Инвариантное представление принципа максимума

I. О предистории содержания доклада

1. Моя первоначальная аргументация в пользу инвариантности:

$$\frac{dx}{dt} = X(x, u(t)), \;\; X = (X^1, \ldots, X^n),$$
$$\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n), \;\; H = \sum_\alpha \psi_\alpha X^\alpha(x, u).$$

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\partial}{\partial \psi} H(\psi, x, u), \;\; \dfrac{d\psi}{dt} = -\dfrac{\partial}{\partial x} H(\psi, x, u), \\ H = \max\limits_u H(\psi, x, u). \end{array}\right\}$$

2. О полевом подходе к задачам оптимизации

$$D = \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial}{\partial p}$$
$$i_{\mathcal{D}}\omega = -dH.$$

3. Об инвариантном характере задачи быстродействия

$$\frac{dx}{dt} = X(x, u), \;\; x \in M, \;\; u \in U, t \in J,$$
$$x(t_1) \mapsto x(t_2) \Rightarrow t_2 - t_1 = min \;\; \forall t_1, t_2 \in J$$

II. Первоначальная формулировка ПМ

- **Принцип максимума**:
  Задача формулируется в $\mathbb{R}^n$:

$$\frac{dx}{dt} = X(x,u),\ \ u \in U,\ \ t \in J,$$

$$x = (x^1, \ldots, x^n),\ \ X = (X^1, \ldots, X^n) \in \mathbb{R}^n.$$

Вводим вспомогательные переменные ψ и гамильтонову функцию H задачи,

$$\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n),$$

$$H(\psi, x, u) = \sum_{\alpha=1}^{n} \psi_\alpha X^\alpha(x,u).$$

Соответствующая гамильтонова система:

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial \psi}(\psi, x, u),\ \ \dfrac{d\psi}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial x}(\psi, x, u), \\ x(t_0) = x_0, \psi(t_0) = \psi_0 \neq 0,\ \ t \in J. \end{array}\right\}$$

Условие максимума:

$$H(\psi, x, u) = \max_{v \in U} H(\psi, x, v).$$

- **Обсуждение ПМ**

  1. Некоторая тяжеловесность формулировки — плата за математическую строгость.

  Интуитивный смысл ПМ - динамическое исключение параметра u вдоль экстремали с помощью условия максимума.

  2. *Производная Понтрягина* $\mathcal{P}_X$ — гамильтоново поле на T^*M, индуцированное гамильтонианом H:

$$\mathcal{P}_X = \sum_\alpha \frac{\partial H}{\partial \psi_\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial x^\alpha} - \sum_\alpha \frac{\partial H}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial \psi_\alpha} =$$

$$\sum_\alpha X^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} - \sum_{\alpha,\beta} \psi_\beta \frac{\partial X^\beta}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial \psi_\alpha}.$$

  3. *Формулировка задачи инвариантного представления ПМ*: канонический (*понтрягинский*) лифт:

$$X \mapsto H_X \mapsto \mathcal{P}_X \in Vect\, M$$

III. Канонический (понтрягинский) лифт

$$Z \mapsto H_Z \mapsto \mathcal{D}_Z \in Vect\, T^*M, \;\; Z \in Vect\, M$$

- **Два основных подмодуля в алгебрах** $C^\infty(T^*M), C^\infty(TM)$

  1. Для учета расслоенной структуры $T^*M \xrightarrow{\pi} M$ (аналогично в TM) удобно $\mathbb{R}$-алгебру $C^\infty(T^*M)$ рассматривать одновременно как $C^\infty(M)$-модуль:

  $$aH' + bH'' \overset{def}{=} \pi^*a \cdot H' + \pi^*b \cdot H'',$$
  $$\forall a, b \in C^\infty(M), \;\; H', H'' \in C^\infty(T^*M),$$

  2. *Подмодуль послойно-постоянных функций:*

  $$\mathfrak{A}^* = \left\{ \pi^*a \middle| \; a \in C^\infty(M) \right\} \subset C^\infty(T^*M)$$

3. *Подмодуль $\mathfrak{V}^* \subset C^\infty(T^*M)$ послойно-линейных функций:*

$$H \in \mathfrak{V}^*$$
$$\Updownarrow$$
$$H(\lambda\sigma'_x + \mu\sigma''_x) = \lambda H(\sigma'_x) + \mu H(\sigma''_x)$$
$$\forall \sigma'_x, \sigma''_x \in T^*_x M, \;\; x \in M$$

4. *Естественное отождествление модуля $Vect\, M$ с подмодулем $\mathfrak{V}^*$:*

$$\boxed{\begin{array}{l} Z \in Vect\, M \iff H_Z \in \mathfrak{V}^* \subset C^\infty(T^*M), \\ \qquad H_Z(\sigma) =< \sigma, Z_{\pi\sigma} > \;\; \forall \sigma \in T^*M, \\ \Updownarrow \\ \qquad\quad Vect\, M \stackrel{\sim}{=} \mathfrak{V}^* \subset C^\infty(T^*M). \end{array}}$$

