Отображения с заданными бордмановскими особенностями в малых размерностях

Андрей Рябичев
(ВШМ МФТИ, НМУ, школа 179)

конференция "Маломерная топология 2025"
7 ноября 2025

Задача

M, N — гладкие многообразия (без края/замкнутые?)

Задача

M, N — гладкие многообразия (без края/замкнутые?)

Пусть в каждой точке замкнутого подмножества $S \subset M$ задан тип особенности

Задача

M, N — гладкие многообразия (без края/замкнутые?)

Пусть в каждой точке замкнутого подмножества $S \subset M$ задан тип особенности

Вопрос. Существует ли гладкое отображение $M \to N$ с заданными особенностями?

Задача

M, N — гладкие многообразия (без края/замкнутые?)

Пусть в каждой точке замкнутого подмножества $S \subset M$ задан тип особенности

Вопрос. Существует ли гладкое отображение $M \to N$ с заданными особенностями?

Y. Ando, P. Садыков, O. Saeki, ...: существует ли отображение $M \to N$ с особенностями не сложнее чем заданные (в любых точках)?

Задача

M, N — гладкие многообразия (без края/замкнутые?)

Пусть в каждой точке замкнутого подмножества $S \subset M$ задан тип особенности

Вопрос. Существует ли гладкое отображение $M \to N$ с заданными особенностями?

Y. Ando, P. Садыков, O. Saeki, . . . : существует ли отображение $M \to N$ с особенностями не сложнее чем заданные (в любых точках)?

многообразия M, N будут одной размерности $n > 1$,

Задача

M, N — гладкие многообразия (без края/замкнутые?)

Пусть в каждой точке замкнутого подмножества $S \subset M$ задан тип особенности

Вопрос. Существует ли гладкое отображение $M \to N$ с заданными особенностями?

Y. Ando, Р. Садыков, O. Saeki, . . . : существует ли отображение $M \to N$ с особенностями не сложнее чем заданные (в любых точках)?

многообразия M, N будут одной размерности $n > 1$,
особенности — бордмановские (“общего положения”),

Задача

M, N — гладкие многообразия (без края/замкнутые?)

Пусть в каждой точке замкнутого подмножества $S \subset M$ задан тип особенности

Вопрос. Существует ли гладкое отображение $M \to N$ с заданными особенностями?

Y. Ando, Р. Садыков, O. Saeki, . . . : существует ли отображение $M \to N$ с особенностями не сложнее чем заданные (в любых точках)?

многообразия M, N будут одной размерности $n > 1$,
особенности — бордмановские (“общего положения”),
отображение будем искать в заданном классе гомотопности.

$n = 2$: особенности

$n = 2$: особенности

В размерности 2 особенности общего положения —

$n = 2$: особенности

В размерности 2 особенности общего положения — складки $(x, y) \mapsto (x^2, y)$

$n = 2$: особенности

В размерности 2 особенности общего положения —
складки $(x, y) \mapsto (x^2, y)$ и сборки $(x, y) \mapsto (x^3 + xy, y)$

$n = 2$: особенности

В размерности 2 особенности общего положения — складки $(x, y) \mapsto (x^2, y)$ и сборки $(x, y) \mapsto (x^3 + xy, y)$

они образуют открытое плотное подмножество в $C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$

$n = 2$: особенности

В размерности 2 особенности общего положения — складки $(x, y) \mapsto (x^2, y)$ и сборки $(x, y) \mapsto (x^3 + xy, y)$

они образуют открытое плотное подмножество в $C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$

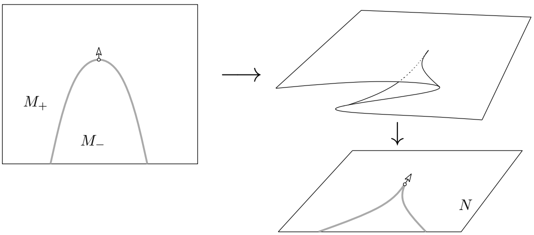
Пусть M, N — поверхности.
Если $f : M \to N$ — общее отображение, то множество критических точек $\Sigma(f) \subset M$ — гладкое 1-подмногообразие.

