# Сингулярные меандры

Юрий Белоусов

7 ноября 2025 г.

СПбГУ, Институт им. Эйлера

# Скобочные последовательности

Возьмем две правильные скобочные последовательности одинаковой длины и нарисуем друг под другом.

# Скобочные последовательности

Возьмем две правильные скобочные последовательности одинаковой длины и нарисуем друг под другом.

(((()))(()()))

(())(())()()

$$\downarrow$$

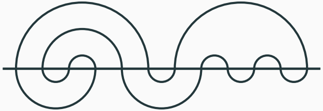
# Скобочные последовательности

Возьмем две правильные скобочные последовательности одинаковой длины и нарисуем друг под другом.

((()))(()())

(())(())()()

$\downarrow$



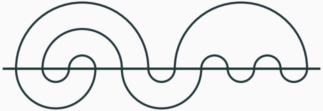
# Скобочные последовательности

Возьмем две правильные скобочные последовательности одинаковой длины и нарисуем друг под другом.

((()))(()())

(())(())()()

↓

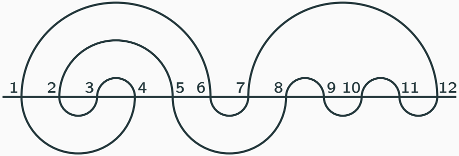


Получился, вообще говоря, набор кривых.

Вопрос: когда получается одна замкнутая кривая?

# Альтернативный подход: перестановки

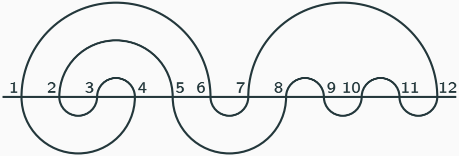
Пронумеруем точки пересечения и запишем их номера в порядке обхода вдоль кривой.




$$(1, 4, 3, 2, 5, 8, 9, 10, 11, 12, 7, 6)$$

# Альтернативный подход: перестановки

Пронумеруем точки пересечения и запишем их номера в порядке обхода вдоль кривой.




$$(1, 4, 3, 2, 5, 8, 9, 10, 11, 12, 7, 6)$$

Вопрос: когда перестановка, начинающаяся в 1, задает плоскую кривую?

# Меандры

Такие комбинаторные объекты называются *замкнутыми меандрами*.

# Меандры

Такие комбинаторные объекты называются *замкнутыми меандрами*. Задача подсчета меандров была поставлена Арнольдом в 1988.

# Меандры

Такие комбинаторные объекты называются *замкнутыми меандрами*. Задача подсчета меандров была поставлена Арнольдом в 1988.

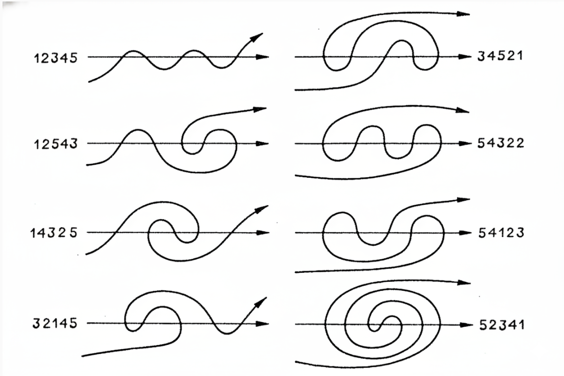



**Рис. 1:** В. И. Арнольд, «Разветвленное накрытие $\mathbb{C}\mathrm{P}^2 \to S^4$, гиперболичность и проективная топология», 1988

# Меандры: тонкости определения

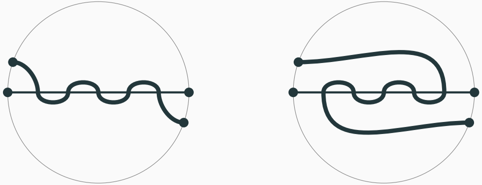
Мы хотим определить меандры:

- топологически — как пару кривых в диске;

# Меандры: тонкости определения

Мы хотим определить меандры:

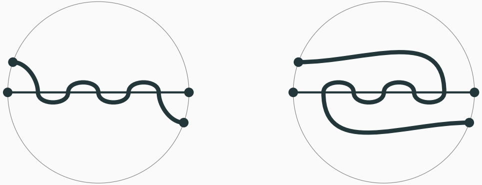
- топологически — как пару кривых в диске;
- чтобы два меандра ниже не были эквивалентными;



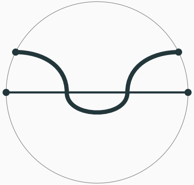
# Меандры: тонкости определения

Мы хотим определить меандры:

- топологически — как пару кривых в диске;
- чтобы два меандра ниже не были эквивалентными;



- чтобы меандр с двумя пересечениями был единственный.



# Число меандров

$\mathcal{M}_n$ — число неэквивалентных меандров с $n$ пересечениями.

Вопросы: чему равно $\mathcal{M}_n$?

## Число меандров

$\mathcal{M}_n$ — число неэквивалентных меандров с $n$ пересечениями.

<u>Вопросы</u>: чему равно $\mathcal{M}_n$? Какая асимптотика роста у $\mathcal{M}_n$?

# Число меандров

$\mathcal{M}_n$ — число неэквивалентных меандров с $n$ пересечениями.

Вопросы: чему равно $\mathcal{M}_n$? Какая асимптотика роста у $\mathcal{M}_n$? Ответы неизвестны.

# Число меандров

$\mathcal{M}_n$ — число неэквивалентных меандров с $n$ пересечениями.

