РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В. А. СТЕКЛОВА

В. В. Козлов

Инвариантные многообразия дифференциальных уравнений Гамильтона и расширенный метод Гамильтона–Якоби

2012

$x = (x_1, \dots, x_n)$ — обобщенные координаты

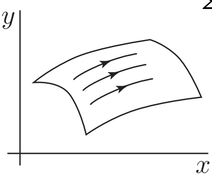
$y = \{y_1, \dots, y_n\}$ — обобщенные импульсы

$M = \{x\}$ — конфигурационное пространство

$\Gamma = T^*M$ — фазовое пространство

$H(x, y, t)$ — функция Гамильтона

$\dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial y}$, $\dot{y} = -\dfrac{\partial H}{\partial x}$ — канонические уравнения Гамильтона



$$\Sigma_t^n = \{x, y : y_1 = u_1(x,t), \dots, y_n = u_n(x,t)\}$$

$u(x,t) = (u_1, \dots, u_n)$ — ковекторное поле на M

$v(x,t) = \left.\dfrac{\partial H}{\partial y}\right|_{y=u(x,t)}$ — векторное поле на M

$h(x,t) = H(x, u(x,t), t)$

Условие инвариантности Σ:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_j \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) v_j = -\frac{\partial h}{\partial x_i} \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$$ — уравнения Ламба

Кососимметрическая $n \times n$-матрица

$$\operatorname{rot} u = \left\| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right\|$$

— вихрь ковекторного поля u.

Инвариантная форма условий инвариантности

$\omega = \sum y_k \, dx_k \Big|_{y=u} = \sum u_k(x,t)\, dx_k$ **— фундаментальная 1-форма**

$\Omega = d\omega$ **— 2-форма — ограничение симплектической структуры**

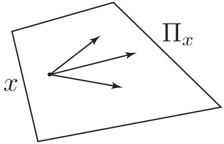
$$\sum dy_k \wedge dx_k \text{ на } \Sigma$$

$\dfrac{\partial \omega}{\partial t} + i_v d\omega = -dh$ **— уравнение Ламба**

$\dfrac{\partial \Omega}{\partial t} + L_v \Omega = 0$ **— уравнение вихря**

($L_v = di_v + i_v d$ — производная Ли)

$\Omega w = 0$, $w(x,t)$ **— вихревой вектор**



$T_x W = \Pi_x$; $\quad W$ **— вихревые многообразия**

$\dim \Pi_x = m \quad \dim W = m$

Если $n = 3$, то $m = 1$ (или $m = 3$).

$$\dot{x} = v(x,t), \qquad x \in M, \qquad (*)$$

— ограничение гамильтоновой системы на инвариантное многообразие Σ.

Обобщенная теорема Бернулли. ***В стационарном случае (когда u, v, h не зависят от t) функция h постоянна на линиях тока (интегральных кривых поля v) и вихревых многообразиях.***

Обобщенная теорема Гельмгольца. ***Поток системы*** $(*)$ ***переводит вихревые многообразия в вихревые многообразия.***

Факторизация по вихревым многообразиям и фактор-система.

В. В. Козлов. Общая теория вихрей. Ижевск, 1998.

Пример: потенциальные (лагранжевы) инвариантные многообразия; $\dim W = \dim \Sigma = n$.

$$\Sigma = \left\{ x, y : y = \frac{\partial S}{\partial x} \right\} \qquad \Rightarrow \quad \operatorname{rot} u = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial S}{\partial x} = -\frac{\partial h}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial S}{\partial t} + h = f(t), \quad \text{или}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}, t\right) = f(t).$$

Калибровочное преобразование

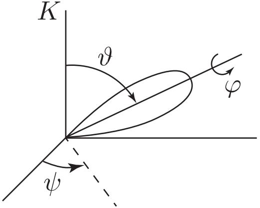
$$S \mapsto S - \int f(t)\, dt$$

дает уравнение Гамильтона–Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}, t\right) = 0.$$

Это уравнение — критерий инвариантности Σ (А. Пуанкаре, 1892).

Пример вихревых инвариантных многообразий



Волчок Эйлера; $M = \mathrm{SO}(3)$

ϑ, φ, ψ — **углы Эйлера**

Σ^3: $p_\psi = k$, $p_\vartheta = 0$, $p_\varphi = k\cos\vartheta$

Если $k \neq 0$, **то** $\mathrm{rank}(\Omega) = 2$.

$w = (-k\sin\vartheta, 0, 0)$ — **вихревой вектор**

$$\dot\psi = k\left(\frac{\sin^2\varphi}{I_1} + \frac{\cos^2\varphi}{I_2}\right),$$
$$\dot\vartheta = k\left(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_2}\right)\sin\vartheta\sin\varphi, \qquad \text{— уравнения на } \mathrm{SO}(3)$$
$$\dot\varphi = k\cos\vartheta\left(\frac{1}{I_3} - \frac{\sin^2\varphi}{I_1} - \frac{\cos^2\varphi}{I_2}\right)$$

- **Вихревое поле правоинвариантно.**
- **Вихревые линии замкнуты (расслоение Хопфа).**
- $\dfrac{w}{\sin\vartheta}$ **и** v **коммутируют.**
- $\sin\vartheta$ — **плотность меры Хаара на** $\mathrm{SO}(3)$.