$n = 2$: особенности

В размерности 2 особенности общего положения — складки $(x, y) \mapsto (x^2, y)$ и сборки $(x, y) \mapsto (x^3 + xy, y)$

они образуют открытое плотное подмножество в $C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$

Пусть M, N — поверхности.
Если $f : M \to N$ — общее отображение, то множество критических точек $\Sigma(f) \subset M$ — гладкое 1-подмногообразие.



$n = 2$: обратный образ касательного расслоения

M, N — замкнутые поверхности,

$n = 2$: обратный образ касательного расслоения

M, N — замкнутые поверхности,
$C \subset M$ — замкнутое 1-подмногообразие,
$P \subset C$ — дискретное подмножество.

$n = 2$: обратный образ касательного расслоения

M, N — замкнутые поверхности,
$C \subset M$ — замкнутое 1-подмногообразие,
$P \subset C$ — дискретное подмножество.

Пусть $f : M \to N$ — общее отображение
со складками $C \setminus P$ и сборками P.

$n = 2$: обратный образ касательного расслоения

M, N — замкнутые поверхности,
$C \subset M$ — замкнутое 1-подмногообразие,
$P \subset C$ — дискретное подмножество.

Пусть $f : M \to N$ — общее отображение
со складками $C \setminus P$ и сборками P.

Как описать расслоение $f^*(TN)$, зная C и P?

$n = 2$: обратный образ касательного расслоения

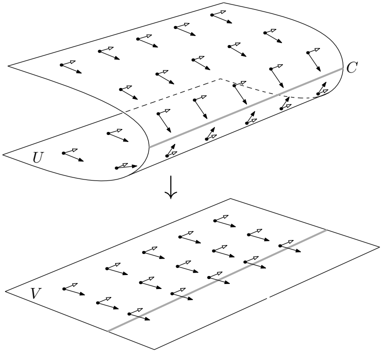
В окрестности C расслоение $f^*(TN)$ получается из TM

$n = 2$: обратный образ касательного расслоения

В окрестности C расслоение $f^*(TN)$ получается из TM ортогональной переклейкой $(\partial_x, \partial_y) \mapsto (-\partial_x, \partial_y)$

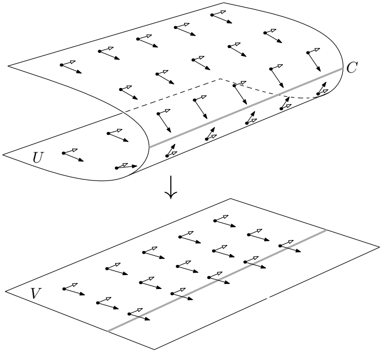
$n = 2$: обратный образ касательного расслоения

В окрестности C расслоение $f^*(TN)$ получается из TM ортогональной переклейкой $(\partial_x, \partial_y) \mapsto (-\partial_x, \partial_y)$



$n = 2$: обратный образ касательного расслоения

В окрестности C расслоение $f^*(TN)$ получается из TM ортогональной переклейкой $(\partial_x, \partial_y) \mapsto (-\partial_x, \partial_y)$



Предложение. $w_1(f^*TN) = w_1(M) + [C]$.

h-принцип Элиашберга

Обозначим расслоение, полученное из TM переклейкой вдоль подмногообразия $C \subset M$ коразмерности 1, через $T^C M$.

h-принцип Элиашберга

Обозначим расслоение, полученное из TM переклейкой вдоль подмногообразия $C \subset M$ коразмерности 1, через $T^C M$.

Теорема (Элиашберг, 1970).

h-принцип Элиашберга

Обозначим расслоение, полученное из TM переклейкой вдоль подмногообразия $C \subset M$ коразмерности 1, через $T^C M$.

Теорема (Элиашберг, 1970). Пусть $h : M \to N$ — непрерывное отображение, такое что $h^*(TN) \simeq T^C M$.

h-принцип Элиашберга

Обозначим расслоение, полученное из TM переклейкой вдоль подмногообразия $C \subset M$ коразмерности 1, через $T^C M$.

