

Гипотеза об объеме и детерминанте для альтернированных гиперболических узлов

А.Ю. Веснин

Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения РАН

Конференция "Маломерная топология",
приуроченная к юбилею Андрея Валерьевича Малютина
ПОМИ РАН, г. Санкт-Петербург, 5-7 ноября 2025 г.



С Юбилеем!

- 1 Узлы и их инварианты
- 2 Что такое детерминант узла?
- 3 Что такое объем узла?
- 4 Гипотеза об объеме и детерминанте
- 5 Оценки через число областей скручивания

1 Узлы и их инварианты

2 Что такое детерминант узла?

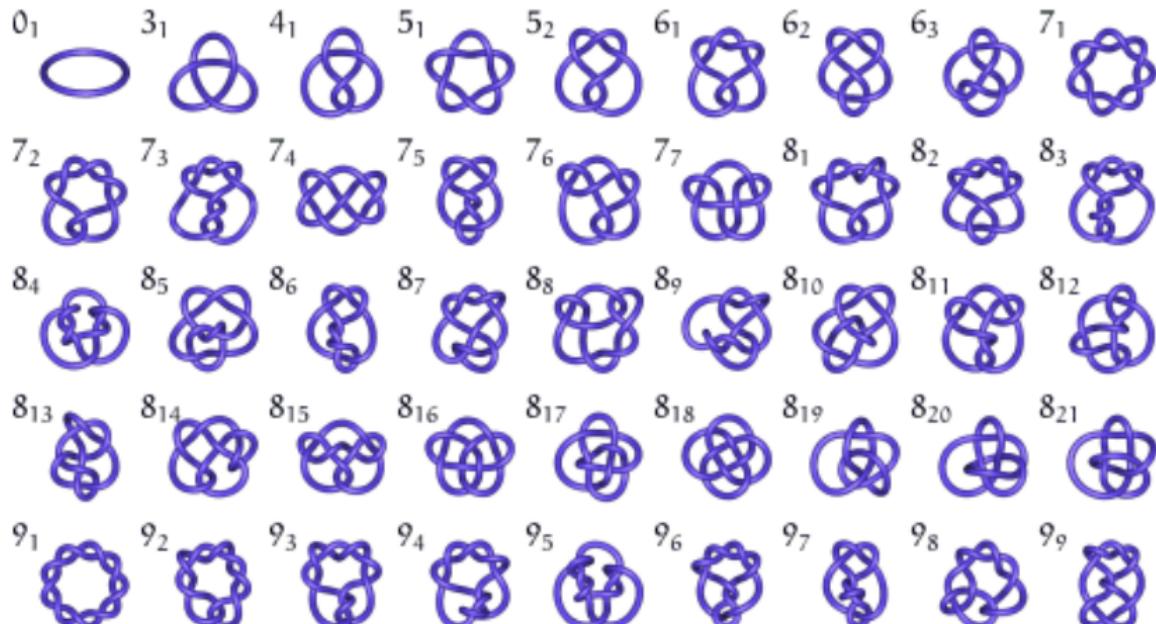
3 Что такое объем узла?

4 Гипотеза об объеме и детерминанте

5 Оценки через число областей скручивания

Узлы и зацепления в S^3

Узлом называется (гладкое) вложение окружности S^1 в 3-сферу S^3 . Зацеплением называется вложение нескольких попарно не пересекающихся копий S^1 . Узлы K и K' называются эквивалентными, если существует изотопия S^3 при которой K переходит в K' . Начальный список узлов по числу перекрестков в проекции приведен на рисунке:



Алгебраические и гиперболические инварианты узлов

Отображение, определенное на множестве узлов и зацеплений называется **инвариантом**, если оно принимает одинаковые значения на эквивалентных узлах или зацеплениях. Инварианты играют важную роль при решении вопроса о неэквивалентности узлов или зацеплений.

Алгебраические и гиперболические инварианты узлов

Отображение, определенное на множестве узлов и зацеплений называется **инвариантом**, если оно принимает одинаковые значения на эквивалентных узлах или зацеплениях. Инварианты играют важную роль при решении вопроса о неэквивалентности узлов или зацеплений.

Многие инварианты узлов строятся методами алгебраической топологии или методами гиперболической геометрии:

алгебраическая топология	гиперболическая геометрия
полином Александера	объем дополнения к узлу
полином Джонса	спектр длин геодезических
группа узла	поле следов представления группы
детерминант узла	геометрия каспа
сигнатура узла	группа изометрий дополнения к узлу

Анализ, в том числе с помощью ИИ, результатов вычисления инвариантов приводит к гипотезам о связи инвариантов разного происхождения.

- Davis, Juhasz, Lackenby, Tomasev: гипотеза о **сигнатуре** и **геометрии каспа** гиперболического узла [Nature 2021; Geometry & Topology 2024].
- Гипотеза об **объеме** и **детерминанте** – Champanerkar, Kofman, Purcell [2016].

The Vol-Det Conjecture

Пусть K – альтернированный гиперболический узел или зацепление.
Тогда

$$\text{vol}(K) < 2\pi \ln(\det(K)).$$

- 1 Узлы и их инварианты
- 2 Что такое детерминант узла?
- 3 Что такое объем узла?
- 4 Гипотеза об объеме и детерминанте
- 5 Оценки через число областей скручивания

Полином Александера

Начнем с наиболее известных полиномиальных инвариантов узлов и зацеплений.

В 1928 Александр определил инвариант $\Delta_K(t) \in \mathbb{Z}[t]$, который сейчас известен как [полином Александера](#) узла K .