Вопросы: чему равно $\mathcal{M}_n$? Какая асимптотика роста у $\mathcal{M}_n$? Ответы неизвестны.

Вычислять $\mathcal{M}_n$ умеем только перебором: $\mathcal{M}_n$ известны для $n \leq 55$ (Jensen, 2000).

# Число меандров

$\mathcal{M}_n$ — число неэквивалентных меандров с $n$ пересечениями.

Вопросы: чему равно $\mathcal{M}_n$? Какая асимптотика роста у $\mathcal{M}_n$? Ответы неизвестны.

Вычислять $\mathcal{M}_n$ умеем только перебором: $\mathcal{M}_n$ известны для $n \leq 55$ (Jensen, 2000).

**Теорема (Alberta, Paterson 2004)**
$3.3734 \leq \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\mathcal{M}_n} \leq 3.5918.$

# Число меандров

$\mathcal{M}_n$ — число неэквивалентных меандров с $n$ пересечениями.

Вопросы: чему равно $\mathcal{M}_n$? Какая асимптотика роста у $\mathcal{M}_n$? Ответы неизвестны.

Вычислять $\mathcal{M}_n$ умеем только перебором: $\mathcal{M}_n$ известны для $n \leq 55$ (Jensen, 2000).

**Теорема (Alberta, Paterson 2004)**
$3.3734 \leq \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\mathcal{M}_n} \leq 3.5918.$

**Гипотеза (Di Francesco et al., 2000)**
$\mathcal{M}_n \sim C^n n^{\alpha},$

# Число меандров

$\mathcal{M}_n$ — число неэквивалентных меандров с $n$ пересечениями.

Вопросы: чему равно $\mathcal{M}_n$? Какая асимптотика роста у $\mathcal{M}_n$? Ответы неизвестны.

Вычислять $\mathcal{M}_n$ умеем только перебором: $\mathcal{M}_n$ известны для $n \leq 55$ (Jensen, 2000).

**Теорема (Alberta, Paterson 2004)**
$3.3734 \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\mathcal{M}_n} \leq 3.5918.$

**Гипотеза (Di Francesco et al., 2000)**
$\mathcal{M}_n \sim C^n n^{\alpha}$, *где* $\alpha = \frac{29+\sqrt{145}}{12}$.

# Число меандров

$\mathcal{M}_n$ — число неэквивалентных меандров с $n$ пересечениями.

Вопросы: чему равно $\mathcal{M}_n$? Какая асимптотика роста у $\mathcal{M}_n$? Ответы неизвестны.

Вычислять $\mathcal{M}_n$ умеем только перебором: $\mathcal{M}_n$ известны для $n \leq 55$ (Jensen, 2000).

**Теорема (Alberta, Paterson 2004)**
$3.3734 \leq \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\mathcal{M}_n} \leq 3.5918.$

**Гипотеза (Di Francesco et al., 2000)**
$\mathcal{M}_n \sim C^n n^{\alpha}$, *где* $\alpha = \frac{29+\sqrt{145}}{12}$.

| $n$ | $\mathcal{M}_n$ |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | 1 |
| 3 | 2 |
| 4 | 3 |
| 5 | 8 |
| 6 | 14 |
| 7 | 42 |
| 8 | 81 |
| 9 | 262 |
| 10 | 538 |
| 11 | 1828 |
| 12 | 3926 |
| 13 | 13820 |
| 14 | 30694 |
| 15 | 110954 |

# Связи меандров с другими областями

Меандры связаны с

- инвариантами трёхмерных многообразий (K. Ko, L. Smolinsky, 1991);

# Связи меандров с другими областями

Меандры связаны с

- инвариантами трёхмерных многообразий (K. Ko, L. Smolinsky, 1991);
- уравнениями в частных производных (G. Fusco, C. Rocha, 1991);

## Связи меандров с другими областями

Меандры связаны с

- инвариантами трёхмерных многообразий (K. Ko, L. Smolinsky, 1991);
- уравнениями в частных производных (G. Fusco, C. Rocha, 1991);
- алгебрами Темперли—Либа (P. Di Francesco, O. Golinelli, E. Guitter, 1997);

# Связи меандров с другими областями

Меандры связаны с

- инвариантами трёхмерных многообразий (K. Ko, L. Smolinsky, 1991);
- уравнениями в частных производных (G. Fusco, C. Rocha, 1991);
- алгебрами Темперли—Либа (P. Di Francesco, O. Golinelli, E. Guitter, 1997);
- пространствами модулей квадратичных дифференциалов (V. Delecroix, É. Goujard, P. Zograf, A. Zorich, 2020);