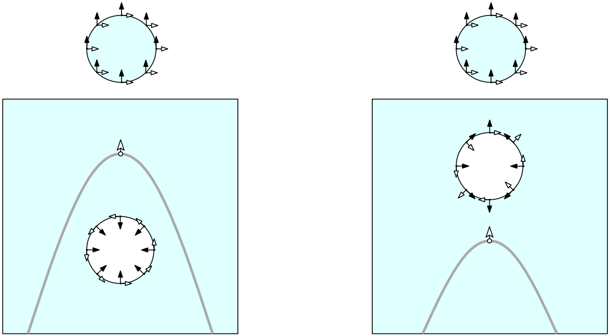
Теорема (Элиашберг, 1970). Пусть $h : M \to N$ — непрерывное отображение, такое что $h^*(TN) \simeq T^C M$. Тогда существует общее $f \sim h$ со складками в C и без других особенностей.

$n = 2$: обратный образ касательного расслоения

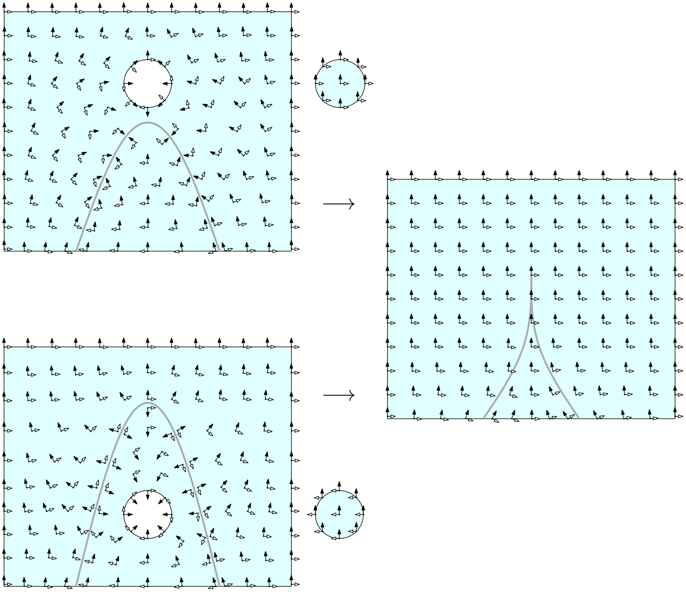
Далее, рядом с каждой точкой P нужно сделать подкрутку на ± 1 оборот по границе маленького диска

$n = 2$: обратный образ касательного расслоения

Далее, рядом с каждой точкой P нужно сделать подкрутку на ± 1 оборот по границе маленького диска

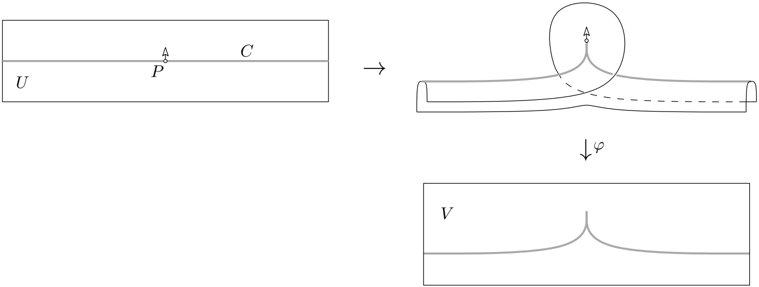


n=2: обратный образ касательного расслоения



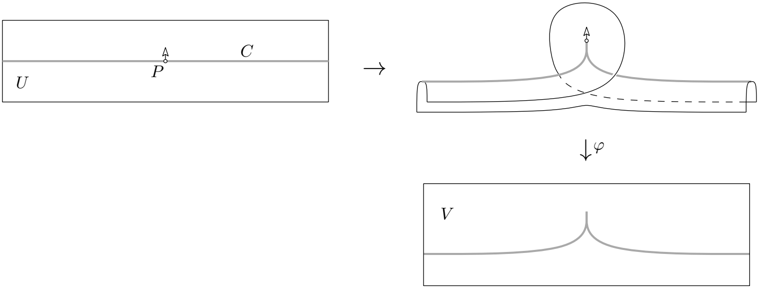
$n = 2$: обратный образ касательного расслоения

Рядом с каждой точкой P нужно сделать подкрутку на ± 1 оборот по границе маленького диска



$n = 2$: обратный образ касательного расслоения

Рядом с каждой точкой P нужно сделать подкрутку на ± 1 оборот по границе маленького диска



Знак зависит от направления характеристического вектора сборки.

$n = 2$: формулировка h-принципа

Пусть $P \subset M$ снабжено характеристическими векторами, нормальными к C.

Обозначим полученное ранее расслоение через $T^{C,P}M$.

