

Liminf-результаты для сумм по последовательности Кронекера

А. О. Чеботаренко¹

¹ МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва

Пусть $\theta \in \mathbb{R}$ – иррациональное число и $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – 1-периодическая непрерывная функция с нулевым средним

$$\int_0^1 f(x) dx = 0.$$

Мы изучаем поведение сумм вида

$$\sum_{k=0}^{Q-1} f(k\theta + \varphi)$$

по последовательности Кронекера

$$\{k\theta\}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Изучение таких сумм восходит к Анри Пуанкаре в связи с рассмотрением динамических систем специального вида. В конце XX века интерес к ним возобновился благодаря В.В. Козлову, исследовавшему свойства возвращаемости интегралов. В своей работе [1] Е.А. Сидоров показал, что если функция f абсолютно непрерывна, то при любом иррациональном θ выполнено

$$\liminf_{Q \rightarrow \infty} \max_{\varphi \in [0,1]} \left| \sum_{k=0}^{Q-1} f(k\theta + \varphi) \right| = 0.$$

Мы показываем, что данное свойство на самом деле не является критерием абсолютной непрерывности функции, как того бы можно было ожидать. Вообще говоря, поведение таких сумм существенно зависит от диофантовых свойств θ и того, к какому классу функций принадлежит функция f . Вопрос об описании класса функций, для которых при любом иррациональном θ выполнено свойство нулевого нижнего предела (как в теореме Сидорова) остаётся открытым. Тем не менее, для функций ограниченной вариации проследить за поведением сумм Биркгофа иногда оказывается проще, чем в общем случае. Мы получаем ряд новых результатов, связанных с поведением рассматриваемых сумм в случае функции ограниченной вариации. Подробный обзор известных результатов по этой теме можно найти в работе [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Е.А. Сидоров, *Conditions for uniform Poisson stability of cylindrical systems*, Russian Math. Surveys 34:6 (1979), 220-224.
2. N. Moshchevitin, *On an example by Poincaré and sums with Kronecker sequence*, Monatsh. Math. 206:1 (2025), 195-216.

Чеботаренко Артём Олегович, МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва,
e-mail: artem.chebo@mail.ru