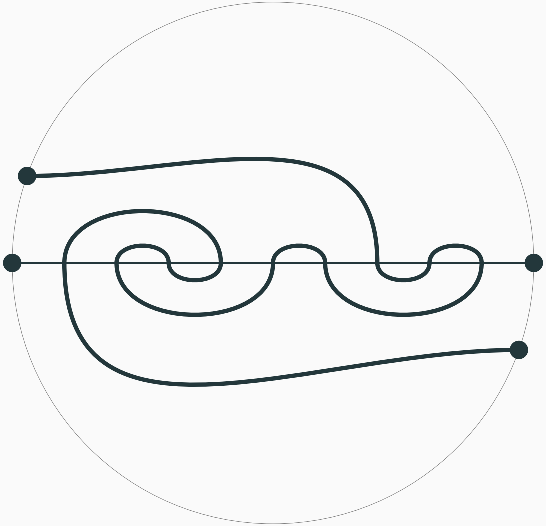
## Связи меандров с другими областями

Меандры связаны с

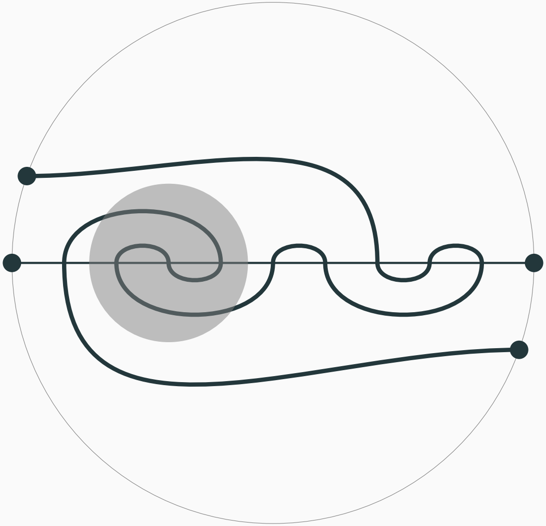
- инвариантами трёхмерных многообразий (K. Ko, L. Smolinsky, 1991);
- уравнениями в частных производных (G. Fusco, C. Rocha, 1991);
- алгебрами Темперли—Либа (P. Di Francesco, O. Golinelli, E. Guitter, 1997);
- пространствами модулей квадратичных дифференциалов (V. Delecroix, É. Goujard, P. Zograf, A. Zorich, 2020);
- и другими областями (см. A. Zvonkin, 2023).

# Факторизация меандров

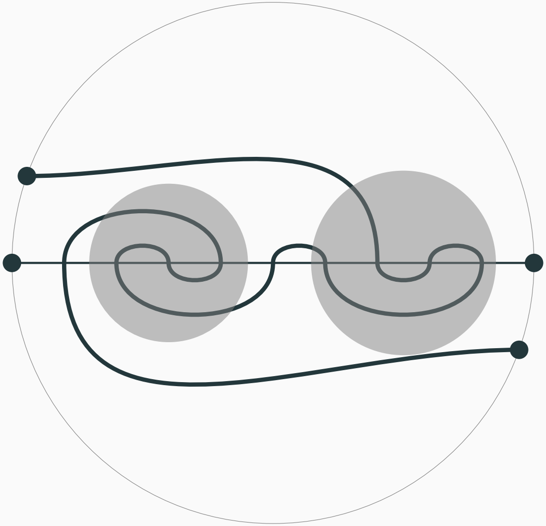
# Подмеандр: визуальная интуиция



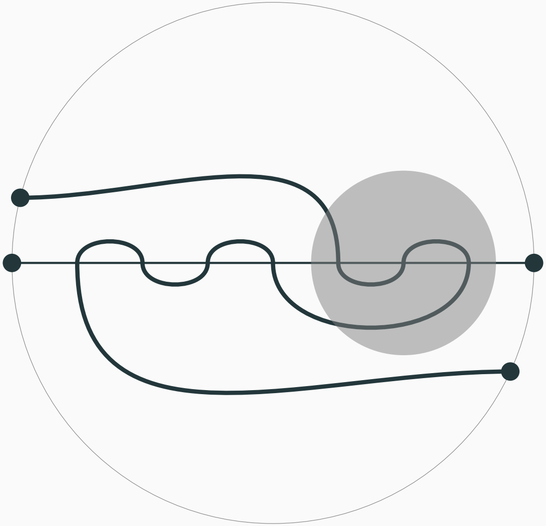
# Подмеандр: визуальная интуиция



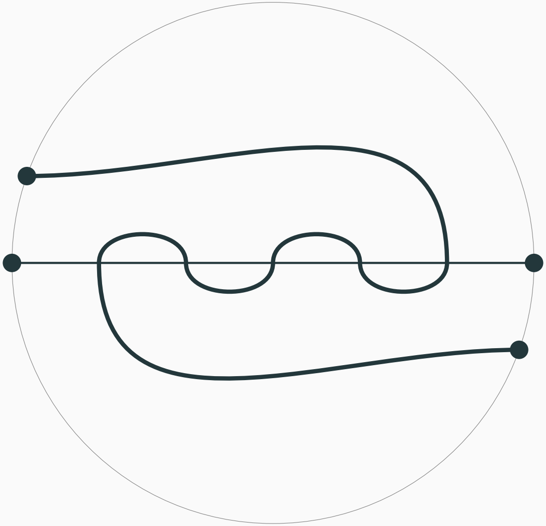
# Подмеандр: визуальная интуиция



# Пример вырезания 1



# Пример вырезания 2



# ЧУМ подмеандров

**Определение**
Пусть $M = (D, m, l, p_1, \ldots, p_4)$ — меандр. Скажем, что меандр $M' = (D', m', l', p_1', \ldots, p_4')$ — *подмеандр в* $M$, если

- $D' \subseteq D$;
- $m' = D' \cap m$;
- $l' = D' \cap l$;

# ЧУМ подмеандров

**Определение**
Пусть $M = (D, m, l, p_1, \dots, p_4)$ — меандр. Скажем, что меандр $M' = (D', m', l', p'_1, \dots, p'_4)$ — *подмеандр в* $M$, если

- $D' \subseteq D$;
- $m' = D' \cap m$;
- $l' = D' \cap l$;

\+ доп. условие на граничные точки.

# ЧУМ подмеандров

**Определение**
Пусть $M = (D, m, l, p_1, \ldots, p_4)$ — меандр. Скажем, что меандр $M' = (D', m', l', p_1', \ldots, p_4')$ — *подмеандр в* $M$, если

- $D' \subseteq D$;
- $m' = D' \cap m$;
- $l' = D' \cap l$;

\+ доп. условие на граничные точки.