$n = 2$: формулировка h-принципа

Пусть $P \subset M$ снабжено характеристическими векторами, нормальными к C.

Обозначим полученное ранее расслоение через $T^{C,P}M$.

Версия теоремы Элиашберга. Пусть $h : M \to N$ — непрерывное отображение, такое что $h^*(TN) \simeq T^{C,P}M$. Тогда существует общее $f \sim h$ со складками C и сборками P (с заданными направлениями) и без других особенностей.

$n = 2$: формулировка h-принципа

Пусть $P \subset M$ снабжено характеристическими векторами, нормальными к C.

Обозначим полученное ранее расслоение через $T^{C,P}M$.

Версия теоремы Элиашберга. Пусть $h : M \to N$ — непрерывное отображение, такое что $h^*(TN) \simeq T^{C,P}M$. Тогда существует общее $f \sim h$ со складками C и сборками P (с заданными направлениями) и без других особенностей.

Факт. Векторное расслоение E ранга 2 над двумерной базой однозначно (с точностью до изоморфизма) определяется первым классом Штифеля-Уитни $w_1(E)$ и классом Эйлера $e(E)$.

$n = 2$: формулировка h-принципа

Пусть $P \subset M$ снабжено характеристическими векторами, нормальными к C.

Обозначим полученное ранее расслоение через $T^{C,P}M$.

Версия теоремы Элиашберга. Пусть $h : M \to N$ — непрерывное отображение, такое что $h^*(TN) \simeq T^{C,P}M$. Тогда существует общее $f \sim h$ со складками C и сборками P (с заданными направлениями) и без других особенностей.

Факт. Векторное расслоение E ранга 2 над двумерной базой однозначно (с точностью до изоморфизма) определяется первым классом Штифеля-Уитни $w_1(E)$ и классом Эйлера $e(E)$.

Как найти харклассы $T^{C,P}M$, зная M, C и P?

$n = 2$: характеристические классы $T^{C,P}M$

$n = 2$: характеристические классы $T^{C,P}M$

Замечание. $[C] = 0$ если и только если $M \setminus C$ допускает шахматную раскраску $M \setminus C = M_+ \sqcup M_-$.

$n = 2$: характеристические классы $T^{C,P}M$

Замечание. $[C] = 0$ если и только если $M \setminus C$ допускает шахматную раскраску $M \setminus C = M_+ \sqcup M_-$.

Предложение 2. (a) Если $[C] = 0$, то

$$e(f^* TN) = \chi(M_+) - \chi(M_-) - n_+ + n_- ,$$

где n_+ и n_- — число сборок, характеристический вектор которых направлен наружу M_+, соответственно M_-.

$n = 2$: характеристические классы $T^{C,P}M$

Замечание. $[C] = 0$ если и только если $M \setminus C$ допускает шахматную раскраску $M \setminus C = M_+ \sqcup M_-$.

Предложение 2. (а) Если $[C] = 0$, то

$$e(f^* TN) = \chi(M_+) - \chi(M_-) - n_+ + n_- ,$$

где n_+ и n_- — число сборок, характеристический вектор которых направлен наружу M_+, соответственно M_-.

(б) Если $[C] = 0$, то $e(f^* TN) = w_2(f^* TN)$ определён только mod 2 и равен

$$w_2(M) + [P].$$

$n = 2$: поиск в заданном гомотопическом классе

Пусть M, C, P и N как выше, и пусть $h : M \to N$ — непрерывное отображение.

$n = 2$: поиск в заданном гомотопическом классе

Пусть M, C, P и N как выше, и пусть $h : M \to N$ — непрерывное отображение.

Теорема 1. Общее отображение $f : M \to N$ со складками $C \setminus P$, сборками P и гомотопное h существует если и только если

$n = 2$: поиск в заданном гомотопическом классе

Пусть M, C, P и N как выше, и пусть $h : M \to N$ — непрерывное отображение.

Теорема 1. Общее отображение $f : M \to N$ со складками $C \setminus P$, сборками P и гомотопное h существует если и только если

- $[C] = w_1(M) + h^* w_1(N)$;

$n = 2$: поиск в заданном гомотопическом классе

Пусть M, C, P и N как выше, и пусть $h : M \to N$ — непрерывное отображение.