Полином Александера

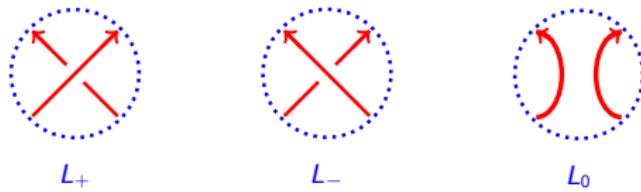
Начнем с наиболее известных полиномиальных инвариантов узлов и зацеплений.

В 1928 Александр определил инвариант $\Delta_K(t) \in \mathbb{Z}[t]$, который сейчас известен как [полином Александера](#) узла K .

В 1969 Конвэй нормализовал $\Delta_K(t) \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1/2}]$ таким образом, чтобы было выполнено $\Delta_{unknot}(t) = 1$ и имело место [распутывающее соотношение](#):

$$\Delta_{L_+}(t) - \Delta_{L_-}(t) = (t^{-1/2} - t^{1/2}) \Delta_{L_0}(t),$$

где L_+ , L_- и L_0 такие три ориентированные узла (или зацепления) диаграммы которых отличаются только в окрестности одного перекрестка как на рисунке:



Тройка зацеплений (L_+, L_-, L_0) называется [распутывающей тройкой](#).

Полином Джонса

В 1985 Джонс определил инвариант $V_K(t) \in \mathbb{Z}[\sqrt{t}, \frac{1}{\sqrt{t}}]$, который сейчас известен как [полином Джонса](#) узла K .

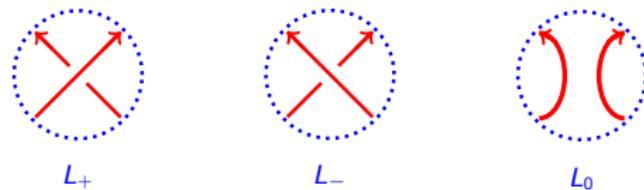
Полином Джонса

В 1985 Джонс определил инвариант $V_K(t) \in \mathbb{Z}[\sqrt{t}, \frac{1}{\sqrt{t}}]$, который сейчас известен как **полином Джонса** узла K .

$V_K(t)$ удовлетворяет следующему распутывающему соотношению:

$$\frac{1}{t} V_{L_+}(t) - t V_{L_-}(t) = \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right) V_{L_0}(t),$$

где (L_+, L_-, L_0) – распутывающая тройка зацеплений.

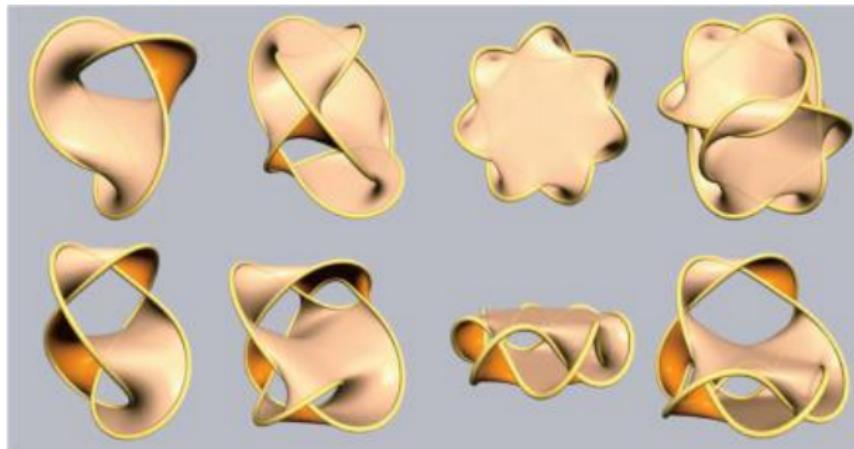


Из приведенных распутывающих соотношений для $\Delta_K(t)$ и $V_K(t)$ нетрудно видеть, что для каждого узла K имеет место равенство:

$$V_K(-1) = \Delta_K(-1).$$

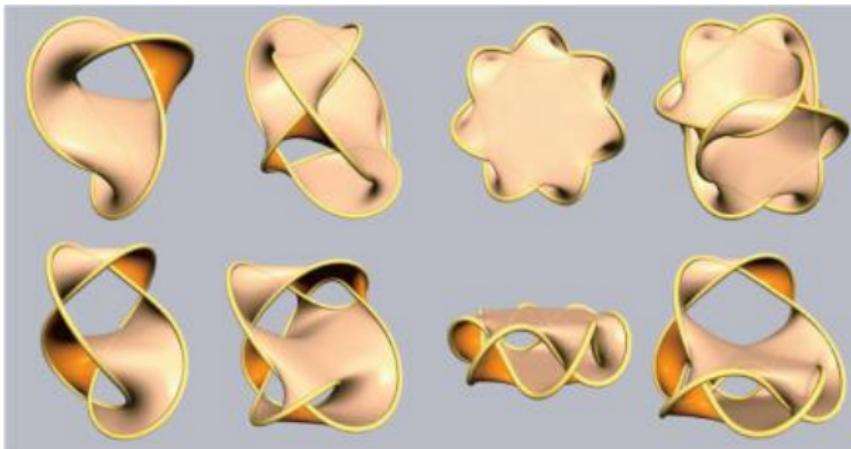
Поверхность Зейферта

Пусть $K \subset S^3$ – ориентированное зацепление. Его поверхностью Зейферта называется такая компактная связная ориентированная поверхность $F \subset S^3$ для которой K является краем.