Два подмеандра *эквивалентны*, если они содержат одни и те же точки пересечения.

# ЧУМ подмеандров

**Определение**
Пусть $M = (D, m, l, p_1, \ldots, p_4)$ — меандр. Скажем, что меандр $M' = (D', m', l', p'_1, \ldots, p'_4)$ — *подмеандр в* $M$, если

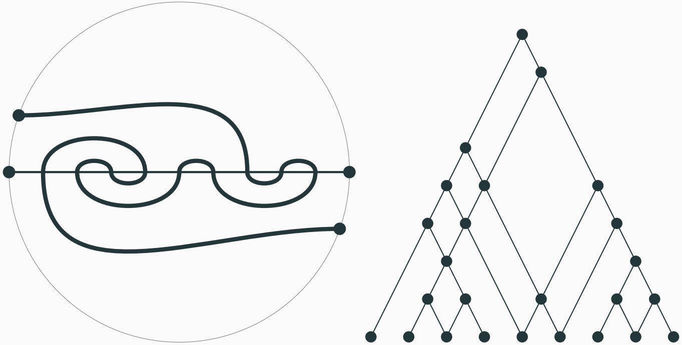
- $D' \subseteq D$;
- $m' = D' \cap m$;
- $l' = D' \cap l$;

\+ доп. условие на граничные точки.

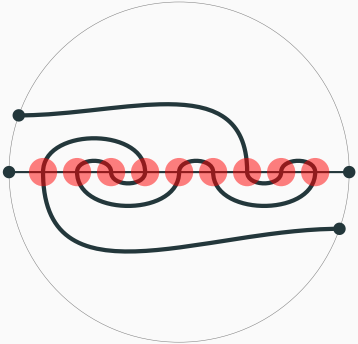
Два подмеандра *эквивалентны*, если они содержат одни и те же точки пересечения.

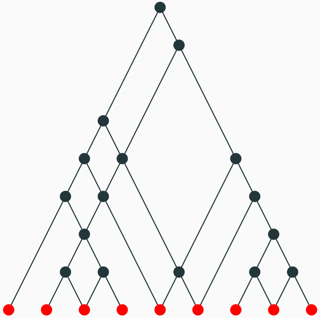
**Определение**
Для данного меандра классы эквивалентности его подмеандров образуют частично упорядоченное множество. Его диаграмму Хассе мы называем *графом разложения меандра*.