Теорема 1. Общее отображение $f : M \to N$ со складками $C \setminus P$, сборками P и гомотопное h существует если и только если

- $[C] = w_1(M) + h^* w_1(N)$;
- если $[C] = 0$, то $\left|\chi(M_+) - \chi(M_-) - n_+ + n_-\right| = |\deg h \cdot \chi(N)|$;

$n = 2$: поиск в заданном гомотопическом классе

Пусть M, C, P и N как выше, и пусть $h : M \to N$ — непрерывное отображение.

Теорема 1. Общее отображение $f : M \to N$ со складками $C \setminus P$, сборками P и гомотопное h существует если и только если

- $[C] = w_1(M) + h^* w_1(N)$;
- если $[C] = 0$, то $\left|\chi(M_+) - \chi(M_-) - n_+ + n_-\right| = |\deg h \cdot \chi(N)|$;
- $[P] = w_2(M) + h^* w_2(N)$.

$n = 2$: поиск в заданном гомотопическом классе

Пусть M, C, P и N как выше, и пусть $h : M \to N$ — непрерывное отображение.

Теорема 1. Общее отображение $f : M \to N$ со складками $C \setminus P$, сборками P и гомотопное h существует если и только если

- $[C] = w_1(M) + h^* w_1(N)$;
- если $[C] = 0$, то $\left|\chi(M_+) - \chi(M_-) - n_+ + n_-\right| = |\deg h \cdot \chi(N)|$;
- $[P] = w_2(M) + h^* w_2(N)$.

Это следствие теоремы Я. М. Элиашберга об отображениях со складками

$n = 2$: поиск среди всех отображений

Что делать, если гомотопический класс $h : M \to N$ не задан?

$n = 2$: поиск среди всех отображений

Что делать, если гомотопический класс $h : M \to N$ не задан?

Теорема 2. Общее отображение $M \to N$ со складками $C \setminus P$ и сборками P существует, если и только если

$n = 2$: поиск среди всех отображений

Что делать, если гомотопический класс $h : M \to N$ не задан?

Теорема 2. Общее отображение $M \to N$ со складками $C \setminus P$ и сборками P существует, если и только если

- $[P] = [C]^2$;

$n = 2$: поиск среди всех отображений

Что делать, если гомотопический класс $h : M \to N$ не задан?

Теорема 2. Общее отображение $M \to N$ со складками $C \setminus P$ и сборками P существует, если и только если

- $[P] = [C]^2$;
- если $w_1(N) = 0$, то $[C] = w_1(M)$;

$n = 2$: поиск среди всех отображений

Что делать, если гомотопический класс $h : M \to N$ не задан?

Теорема 2. Общее отображение $M \to N$ со складками $C \setminus P$ и сборками P существует, если и только если

- $[P] = [C]^2$;
- если $w_1(N) = 0$, то $[C] = w_1(M)$;
- если $[C] = 0$, то найдётся $d \in \mathbb{Z}$, такое что

$$\bigl|\chi(M_+) - \chi(M_-) - n_+ + n_-\bigr| = |d \cdot \chi(N)|$$

и либо $\chi(M) \leq |d| \cdot \chi(N)$, либо $d = 0$;

$n = 2$: поиск среди всех отображений

Что делать, если гомотопический класс $h : M \to N$ не задан?

Теорема 2. Общее отображение $M \to N$ со складками $C \setminus P$ и сборками P существует, если и только если

- $[P] = [C]^2$;
- если $w_1(N) = 0$, то $[C] = w_1(M)$;
- если $[C] = 0$, то найдётся $d \in \mathbb{Z}$, такое что

$$\big|\chi(M_+) - \chi(M_-) - n_+ + n_-\big| = |d \cdot \chi(N)|$$

и либо $\chi(M) \leq |d| \cdot \chi(N)$, либо $d = 0$; при этом, если M ориентируемо и N неориентируемо, то d должно быть чётным;

$n = 2$: поиск среди всех отображений

Что делать, если гомотопический класс $h : M \to N$ не задан?