Примеры инвариантных многообразий

1°. $\Sigma = \Gamma, \quad \dim \Sigma = 2n$

2°. Σ — фазовая траектория, $\dim \Sigma = 1$

3°. $H = \dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i^2 + y_i^2), \quad \lambda_i \neq 0$

$$\Sigma = \{x, y : x_1 = y_1 = \cdots = x_k = y_k = 0\}, \quad \dim \Sigma = 2(n-k).$$

Автономный случай

$i_v d\omega = -dh$ — уравнение Ламба — необходимое условие инвариантности

ω — ограничение $\sum y_k\, dx_k$ на Σ

Если $\Omega = d\omega$ невырождена, то уравнение Ламба само будет уравнением Гамильтона (Ω — симплектическая структура, Σ — фазовое пространство, h — функция Гамильтона).

Автономная гамильтонова система

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \dot{y}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}; \qquad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

$F_1, \ldots, F_{2n-2}(=H)$ — набор независимых первых интегралов, $\Sigma^3 = \{x, y : F_1(x,y) = c_1, \ldots, F_{2n-3}(x,y) = c_{2n-3}\}$ — инвариантное многообразие.

Поля $\dfrac{w}{\rho}$ и v коммутируют и касаются двумерной поверхности

$$B_h = \{(x,y) \in \Sigma^3 : H(x,y) = h\}.$$

Если B_h компактны, то это — двумерные торы с условно периодическими движениями:

$$\dot{\varphi}_1 = \lambda_1, \quad \dot{\varphi}_2 = \lambda_2; \qquad \lambda_1, \lambda_2 = \mathrm{const}.$$

О РАСШИРЕНИИ МЕТОДА ГАМИЛЬТОНА–ЯКОБИ

Пусть $\operatorname{rank}(\operatorname{rot} u) = 2$ **и** $\omega = x_1\,dx_2 + dS(x, c, t)$.

Поле импульсов:

$$u_1 = \frac{\partial S}{\partial x_1},\ \ u_2 = x_1 + \frac{\partial S}{\partial x_2},\ \ u_3 = \frac{\partial S}{\partial x_3}, \ldots, u_n = \frac{\partial S}{\partial x_n}.$$

Условие невырожденности: $\det\left\|\dfrac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial c_j}\right\| \neq 0.$

Уравнения инвариантности эквивалентны двум уравнениям

$$v_1 = -\frac{\partial f}{\partial x_2}, \quad v_2 = \frac{\partial f}{\partial x_1}; \qquad f = \frac{\partial S}{\partial t} + h \tag{$*$}$$

и $n-2$ **соотношениям**

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \tag{$**$}$$

Следовательно, f **— функция только от** x_1, x_2 **и** t, **а также от параметров** $c_1, \ldots, c_n$.

Так как

$$v_j = \frac{\partial H}{\partial y_j}\bigg| = \dot{x}_j,$$

то $(*)$ — замкнутая система дифференциальных уравнений Гамильтона

$$\dot{x}_1 = -\frac{\partial f}{\partial x_2}, \quad \dot{x}_2 = \frac{\partial f}{\partial x_1}. \tag{***}$$

Из $(*)$ и $(**)$ следует обобщенное уравнение Гамильтона–Якоби:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(x_1, \ldots, x_n, \frac{\partial S}{\partial x_1}, x_1 + \frac{\partial S}{\partial x_2}, \frac{\partial S}{\partial x_3}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial x_n}, t\right) = f(x_1, x_2, t, c).$$

Теорема. *Пусть*

$$x_1 = X_1(t, c, x_1^0, x_2^0), \quad x_2 = X_2(t, c, x_1^0, x_2^0)$$

— решение системы (***) *с начальными условиями* x_1^0 *и* x_2^0 *при* $t = 0$*. Тогда решения исходной канонической системы уравнений Гамильтона находятся из соотношений*

$$\frac{\partial S}{\partial c_j} = \int_0^t \frac{\partial f}{\partial c_j}\bigg|_{x_1 = X_1,\, x_2 = X_2} dt + \frac{\partial S}{\partial c_j}\bigg|_{t=0,\, x_k = x_k^0}; \qquad 1 \leqslant j \leqslant n,$$

$$y_1 = \frac{\partial S}{\partial x_1},\ y_2 = x_1 + \frac{\partial S}{\partial x_2},\ y_3 = \frac{\partial S}{\partial x_3},\ \ldots,\ y_n = \frac{\partial S}{\partial x_n}.$$

ДАН. 2012. т. 443. № 5. С. 561–563.

Обобщение: $\omega = \alpha_1 d\beta_1 + \cdots + \alpha_k d\beta_k + dS(x, c, t)$, **где** α_i, β_i **— функции от** $x_1, \ldots, x_k$, t **и** $c = (c_1, \ldots, c_n)$.
Функции $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_k, \beta_k, S$ **— обобщенные потенциалы Клебша.**