Поднятие конечнократных отображений

Аксенова Дарья
ПОМИ РАН

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ, 2025

Обобщение трюка Александера

Теорема (Аксенова, Малютин'23). Пусть M — n-мерное ориентируемое многообразие и $\Omega \subset M$ гомеоморфно открытому n-шару.

Предположим, что существует непрерывное отображение $f: D^n \to M$ — замкнутого шара в M такое, что :

1) сужение $f|_{\mathrm{Int}D^n}$ является гомеоморфизмом между $\mathrm{Int}D^n$ и Ω,

2) $\forall x \in M$ прообраз $f^{-1}(x)$ не более, чем конечно.

Тогда любой гомеоморфизм $h: M^n \to M^n$, сохраняющий ориентацию и неподвижный на $M \backslash \Omega$, связан с тождественным изотопией, неподвижной на $M \backslash \Omega$.

Отображение $f\colon X \to Y$ топологических пространств X, Y называется **конечнократным**, если прообраз каждой точки $y \in f(X)$ конечен.

Множество $\{x \in X \,|\, f^{-1}(f(x)) = \{x\}\}$ называется **областью инъективности** отображения f.

Множество $\Omega \subset X$ называется **конечно-локально-связным** в X, если для каждой точки $x \in \mathrm{cl}(X \backslash \Omega)$ и любой ее окрестности $U \subset X$ найдется окрестность $u \subset U$ точки x такая, что $u \cap \Omega$ связно.

Теорема (Аксенова, Малютин’25). Пусть X, Y, Z — компактные хаусдорфовы пространства,
$f_X\colon X \to Z$ и $f_Y\colon Y \to Z$ — конечнократные непрерывные отображения, Ω_X, Ω_Y — области инъективности отображений f_X, f_Y.

Предположим, что выполняются следующие условия:

- $f_X(\Omega_X) \subset f_Y(\Omega_Y)$, а сужение $f_Y|_{\Omega_Y}\colon \Omega_Y \to f_Y(\Omega_Y)$ — гомеоморфизм;
- Ω_X — плотно и предельно-локально-связно в X.

Тогда существует единственное непрерывное отображение $g\colon X \to Y$ такое, что $f_Y \circ X = f_X$.

Спасибо за внимание!