Теорема 2. Общее отображение $M \to N$ со складками $C \setminus P$ и сборками P существует, если и только если

- $[P] = [C]^2$;
- если $w_1(N) = 0$, то $[C] = w_1(M)$;
- если $[C] = 0$, то найдётся $d \in \mathbb{Z}$, такое что

$$\left|\chi(M_+) - \chi(M_-) - n_+ + n_-\right| = |d \cdot \chi(N)|$$

и либо $\chi(M) \leq |d| \cdot \chi(N)$, либо $d = 0$; при этом, если M ориентируемо и N неориентируемо, то d должно быть чётным;

- если $[C] \neq 0$, $w_1(M) \neq 0$ и $[C]^2 \neq w_2(M)$, то $w_2(N) \neq 0$ и $\chi(N) > \chi(M)$.

$n = 3$: особенности

В размерности 3 особенности общего положения —

$n = 3$: особенности

В размерности 3 особенности общего положения —
складки $(x, y, z) \mapsto (x^2, y, z)$, сборки $(x, y, z) \mapsto (x^3 + xy, y, z)$
и ласточкины хвосты $(x, y, z) \mapsto (x^4 + x^2y + xz, y, z)$

$n = 3$: особенности

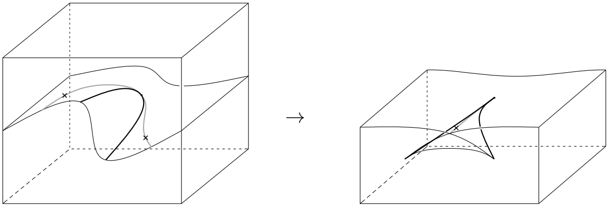
В размерности 3 особенности общего положения — складки $(x, y, z) \mapsto (x^2, y, z)$, сборки $(x, y, z) \mapsto (x^3 + xy, y, z)$ и ласточкины хвосты $(x, y, z) \mapsto (x^4 + x^2 y + xz, y, z)$

они также плотны и устойчивы, и замыкание множества точек каждого типа — замкнутое подмногообразие

$n = 3$: особенности

В размерности 3 особенности общего положения — складки $(x, y, z) \mapsto (x^2, y, z)$, сборки $(x, y, z) \mapsto (x^3 + xy, y, z)$ и ласточкины хвосты $(x, y, z) \mapsto (x^4 + x^2y + xz, y, z)$

они также плотны и устойчивы, и замыкание множества точек каждого типа — замкнутое подмногообразие



$n = 3$: обратный образ касательного расслоения

M, N — замкнутые 3-многообразия,

$n = 3$: обратный образ касательного расслоения

M, N — замкнутые 3-многообразия,
$S \subset M$ — замкнутое 2-подмногообразие,
$C \subset S$ — замкнутое 1-подмногообразие,
$P \subset C$ — дискретное подмножество.

$n = 3$: обратный образ касательного расслоения

M, N — замкнутые 3-многообразия,
$S \subset M$ — замкнутое 2-подмногообразие,
$C \subset S$ — замкнутое 1-подмногообразие,
$P \subset C$ — дискретное подмножество.

Пусть $f : M \to N$ — общее отображение
со складками $S \setminus C$, сборками $C \setminus P$ и ласточкиными хвостами P.

$n = 3$: обратный образ касательного расслоения

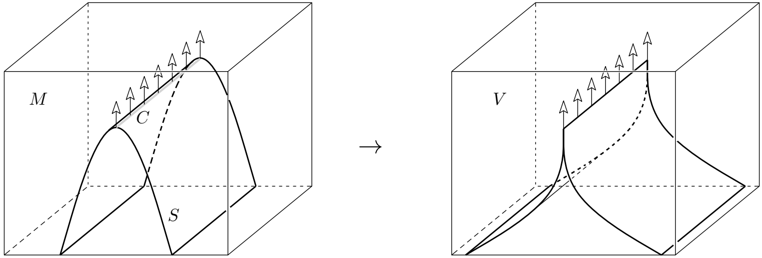
M, N — замкнутые 3-многообразия,
$S \subset M$ — замкнутое 2-подмногообразие,
$C \subset S$ — замкнутое 1-подмногообразие,
$P \subset C$ — дискретное подмножество.

Пусть $f : M \to N$ — общее отображение
со складками $S \setminus C$, сборками $C \setminus P$ и ласточкиными хвостами P.

Как описать расслоение $f^*(TN)$, зная S, C и P?