Поверхность ЗейфERTA

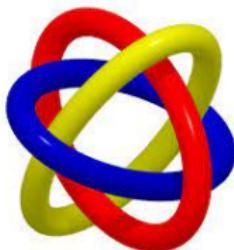
Пусть $K \subset S^3$ – ориентированное зацепление. Его поверхностью ЗейфERTA называется такая компактная связная ориентированная поверхность $F \subset S^3$ для которой K является краем.



В 1932 Франкль и Понtryгин, а в 1934 Зейферт, доказали, что каждое ориентированное зацепление в S^3 имеет поверхность ЗейфERTA, которую можно построить по любой его диаграмме.

Пример: Поверхность Зейферта для зацепления Борромеевы кольца

Пусть $B \subset S^3$ – 3-компонентное зацепление "Борромеевы кольца".



3 фотографии скульптурного изображения [поверхности Зейферта](#) для B :



Билинейная форма и индекс зацепления

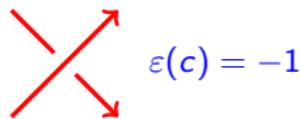
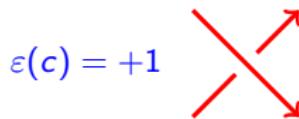
Пусть F – компактная связная ориентируемая поверхность с непустым краем, которая кусочно-линейно вложена в S^3 .

Тогда группы гомологий $H_1(S^3 \setminus F; \mathbb{Z})$ и $H_1(F; \mathbb{Z})$ изоморфны, и существует единственная невырожденная билинейная форма

$$\beta : H_1(S^3 \setminus F; \mathbb{Z}) \times H_1(F; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z},$$

где $\beta([a], [b]) = \ell k(a, b)$ для любых замкнутых ориентированных кривых $a \in S^3 \setminus F$ и $b \in F$.

Здесь через $\ell k(a, b)$ обозначен индекс зацепления кривых a и b в S^3 , то есть сумма $\sum_c \varepsilon(c)$ по всем перекресткам, где встречаются проекции кривых a и b .



Билинейная форма Зейфета

Пусть F – поверхность Зейферта для ориентированного узла $K \subset S^3$, $\partial F = K$.

Пусть N – трубчатая окрестность узла K , а X – замыкание дополнения $S^3 \setminus N$.

Тогда F имеет регулярную окрестность $F \times [-1, 1]$ в X , где F отождествляется с $F \times \{0\}$. Введем обозначения i^\pm для двух вложений $F \rightarrow S^3 \setminus F$, определенных по правилам $i^\pm(x) = x \times \{\pm 1\}$.

Сопоставим поверхности Зейферта F узла K следующую форму Зейферта:

$$\alpha : H_1(F; \mathbb{Z}) \times H_1(F; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$$

где $\alpha([x], [y]) = \beta((i^-)_*[x], [y])$.

Известно следующее свойство. Пусть F – поверхность Зейферта для ориентированного узла $K \subset S^3$, а M – матрица Зейферта, записанная в любом из базисов группы $H_1(F; \mathbb{Z})$. Тогда

$$\Delta_K(t) = \det(tM - M^T),$$

где равенство имеет место с точностью до множителя $\pm t^{\pm n}$, для целого $n \geq 0$.

Матрица Геритца для зацепления

Пусть D – связная диаграмма зацепления L , и пусть области диаграммы раскрашены в два цвета (например, розовый и белый) в стиле шахматной раскраски. Сопоставим каждому перекрестку c число $\zeta(c) = \pm 1$ по правилу:



Обозначим через R_0, R_1, \dots, R_n белые области диаграммы (включая внешнюю). Определим вспомогательную матрицу как $(n+1) \times (n+1)$ матрицу с элементами $g_{ij} = \sum \zeta(c)$, $i \neq j$, где сумма берется по всем перекресткам, в которых встречаются области R_i и R_j . Диагональные элементы зададим формулой $g_{ii} = -\sum_{j \neq i} g_{ij}$.

Матрица Геритца $G(L)$ получается из вспомогательной матрицы удалением строки и соответствующего столбца.

Известно следующее свойство: $|\det(G(L))| = |\Delta_L(-1)|$.

Двулистные разветвленные накрытия и детерминант

Обозначим через $\Sigma_2(K)$ 2-листное накрытие S^3 , разветвленное над узлом или зацеплением K . Пусть M – матрица формы Зейферта, построенной по некоторой поверхности Зейферта для K .

Известный факт. Порядок группы $H_1(\Sigma_2(K); \mathbb{Z})$ равен

$$|H_1(\Sigma_2(K); \mathbb{Z})| = |\det(M + M^T)| = |\Delta_K(-1)|.$$

Двулистные разветвленные накрытия и детерминант

Обозначим через $\Sigma_2(K)$ 2-листное накрытие S^3 , разветвленное над узлом или зацеплением K . Пусть M – матрица формы Зейферта, построенной по некоторой поверхности Зейферта для K .

Известный факт. Порядок группы $H_1(\Sigma_2(K); \mathbb{Z})$ равен

$$|H_1(\Sigma_2(K); \mathbb{Z})| = |\det(M + M^T)| = |\Delta_K(-1)|.$$

Определение

Детерминант узла или зацепления K – это целое число $\det(K) = |\Delta_K(-1)|$, где $\Delta_K(t)$ – полином Александера для K .

