интеграле столкновений и который позволяет применять соображения асимптотического характера. Однако пока что явного ответа на эти вопросы нет.

Мы решили «пойти другим путем», а именно использовать подход, основанный на групповом анализе дифференциальных уравнений. Он состоит в том, чтобы найти группу симметрий исходного кинетического уравнения, перенести ее действие на моментные величины, найти инварианты этой группы уже в терминах моментных величин, и с помощью этих инвариантов дополнить моментную систему так, чтобы часть этой системы, вместе с дополнительными инвариантными соотношениями, образовывала замкнутую систему, остальные же уравнения тогда можно было бы отбросить. Кратко говоря, идея состоит в том, что уравнения сплошной среды, выводимые из кинетических, должны иметь как минимум ту же группу симметрий, что и исходные кинетические уравнения.

Эта идея протестирована нами на простейшем варианте – одномерном кинетическом уравнении. Здесь выполнена задача групповой классификации и реализован переход к уравнениям, которые можно считать уравнениями сплошной среды для случая кинетических уравнений с максимальной (когда внешнее силовое поле $F = 0$) субмаксимальной группами симметрий.

При этом оказалось, что большинство исходных предположений, заимствованных из «классического» подхода (о существовании бесконечной системы моментных величин и бесконечной системы моментных уравнений; о том, что уравнения сплошной среды являются усечением системы моментных уравнений и др.) оказались неверными, что потребовало нескольких существенных трансформаций исходной постановки задачи с удержанием при этом смысла искомого отношения.

В докладе будут представлены эти трансформации и полученные результаты (таких трансформаций было четыре – от «нулевой» до «четвертой» постановки задачи). В итоге оказалось, что исходная проблема лучше всего формулируется в терминах, чрезвычайно близких к постановкам задач группового расслоения в групповом анализе дифференциальных уравнений и решается фактически исходя из той же схемы.