# Пример графа разложения

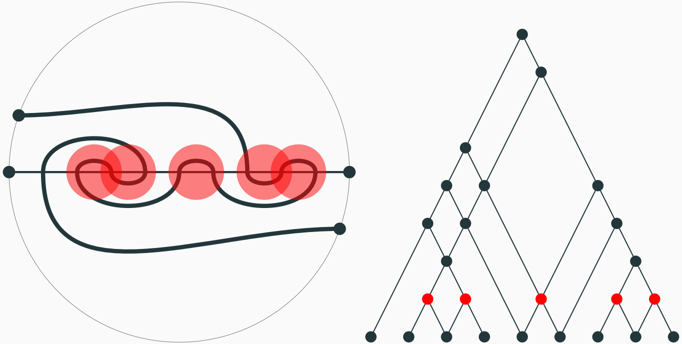


# Пример графа разложения

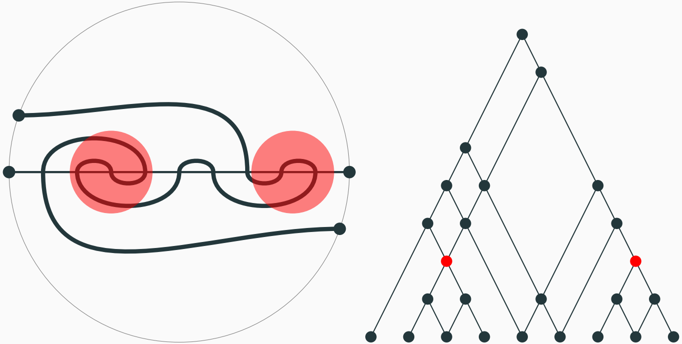




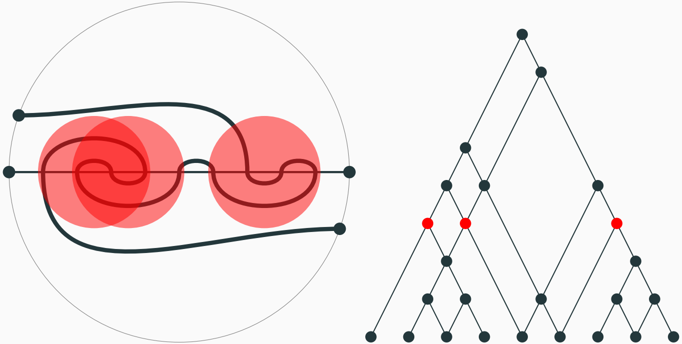
# Пример графа разложения



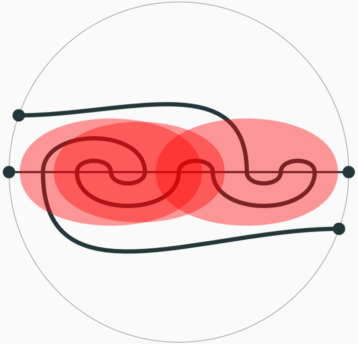
# Пример графа разложения

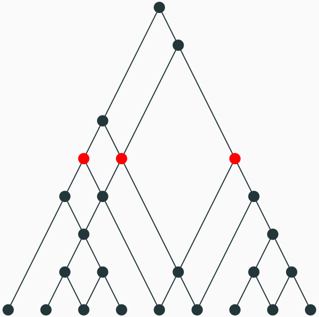


# Пример графа разложения

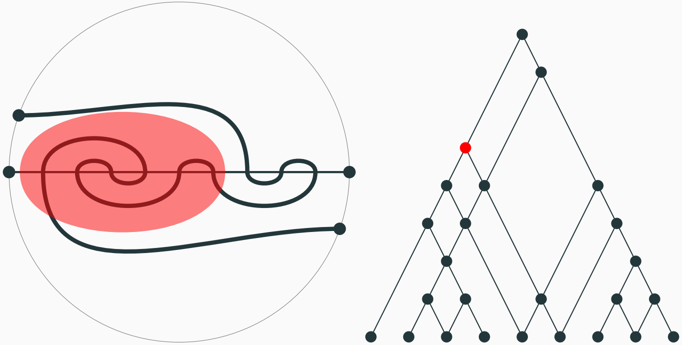


# Пример графа разложения

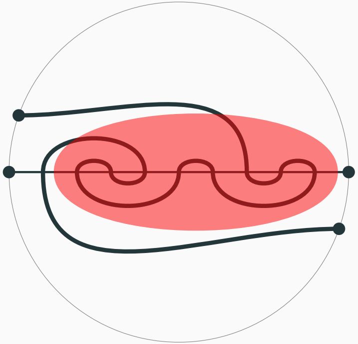


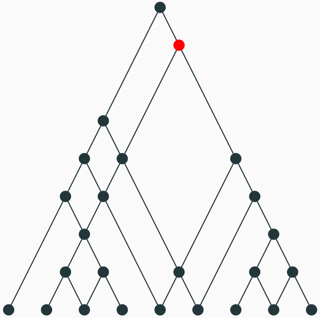


# Пример графа разложения



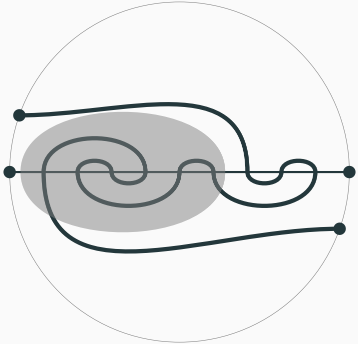
# Пример графа разложения





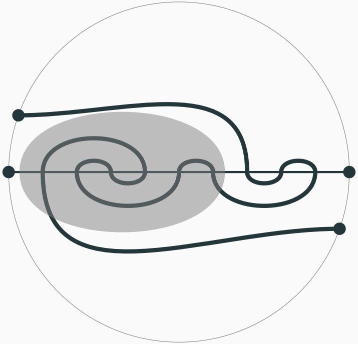
# Вырезание подмеандра с четным числом пересечений

Вопрос: как вырезать такой подмеандр?



# Вырезание подмеандра с четным числом пересечений

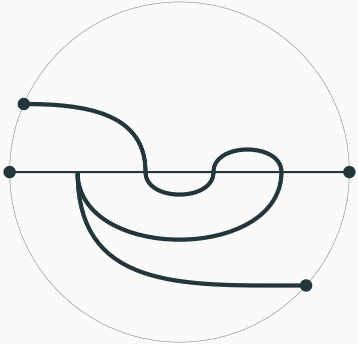
Вопрос: как вырезать такой подмеандр?



Ответ: нужно рассматривать *сингулярные меандры*, т. е. меандры, где допустимы точки касания.

# Вырезание подмеандра с четным числом пересечений

Вопрос: как вырезать такой подмеандр?



Ответ: нужно рассматривать *сингулярные меандры*, т. е. меандры, где допустимы точки касания.

# Простые меандры

В меандре с $n$ пересечениями (где $n > 1$) не менее $n + 1$ и не более $\binom{n}{2}$ неэквивалентных подмеандров.

# Простые меандры

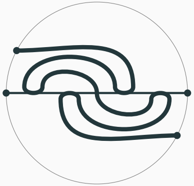
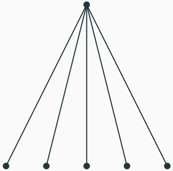
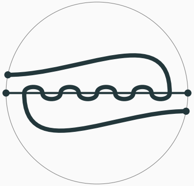
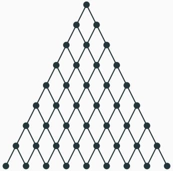
В меандре с $n$ пересечениями (где $n > 1$) не менее $n + 1$ и не более $\binom{n}{2}$ неэквивалентных подмеандров.

**Определение**
Меандр называется *простым*, если у него более 1 пересечения и либо $n + 1$, либо $\binom{n}{2}$ неэквивалентных подмеандров.

# Простые меандры

В меандре с $n$ пересечениями (где $n > 1$) не менее $n+1$ и не более $\binom{n}{2}$ неэквивалентных подмеандров.

**Определение**
Меандр называется *простым*, если у него более 1 пересечения и либо $n+1$, либо $\binom{n}{2}$ неэквивалентных подмеандров.
Меандры первого типа назовем *неприводимыми*, меандры второго типа — *змейками*.

# Разложение меандров на простые

Меандр либо простой, либо содержит простой подмеандр.

# Разложение меандров на простые

Меандр либо простой, либо содержит простой подмеандр.