Из предшествующих обсуждений следует, что

$$\begin{aligned}\det(K) &= |\det(M + M^T)| \\ &= |\nu_K(-1)| \\ &= |\Delta_K(-1)| \\ &= |\det(G(L))| \\ &= |H_1(\Sigma_2(K), \mathbb{Z})|.\end{aligned}$$

- 1 Узлы и их инварианты
- 2 Что такое детерминант узла?
- 3 Что такое объем узла?
- 4 Гипотеза об объеме и детерминанте
- 5 Оценки через число областей скручивания

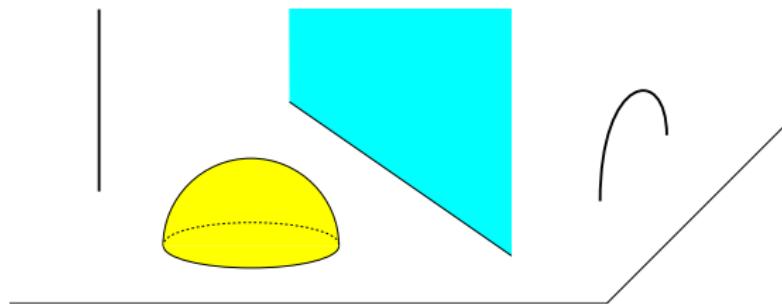
Трехмерное гиперболическое пространство

Обозначим через \mathbb{H}^3 3-мерное гиперболическое пространство. Нам удобно использовать модель Пуанкаре в верхнем полупространстве

$$\mathbb{H}^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R}_+ = \{(x + iy, t), t > 0\}.$$

Длины задаются формой $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dt^2}{t^2}$, а объем – формой $dV = \frac{dx dy dt}{t^3}$.

Точки, лежащие на границе $\partial\mathbb{H}^3 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ называются идеальными.



Прямые и плоскости в модели Пуанкаре \mathbb{H}^3 .

Трехмерные гиперболические многообразия

Известно, что $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^3) \cong \text{PSL}_2(\mathbb{C})$. Элемент $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{PSL}_2(\mathbb{C})$ действует на $\mathbb{H}^3 = \{(z, t) \mid z \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{R}_+\}$ по следующему правилу:

$$g(z, t) = \left(\frac{(az + b)\overline{(cz + d)} + a\bar{c}t^2}{|cz + d|^2 + |c|^2 t^2}, \frac{t}{|cz + d|^2 + |c|^2 t^2} \right).$$

Пусть G – дискретная группа изометрий \mathbb{H}^3 , действующая свободно.

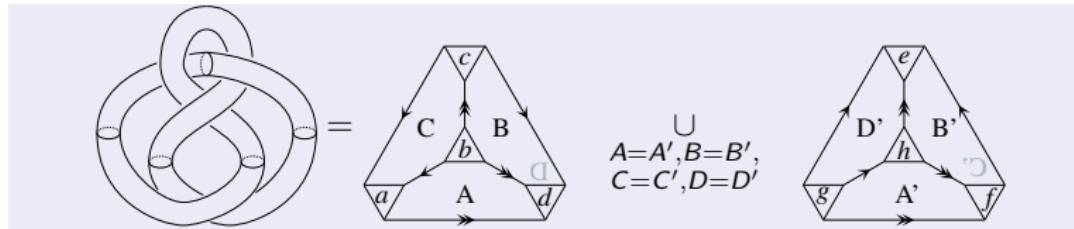
Факторпространство \mathbb{H}^3/G называется **гиперболическим** 3-многообразием.

Узел $K \subset S^3$ называется **гиперболическим**, если внутренность дополнения $S^3 \setminus K$ является гиперболическим 3-многообразием.

Будем обозначать $\text{vol}(K) = \text{vol}(S^3 \setminus K)$.

Гиперболические узлы

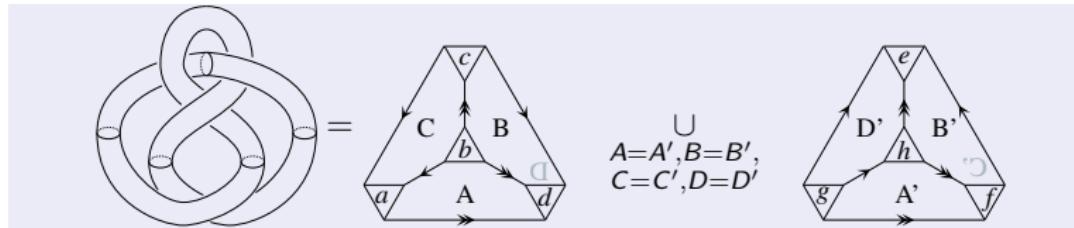
Пример. Дополнение $S^3 \setminus 4_1$ может быть получено склеиванием двух идеальных правильных гиперболических тетраэдров (все двухгранные углы равны $\frac{\pi}{3}$).



Тетраэдр называется идеальным если все его вершины лежат на $\partial\mathbb{H}^3$.

Гиперболические узлы

Пример. Дополнение $S^3 \setminus 4_1$ может быть получено склеиванием двух идеальных правильных гиперболических тетраэдров (все двухгранные углы равны $\frac{\pi}{3}$).



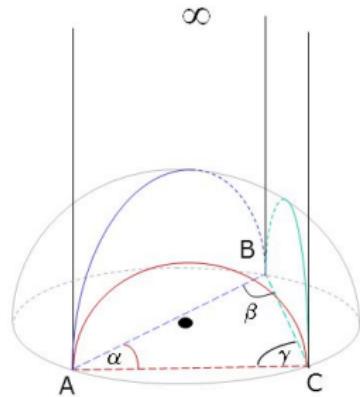
Тетраэдр называется **идеальным** если все его вершины лежат на $\partial\mathbb{H}^3$.