- Канонический (понтрягинский) лифт:

$$Z \mapsto H_Z \mapsto D_Z, \; i_{\mathcal{D}_Z}\omega = -dH_Z.$$

1. Гамильтониан H_Z послойно линеен

$$\Downarrow$$

гамильтоново поле D_Z — *лифт в* T^*M *над* $Z \in Vect\, M$*, т.е. сохраняет модуль послойно-линейных функций* $\mathfrak{V}^*$ *и является дифференцированием этого модуля над* Z*,*

$$D_Z \cdot aH = Za \cdot H + a \cdot D_Z H \; \forall H \in \mathfrak{V}^*.$$

Соответственно, поток e^{tD_Z} — *лифт над* e^{tZ}, т.е. является послойным отображением, причем ограничение на произвольном слое — линейный изоморфизм,

$$e^{tD_Z} : T_x^*M \longrightarrow T_{e^{tZ}x}^*M \; \forall x \in M.$$

2. Гамильтониан H_Z, в силу линейности на слоях, легко вычисляется в канонических координатах

$$H_Z = \sum_\alpha p_\alpha Z^\alpha, \ \left(Z = \sum_\alpha Z^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right)$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{D}_Z = \sum_\alpha \left(\frac{\partial H_Z}{\partial p_\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial H_Z}{\partial q^\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial p_\alpha} \right) =$$

$$\mathcal{D}_Z = \sum_\alpha Z^\alpha \frac{\partial}{\partial q^\alpha} - \sum_{\alpha,\beta} p_\beta \frac{\partial Z^\beta}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial p_\alpha}$$

Действительно, для $\forall \sigma \in T^*M$:

$$H_Z(\sigma) =< \sigma, Z(\pi\sigma) >=$$

$$\sum_{\alpha,\beta} < p_\alpha dx^\alpha, Z^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta} > \Big|_\sigma = \sum_\alpha p_\alpha Z^\alpha \Big|_\sigma.$$

- Следствия:

  1. Функция (семейство функций) H_X совпадает с гамильтонианом H задачи быстродействия и первоначально введенные координаты x, ψ фактически являются каноническими $\Longrightarrow$ $D_X = \mathcal{P}_X$.

  2. Уравнения

$$\boxed{\begin{gathered} H_X(\sigma, u) \stackrel{def}{=} < \sigma, X(\pi\sigma, u) > = \sum_\alpha p_\alpha X^\alpha \Big|_\sigma \\ i_{\mathcal{P}_X}\omega = -dH_X, \ \ (\omega = -\sum_\alpha dq^\alpha \wedge dp^\alpha), \end{gathered}}$$

  дают инвариантное представление принципа максимума.

  3. Производная Понтрягина $\mathcal{P}_X$ — *канонический лифт в T^*M над $X \in Vect\, M$*, соответственно, поток $e^{t\mathcal{P}_X}$ — лифт в T^*M над e^{tX}.

  4. Гамильтониан для общей оптимальной задачи.

IV. Идентификация поля $\mathcal{P}_X$.

- 1. <u>*Производная Ли*</u> $\mathcal{L}_X$:

$$e^{t\mathcal{L}_X} \stackrel{def}{=} \left(e^{tX}\right)_* : T_x M \longrightarrow T_{e^{tX}x} M.$$

$\mathcal{L}_X$ — лифт на TM над полем X.

2. *Сопряженный поток* $\left(e^{t\mathcal{L}_X}\right)^{\#} \stackrel{def}{=} e^{t\mathcal{L}_X^{\#}}$ — лифт на T^*M над потоком e^{-tX}

$$< \left(e^{t\mathcal{L}_X}\right)^{\#} \theta_x, Y_{e^{-tX}x} >=< \theta_x, e^{t\mathcal{L}_X} Y_{e^{-tX}x} >,$$

$$\left(e^{t\mathcal{L}_X}\right)^{\#} = e^{t\mathcal{L}_X^{\#}} : T_x^* M \longrightarrow T_{e^{-tX}x}^* M.$$

3. *Двойственный поток* $\left(e^{t\mathcal{L}_X}\right)^{\#-1}$ *и двойственое поле* $\mathcal{L}^{\#}_{-X}$ *— лифт на* T^*M *над* e^{tX}*, соответственно, над* X:

$$\left(e^{t\mathcal{L}_X}\right)^{\#-1} = e^{-t\mathcal{L}_X^{\#}} = e^{t\mathcal{L}^{\#}_{-X}},$$

$$e^{t\mathcal{L}^{\#}_{-X}} : T_x^* M \longrightarrow T_{e^{tX}x}^* M.$$

4. <u>Наиболее естественная гипотеза</u>:

$$\mathcal{P}_X = \mathcal{L}^{\#}_{-X} \qquad (*)$$

- Вычисление поля $\mathcal{L}^{\#}_{-X}$

  1. Переход от соотношения между потоками диффеоморфизмов $e^{t\mathcal{L}_X}, e^{t\mathcal{L}^{\#}_X}$ к соотношению между потоками соответствующих автоморфизмов обратного сноса в модулях $C^\infty(TM), C^\infty(T^*M)$, которые обозначим $exp(t\mathcal{L}_X), exp(t\mathcal{L}^{\#}_X)$:

$$\left.\begin{array}{l}
< exp(t\mathcal{L}_X)\theta, Y >= \\
\qquad\qquad exp(tX) < \theta, exp(t\mathcal{L}^{\#}_X)Y >, \\
\Downarrow \\
X < \theta, Y >=< \mathcal{L}_X\theta, Y > + < \theta, \mathcal{L}^{\#}_{-X}Y > \\
\quad \forall\theta \in \Lambda^{(1)}(M),\ X, Y \in Vect\, M, \\
\Downarrow \\
\mathcal{L}^{\#}_{-X}\Big|_{\mathfrak{V}^*} = ad_X,\ \mathfrak{V}^* \stackrel{\sim}{=} Vect\, M.
\end{array}\right\}$$

  2. Мы приходим к неожиданной, однако легко проверяемой гипотезе:

$$\boxed{\begin{array}{c}
\mathcal{P}_X = ad_X \quad \forall X \in Vect\, M, \\
\mathcal{P}_X H_Y = H_{[X,Y]} = H_{ad_X Y}\ \forall X, Y \in Vect\, M.
\end{array}}$$