**Теорема (Б., 2025)**
*Последовательное вырезание неприводимых подмеандров и максимальных змеек дает каноническое разложение меандра на простые.*

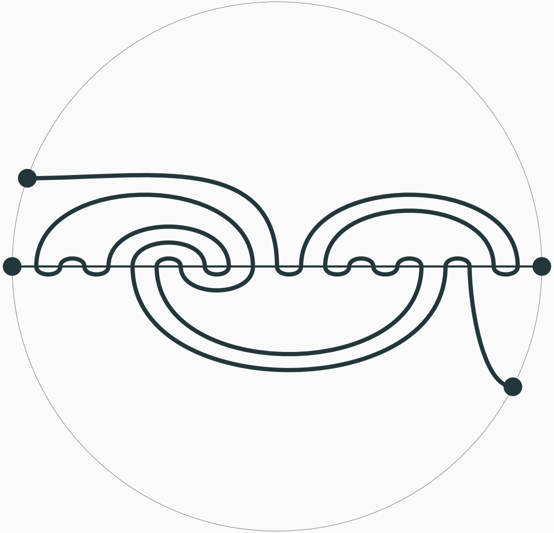
# Разложение меандров на простые

Меандр либо простой, либо содержит простой подмеандр.

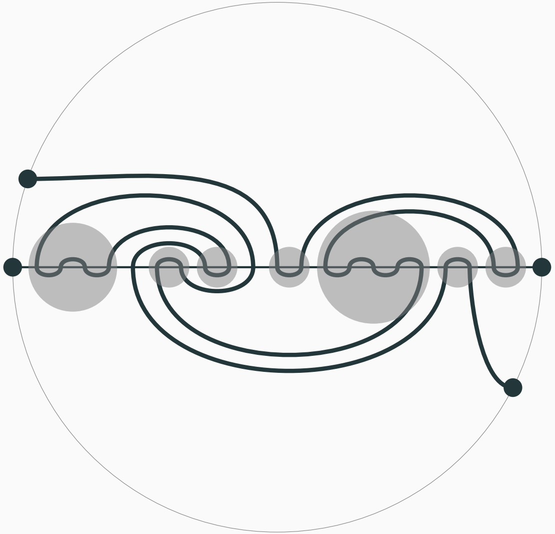
**Теорема (Б., 2025)**
*Последовательное вырезание неприводимых подмеандров и максимальных змеек дает каноническое разложение меандра на простые.*

**Следствие**
*Производящая функция для меандров выражается через производящие функции змеек и неприводимых меандров.*

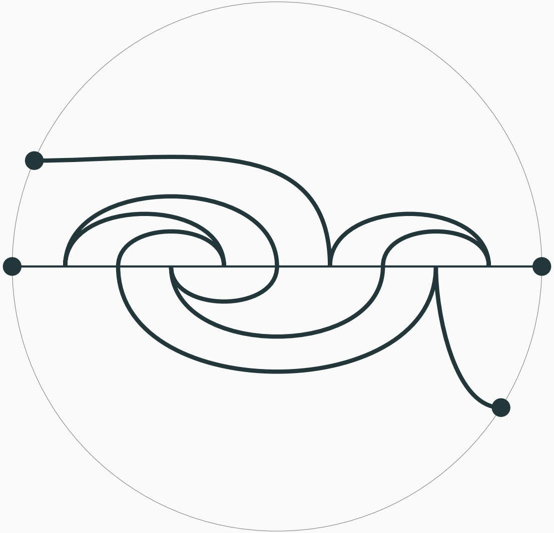
# Пример факторизации



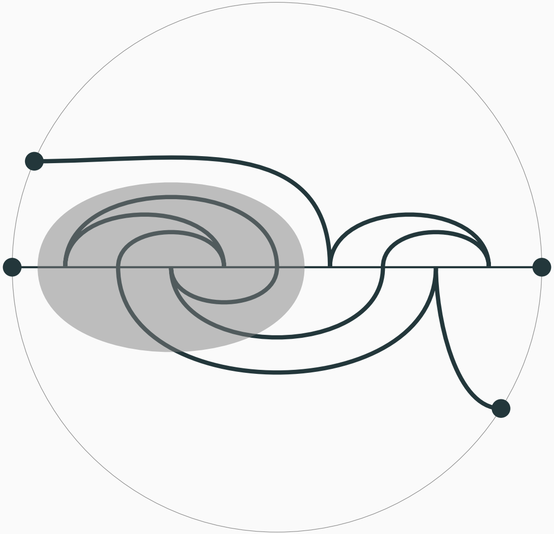
# Пример факторизации



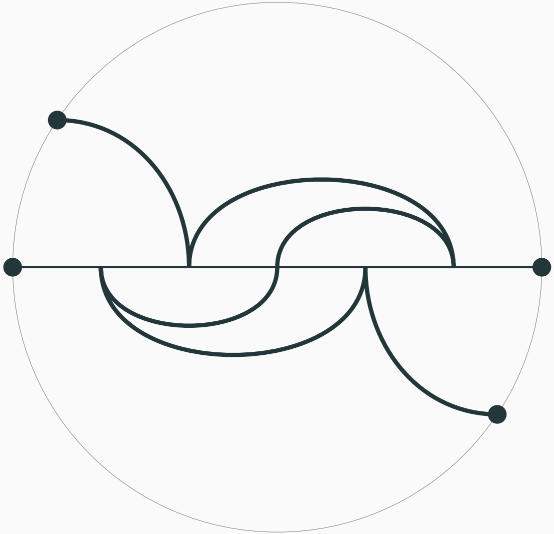
# Пример факторизации (продолжение)