Хосте, Тистлтвэйт, Викс [1991]: Число простых (не представимых как связная сумма) узлов, допускающих диаграммы с не более, чем 16 перекрестками, равно 1701903. Среди них только 32 не являются гиперболическими.

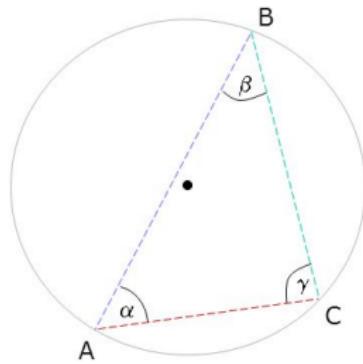
Бартон [2020]: Число простых узлов, допускающих диаграммы с не более, чем 19 перекрестками, равно 352 152 252. Среди них 352 151 858 гиперболических, а 51 280 967 из гиперболических являются альтернированными.

Объем идеального гиперболического тетраэдра

Обозначим через $T(\alpha, \beta, \gamma)$ идеальный тетраэдр с двугранными углами α, β, γ при ребрах, инцидентных вершине ∞ . Тогда $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ и двухгранные углы при противоположных ребрах тетраэдра равны.



Determined by triangle ABC



View from above

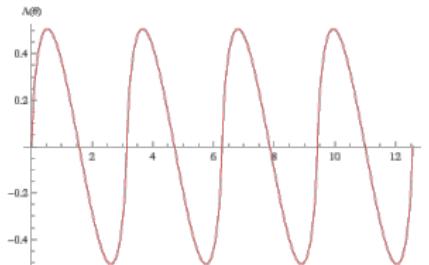
Лемма (Милнор [1982], Лобачевский [1836])

Имеет место формула $\text{vol}(T(\alpha, \beta, \gamma)) = \Lambda(\alpha) + \Lambda(\beta) + \Lambda(\gamma)$.

Функция Лобачевского

После работ Лобачевского и Милнора объемы многогранников \mathbb{H}^3 , а также объемы гиперболических узлов и 3-многообразий, выражают через [функцию Лобачевского](#):

$$\Lambda(\theta) = - \int_0^\theta \ln |2 \sin(t)| dt.$$



Ниже мы будем использовать константу

$$v_{tet} = 3\Lambda(\pi/3) \approx 1,014941606409653,$$

равную объему правильного идеального тетраэдра в \mathbb{H}^3 .

Отметим, что $\text{vol}(S^3 \setminus 4_1) = 2v_{tet}$.

- 1 Узлы и их инварианты
- 2 Что такое детерминант узла?
- 3 Что такое объем узла?
- 4 Гипотеза об объеме и детерминанте
- 5 Оценки через число областей скручивания

Формулировка гипотезы

Диаграмма узла или зацепления называется **альтернированной**, если при движении вдоль каждой компоненты проходы сверху и снизу в перекрестках чередуются.

Узел или зацепление называется **альтернированным**, если он допускает альтернированную диаграмму.

Чампанеркар, Кофман и Парсел [2016] сформулировали следующую гипотезу.

The Vol-Det Conjecture

Пусть K – альтернированный гиперболический узел или зацепление.

Тогда

$$\text{vol}(K) < 2\pi \ln(\det(K)).$$

Константа 2π является точной. А именно, для любого $\alpha < 2\pi$ существует альтернированный гиперболический узел K_α такой, что

$$\text{vol}(K_\alpha) > \alpha \cdot \ln(\det(K_\alpha)).$$

¹A. Champanerkar, I. Kofman, J. S. Purcell, Geometrically and diagrammatically maximal knots, J. Lond. Math. Soc. 94:3 (2016), 883–908.

Известные результаты

Чампанеркар, Кофман, и Парсел доказали, что Гипотеза **верна**

- для всех альтернированных гиперболических узлов, допускающих диаграммы с не более, чем 16 перекрестками (число таких узлов равно 479 320);
- для нескольких бесконечных серий узлов специального вида.

²S. D. Burton, The determinant and volume of 2-bridge links and alternating 3-braids, New York J. Math. 24 (2018), 293–316.

Известные результаты

Чампанеркар, Кофман, и Парсел доказали, что Гипотеза **верна**

- для всех альтернированных гиперболических узлов, допускающих диаграммы с не более, чем 16 перекрестками (число таких узлов равно 479 320);
- для нескольких бесконечных серий узлов специального вида.

Бартон [2018] установил, что Гипотеза **верна**

- для гиперболических двухмостовых зацеплений (они все альтернированные);
- для альтернированных гиперболических замыканий 3-нитиевых кос.

Стоименов [2007] установил, что имеет место другая оценка, а именно:

Если K – нерасщепляемое альтернированное гиперболическое зацепление, то

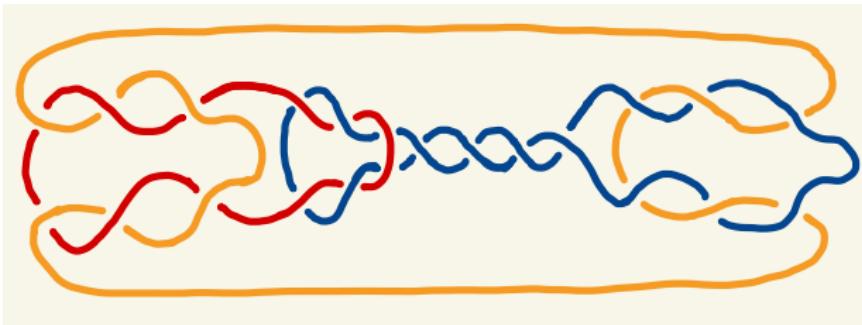
$$\text{vol}(K) < 28.666 \cdot \ln(\det(K)) - 19.868.$$

²S. D. Burton, The determinant and volume of 2-bridge links and alternating 3-braids, New York J. Math. 24 (2018), 293–316.

- 1 Узлы и их инварианты
- 2 Что такое детерминант узла?
- 3 Что такое объем узла?
- 4 Гипотеза об объеме и детерминанте
- 5 Оценки через число областей скручивания

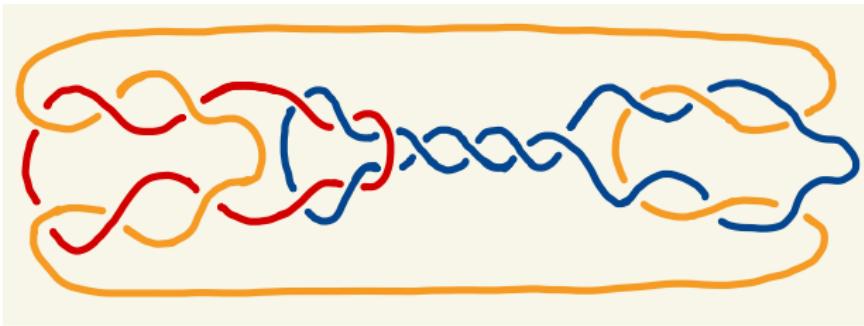
Области скручивания в диаграмме узла

Вопрос: Можно ли оценить объем $S^3 \setminus K$ взглянув на диаграмму узла или зацепления K ?



Области скручивания в диаграмме узла

Вопрос: Можно ли оценить объем $S^3 \setminus K$ взглянув на диаграмму узла или зацепления K ?



Областью скручивания на диаграмме D узла K назовем максимальную цепочку полуоборотов на 2 нитях в диаграмме. Обозначим через $t(D)$ число областей скручивания в D .

Для диаграммы на рисунке $t(D) = 7$. В самом деле, эта диаграмма имеет 7 цепочек полуоборотов: две красно-желтые, две красно-синие, две сине-желтые и одну сине-синюю.

Верхняя оценка объема через число областей скручивания

Теорема (Лакенби, Эгол, Терстон [2004])

Если диаграмма D узла или зацепления K имеет $t(D)$ областей скручивания, то

$$\text{vol}(S^3 \setminus K) \leq 10v_{\text{tet}} \cdot (t(D) - 1).$$

³ M. Lackenby, The volume of hyperbolic alternating link complements. With an appendix by I. Agol and D. Thurston, Proc. London Math. Soc. 88 (2004), 204–224.

⁴ А. Ю. Веснин, А. А. Егоров, Верхние оценки объемов обобщенных гиперболических многогранников и зацеплений, СМЖ 65:3 (2024), 469–488.

Верхняя оценка объема через число областей скручивания

Теорема (Лакенби, Эгол, Терстон [2004])

Если диаграмма D узла или зацепления K имеет $t(D)$ областей скручивания, то

$$\text{vol}(S^3 \setminus K) \leq 10v_{\text{tet}} \cdot (t(D) - 1).$$

Если диаграмма имеет много областей скручивания, то оценку можно улучшить.

Теорема 1 (Веснин, Егоров [2024])

Если диаграмма D узла или зацепления K имеет $t(D) > 8$ областей скручивания, то

$$\text{vol}(S^3 \setminus K) \leq 10v_{\text{tet}} \cdot (t(D) - 1, 4).$$

³ M. Lackenby, The volume of hyperbolic alternating link complements. With an appendix by I. Agol and D. Thurston, Proc. London Math. Soc. 88 (2004), 204–224.

⁴ А. Ю. Веснин, А. А. Егоров, Верхние оценки объемов обобщенных гиперболических многогранников и зацеплений, СМЖ 65:3 (2024), 469–488.

Схема доказательства Теоремы 1 (шаг 1)

От диаграммы D зацепления K с $t(D) = 7$ областями скручивания

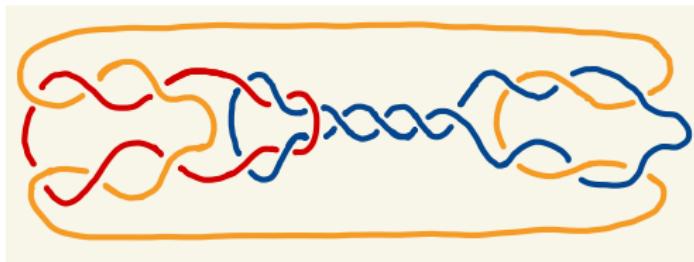
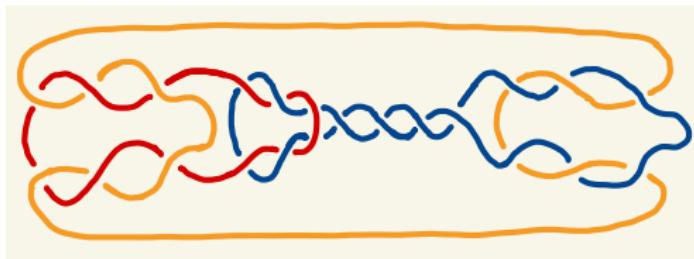
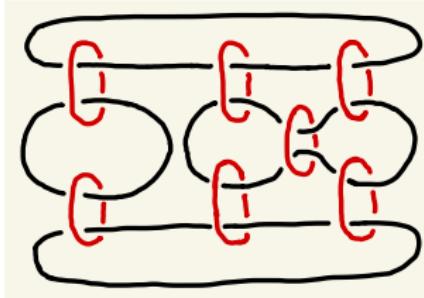


Схема доказательства Теоремы 1 (шаг 1)

От диаграммы D зацепления K с $t(D) = 7$ областями скручивания



перейдем к зацеплению L , заменив каждую область скручивания **красной** компонентой. L называется **аугментацией** для K и имеет $t(D)$ красных компонент.