# Пример факторизации (продолжение)

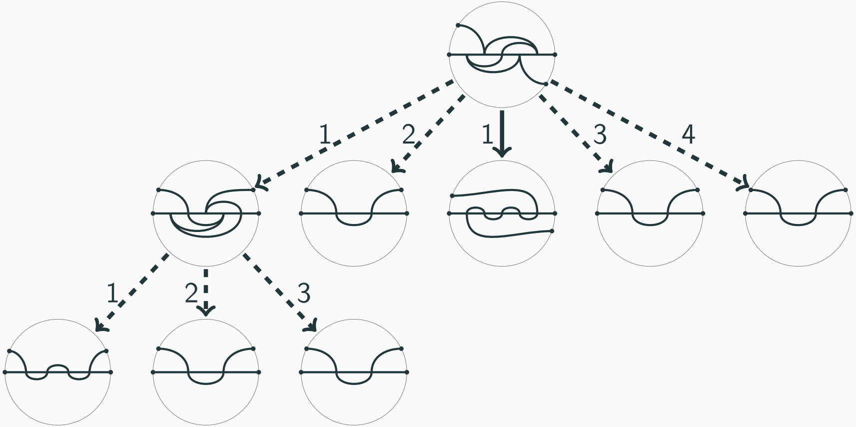


# Пример факторизации (окончание)



# Пример факторизации в виде дерева

Конструирование меандров из простых удобно изображать деревом:



## Трихотомия в маломерной топологии

Алгебраически это значит, что на множестве меандров действует 2-крашеная операда.

# Трихотомия в маломерной топологии

Алгебраически это значит, что на множестве меандров действует 2-крашеная операда.

Аналогичная структура — когда есть два типа простых объектов (один комбинаторный, второй геометрический) а все остальные строятся из них с помощью операды — возникает и в других контекстах в маломерной топологии:

# Трихотомия в маломерной топологии

Алгебраически это значит, что на множестве меандров действует 2-крашеная операда.

Аналогичная структура — когда есть два типа простых объектов (один комбинаторный, второй геометрический) а все остальные строятся из них с помощью операды — возникает и в других контекстах в маломерной топологии:

- Теория узлов. Строительные блоки: торические и гиперболические узлы. Все остальные — сателлиты. На языке операд см. R. Budney, 2012.

# Трихотомия в маломерной топологии

Алгебраически это значит, что на множестве меандров действует 2-крашеная операда.

Аналогичная структура — когда есть два типа простых объектов (один комбинаторный, второй геометрический) а все остальные строятся из них с помощью операды — возникает и в других контекстах в маломерной топологии:

- Теория узлов. Строительные блоки: торические и гиперболические узлы. Все остальные — сателлиты. На языке операд см. R. Budney, 2012.
- Теория кос. Строительные блоки: периодические и псевдо-аносовские. Все остальные — приводимые. Про операды кос см. D. Yau. 2021.

# Простые меандры

# Число змеек

Пусть $\mathcal{M}_{n,k}^{(S)}$ — число змеек с $n$ трансверсальными пересечениями и $k$ касаниями. Тогда

$$\mathcal{M}_{n,k}^{(S)} = \begin{cases} 0 & n+k<2, \\ \binom{n+k}{n} & n \text{ четно}, \\ 2\binom{n+k}{n} & n \text{ нечетно}. \end{cases}$$

## Число змеек

Пусть $\mathcal{M}_{n,k}^{(S)}$ — число змеек с $n$ трансверсальными пересечениями и $k$ касаниями. Тогда

$$\mathcal{M}_{n,k}^{(S)} = \begin{cases} 0 & n+k<2, \\ \binom{n+k}{n} & n \text{ четно}, \\ 2\binom{n+k}{n} & n \text{ нечетно}. \end{cases}$$

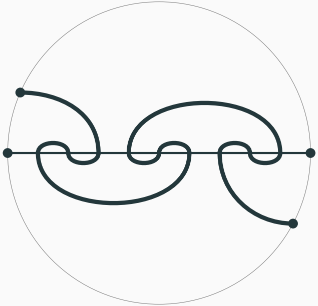
**Следствие**

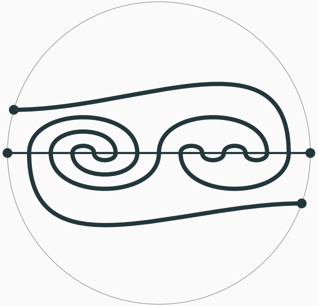
*Пусть $\phi_{(S)}(x,t)$ — производящая функция $\mathcal{M}_{n,k}^{(S)}$. Тогда*

$$\phi_{(S)}(x,t) = -\frac{3}{2(t+x-1)} - \frac{1}{2(x-t+1)} - t - 2x - 1.$$

# Итерированные змейки

**Определение**
Меандр называется *итерированной змейкой*, если в его разложении нет неприводимых меандров.





## Число итерированных змеек

**Утверждение**

*Пусть* $\mathcal{M}^{(IS)}_{n,k}$ *— число итерированных змеек с* $n$ *трансверсальными пересечениями и* $k$ *касаниями. Тогда*

$$\phi^{(1)}_{(IS)}(x,t) = \phi^{(1)}_{(S)}(x,t)\left(x + \frac{\phi^{(1)}_{(IS)}(x,t)}{2},\ t\right),$$

$$\phi^{(2)}_{(IS)}(x,t) = \phi^{(2)}_{(S)}(x,t)\left(x + \frac{\phi^{(1)}_{(IS)}(x,t)}{2},\ t\right).$$

# Число итерированных змеек

**Утверждение**
*Пусть* $\mathcal{M}^{(IS)}_{n,k}$ *— число итерированных змеек с* $n$ *трансверсальными пересечениями и* $k$ *касаниями. Тогда*

$$\phi^{(1)}_{(IS)}(x,t) = \phi^{(1)}_{(S)}(x,t)\left(x + \frac{\phi^{(1)}_{(IS)}(x,t)}{2},\ t\right),$$

$$\phi^{(2)}_{(IS)}(x,t) = \phi^{(2)}_{(S)}(x,t)\left(x + \frac{\phi^{(1)}_{(IS)}(x,t)}{2},\ t\right).$$

Можно явно найти решение, но оно очень громоздкое.

## Значения $\mathcal{M}_{n,k}^{(IS)}$

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | ... | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | ... | |
| 1 | 0 | 4 | 14 | 48 | 164 | ... | A007070(?) |
| 2 | 1 | 7 | 36 | 164 | 700 | ... | A181292(?) |
| 3 | 2 | 24 | 188 | 1208 | 6898 | ... | |
| 4 | 3 | 47 | 453 | 3449 | 22740 | ... | |
| 5 | 8 | 168 | 2076 | 19632 | 156972 | ... | |
| 6 | 14 | 346 | 4908 | 52324 | 465210 | ... | |
| 7 | 42 | 1264 | 21368 | 266960 | 2744060 | ... | |
| 8 | 79 | 2671 | 50055 | 686015 | 7670185 | ... | |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ | |
| | A7165 | | | | | | |

# Неприводимые меандров

Неприводимые меандры оказываются сложными для анализа, среди них не удалось найти никаких известных числовых последовательностей.

# Неприводимые меандров

Неприводимые меандры оказываются сложными для анализа, среди них не удалось найти никаких известных числовых последовательностей.

Пусть $\mathcal{M}_{n,k}^{(Ir)}$ — число неприводимых меандров с $n$ трансверсальными и $k$ нетрансверсальными пересечениями. Тогда

- $\mathcal{M}_{n,k}^{(Ir)} \equiv 0 \mod 2$.

# Неприводимые меандров

Неприводимые меандры оказываются сложными для анализа, среди них не удалось найти никаких известных числовых последовательностей.

Пусть $\mathcal{M}_{n,k}^{(Ir)}$ — число неприводимых меандров с $n$ трансверсальными и $k$ нетрансверсальными пересечениями. Тогда

- $\mathcal{M}_{n,k}^{(Ir)} \equiv 0 \mod 2$.
- $\mathcal{M}_{n,k}^{(Ir)} = 0$, если $k < 3$.

# Неприводимые меандры с тремя нетрансверсальными пересечениями

**Теорема (Б., 2025)**

$$\mathcal{M}_{n,3}^{(Ir)} = \begin{cases} 0 & \textit{n нечетно,} \\ \varphi\left(\frac{n}{2}+4\right)-2 & \textit{n четно,} \end{cases}$$

*где* $\varphi$ *— функция Эйлера.*

# Неприводимые меандры с тремя нетрансверсальными пересечениями

**Теорема (Б., 2025)**

$$\mathcal{M}_{n,3}^{(Ir)} = \begin{cases} 0 & n \text{ нечетно,} \\ \varphi\left(\frac{n}{2}+4\right)-2 & n \text{ четно,} \end{cases}$$

*где $\varphi$ — функция Эйлера.*

**Идея доказательства.**
Представим меандр кривой в диске и с проколами и будем действовать группой кос, упрощая его. $\square$

# Почти неприводимые меандры

Если во все точки касания неприводимого меандра вклеить меандр с двумя трансверсальными пересечениями, получится *почти неприводимый меандр*.

# Почти неприводимые меандры

Если во все точки касания неприводимого меандра вклеить меандр с двумя трансверсальными пересечениями, получится *почти неприводимый меандр*.

$\mathcal{A}_n$ — число почти неприводимых меандров с $n$ пересечениями. Известны $\mathcal{A}_n$ для $n \leq 38$.

# Почти неприводимые меандры

Если во все точки касания неприводимого меандра вклеить меандр с двумя трансверсальными пересечениями, получится *почти неприводимый меандр*.

$\mathcal{A}_n$ — число почти неприводимых меандров с $n$ пересечениями. Известны $\mathcal{A}_n$ для $n \leq 38$.

**Теорема (Малютин—Б., 2025)**

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\mathcal{A}_n} \leq 3.313,$$

$$\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{\mathcal{A}_n} \geq 1.836.$$

# Почти неприводимые меандры

Если во все точки касания неприводимого меандра вклеить меандр с двумя трансверсальными пересечениями, получится *почти неприводимый меандр*.

$\mathcal{A}_n$ — число почти неприводимых меандров с $n$ пересечениями. Известны $\mathcal{A}_n$ для $n \leq 38$.

**Теорема (Малютин—Б., 2025)**

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\mathcal{A}_n} \leq 3.313,$$

$$\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{\mathcal{A}_n} \geq 1.836.$$

| $n$ | $\mathcal{M}_n$ | $\mathcal{A}_n$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 |
| 2 | 1 | 0 |
| 3 | 2 | 0 |
| 4 | 3 | 0 |
| 5 | 8 | 0 |
| 6 | 14 | 0 |
| 7 | 42 | 0 |
| 8 | 81 | 2 |
| 9 | 262 | 2 |
| 10 | 538 | 0 |
| 11 | 1828 | 0 |
| 12 | 3926 | 26 |
| 13 | 13820 | 36 |
| 14 | 30694 | 52 |
| 15 | 110954 | 64 |

# С днём рождения, Андрей Валерьевич!