По теореме Терстона о гиперболической хирургии имеем

$$\text{vol}(S^3 \setminus K) < \text{vol}(S^3 \setminus L).$$

Схема доказательства Теоремы 1 (шаг 2)

Чтобы получить $S^3 \setminus L$ как объединение двух копий идеального прямоугольного гиперболического многогранника P используем метод Лакенби - Эгола - Терстона. Заменим красные компоненты парами треугольников и стянем черные ребра.

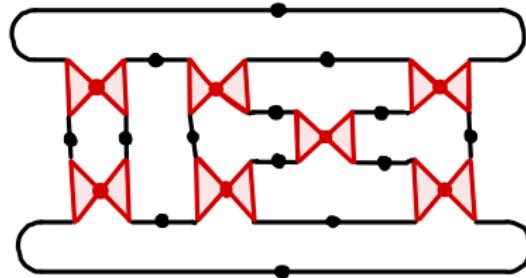
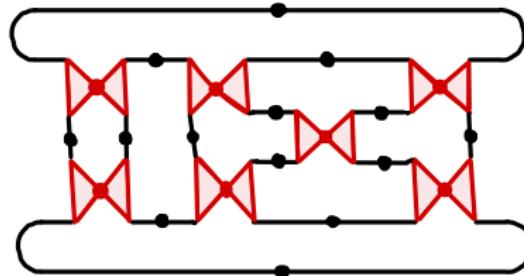


Схема доказательства Теоремы 1 (шаг 2)

Чтобы получить $S^3 \setminus L$ как объединение двух копий идеального прямоугольного гиперболического многогранника P используем метод Лакенби - Эгола - Терстона. Заменим красные компоненты парами треугольников и стянем черные ребра.



Для получения P осталось сжать два черных ребра. P имеет 21 идеальную вершину и 27 граней.

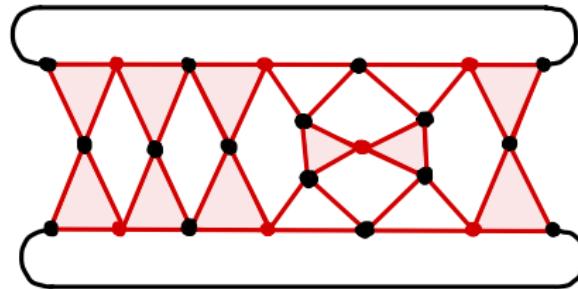


Схема доказательства Теоремы 1 (шаг 3)

По теореме Терстона и методу Лакенби - Эгола - Терстона получаем

$$\text{vol}(S^3 \setminus K) < \text{vol}(S^3 \setminus L) = 2 \text{vol}(P).$$

Чтобы оценить объем $\text{vol}(P)$ используем следующую лемму.

Лемма (Веснин, Егоров [2024])

Пусть P – идеальный гиперболический многогранник с E ребрами и p_3 треугольными гранями. Тогда

$$\text{vol}(P) \leq 2v_{\text{tet}} \cdot \left(E - \frac{p_3 + 8}{4} \right).$$

Теорема (Стоименов [2007])

Предположим, что приведенная диаграмма D альтернированного узла или зацепления K имеет $t(D)$ областей скручивания. Тогда

$$\det(K) \geq 2\gamma^{t(D)-1},$$

где $\gamma \approx 1,4253$ – единственный положительный корень уравнения

$$\gamma^{-5} + 2\gamma^{-4} + \gamma^{-3} - 1 = 0.$$

Теорема (Стоименов [2007])

Предположим, что приведенная диаграмма D альтернированного узла или зацепления K имеет $t(D)$ областей скручивания. Тогда

$$\det(K) \geq 2\gamma^{t(D)-1},$$

где $\gamma \approx 1,4253$ – единственный положительный корень уравнения

$$\gamma^{-5} + 2\gamma^{-4} + \gamma^{-3} - 1 = 0.$$

Используя этот результат, Бартон получил следующее неравенство.

Теорема (Бартон [2018])

Обозначим через $c(D)$ число перекрестков в диаграмме D . Тогда в обозначениях предыдущей теоремы имеем

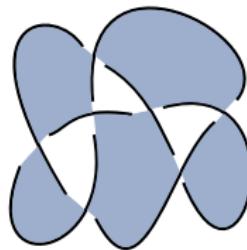
$$\det(K) \geq 2\gamma^{t(D)-1} + c(D) - t(D).$$

Идея доказательства теоремы Стоименова

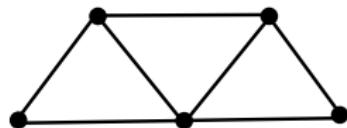
Каждой диаграмме зацепления можно сопоставить граф ее шахматной раскраски (белый или черный).



диаграмма зацепления



шахматная раскраска



черный граф раскраски

В обратную сторону, можно по графу восстановить альтернированное зацепление.

От плоского графа переходим к его медиальному 4-валентному графу (проекции зацепления). Затем проходы сверху и снизу расставляем в перекрестках альтернированно.

Известно, что детерминант альтернированного зацеплений совпадает с числом основных деревьев графа шахматной раскраски. Это число можно найти через полином Татта для графа.

Теорема (Бартон [2018])

Пусть K – альтернированное гиперболическое зацепление, и его приведенная альтернированная диаграмма D имеет $t(D)$ областей скручивания и $c(D)$ перекрестков. Если

$$c(D) \geq t(D) + \xi^{t(D)-1} - 2\gamma^{t(D)-1},$$

где $\gamma \approx 1,4253$ и $\xi = e^{5v_{tet}/4} \approx 5,0296$, то Гипотеза верна для K .

Доказательство основано на неравенстве Бартона с предыдущего слайда и неравенстве из теоремы Лакенби – Эгола – Терстона.

Теорема (Бартон [2018])

Пусть K – альтернированное гиперболическое зацепление, и его приведенная альтернированная диаграмма D имеет $t(D)$ областей скручивания и $c(D)$ перекрестков. Если

$$c(D) \geq t(D) + \xi^{t(D)-1} - 2\gamma^{t(D)-1},$$

где $\gamma \approx 1,4253$ и $\xi = e^{5v_{tet}/4} \approx 5,0296$, то Гипотеза верна для K .

Доказательство основано на неравенстве Бартона с предыдущего слайда и неравенстве из теоремы Лакенби – Эгола – Терстона.

Оценку в теореме Бартона можно улучшить для $t(D) > 8$, если воспользоваться неравенством из Теоремы 1.

Для гиперболических зацеплений всегда $t(D) \geq 2$ (если $t(D) = 1$, то зацепление торическое). Значит, вместо неравенства Бартона с предыдущего слайда можно использовать неравенство Ито, приведенное на следующем слайде.

Сравним неравенство Бартона и неравенство Ито

Теорема (Бартон [2018])

Обозначим через $c(D)$ число перекрестков в диаграмме D . Тогда

$$\det(K) \geq 2\gamma^{t(D)-1} + c(D) - t(D).$$

Теорема (Ито [2023+])

Пусть D приведенная альтернированная и скрученно-приведенная диаграмма узла или зацепления K , и $t(D) \geq 2$. Тогда

$$\det(K) > 2\gamma^{t(D)-1} + 2(c(D) - t(D))\gamma^{(t(D)-3)/2},$$

где $\gamma \approx 1,4253$ – единственный положительный корень уравнения

$$\gamma^{-5} + 2\gamma^{-4} + \gamma^{-3} - 1 = 0.$$

⁵

T. Ito, Special alternating knots with sufficiently many twist regions have no chirally cosmetic surgeries.
Preprint is available at <https://arxiv.org/pdf/2301.09855.pdf>, 23 pp.

Теорема 2 (Веснин, Егоров [2026])

Пусть K – альтернированный узел или зацепление, и его приведенная альтернированная и скрученно-приведенная диаграмма D имеет $t(D) > 8$ областей скручивания и $c(D)$ перекрестков.

Если

$$c(D) \geq t(D) + \frac{\xi^{t(D)-1,4}}{2\gamma^{\frac{t(D)-3}{2}}} - \gamma^{\frac{t(D)+1}{2}},$$

где $\xi = e^{5\nu_{tet}/4} \approx 5,0296$ и $\gamma \approx 1,4253$ – единственный положительный корень уравнения

$$\gamma^{-5} + 2\gamma^{-4} + \gamma^{-3} - 1 = 0,$$

то Гипотеза верна для K .

⁶ А. Веснин, А. Егоров *Гипотеза об объеме и детерминанте для альтернированных зацеплений с большим числом скручиваний*. Матем. заметки 119:1 (2026), 9–18.

Схема доказательства Теоремы 2

По неравенству Ито имеем:

$$\det(K) \geq 2\gamma^{t(D)-1} + 2(c(D) - t(D))\gamma^{\frac{t(D)-3}{2}}.$$

Из условия теоремы получаем:

$$\det(K) \geq \xi^{t(D)-1,4},$$

где $\xi = e^{5v_{\text{tet}}/4}$. Следовательно,

$$\ln(\det(K)) > (t(D) - 1, 4) \frac{5v_{\text{tet}}}{\pi},$$

откуда

$$2\pi \ln(\det(K)) > 10 v_{\text{tet}} (t(D) - 1, 4). \quad (1)$$

Как показано в Теореме 1, если $t(D) > 8$, то

$$\text{vol}(K) \leq 10 v_{\text{tet}} (t(D) - 1, 4). \quad (2)$$

Из неравенств (1) и (2) заключаем, что Гипотеза верна для зацепления K . \square

Насколько Теорема 2 улучшает Теорему Бартона?

Сравним численные результаты, получаемые из Теоремы Бартона и Теоремы 2.

Пусть K – альтернированный гиперболический узел или зацепление.

Предположим, что его приведенная альтернированная скрученно-приведенная диаграмма D имеет $t(D) = 9$ областей скручивания и $c(D)$ перекрестков.

- По Теореме Бартона Гипотеза верна, если $c(D) \geq 409\,453$.
- По Теореме 2 Гипотеза верна, если $c(D) \geq 37\,055$.

Спасибо за внимание!

vesnin@math.nsc.ru