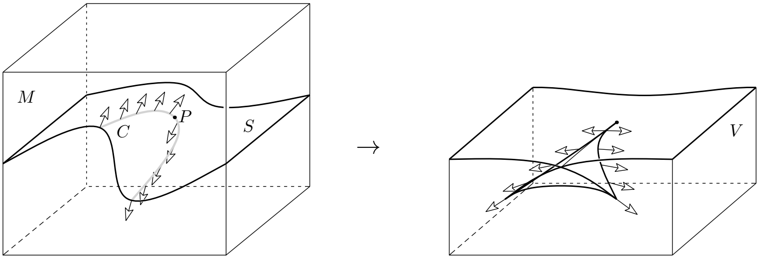
$n = 3$: как задать особенности

Теперь поле характеристических векторов задано вдоль C и нормально к S



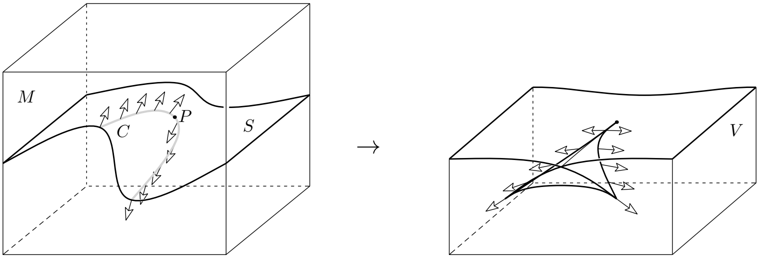
$n = 3$: как задать особенности

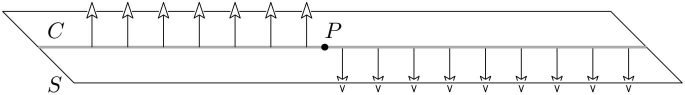
В точках P характеристическое поле меняет направление:



$n = 3$: как задать особенности

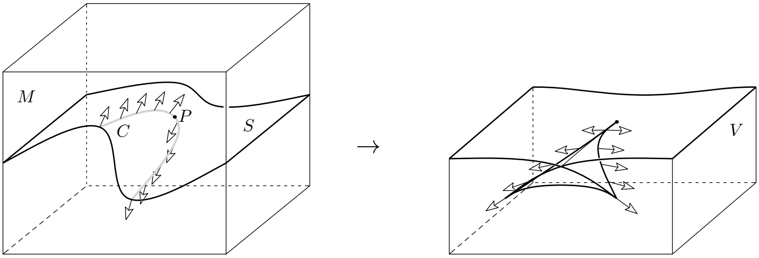
В точках P характеристическое поле меняет направление:

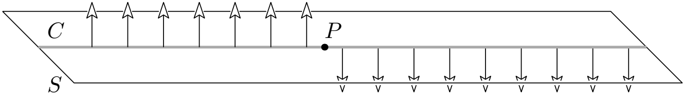




$n = 3$: как задать особенности

В точках P характеристическое поле меняет направление:





Следовательно, $[C] \cdot [S] = [P] \in H^3(M; \mathbb{Z}_2)$.

$n = 3$: обратный образ касательного расслоения

Наблюдение. Чтобы получить $f^*(TN)$ из TM, нужно сделать в S и вдоль C такие же переклейки, как для размерности 2 (только умноженные на $\mathbb{R}$).

$n = 3$: обратный образ касательного расслоения

Наблюдение. Чтобы получить $f^*(TN)$ из TM, нужно сделать в S и вдоль C такие же переклейки, как для размерности 2 (только умноженные на $\mathbb{R}$).

Наблюдение 2. Как $f^*(TN)$ устроено в окрестности P не важно (поскольку $\pi_2(SO(3)) = 0$).

$n = 3$: обратный образ касательного расслоения

Наблюдение. Чтобы получить $f^*(TN)$ из TM, нужно сделать в S и вдоль C такие же переклейки, как для размерности 2 (только умноженные на $\mathbb{R}$).

Наблюдение 2. Как $f^*(TN)$ устроено в окрестности P не важно (поскольку $\pi_2(SO(3)) = 0$).

Факт. Векторное расслоение E ранга 3 над трёхмерной базой однозначно (с точностью до изоморфизма) определяется первыми двумя классами Штифеля-Уитни $w_1(E)$ и $w_2(E)$.

$n = 3$: поиск в заданном гомотопическом классе

$n = 3$: поиск в заданном гомотопическом классе

Пусть M, S, C, P и N как выше, и пусть $h : M \to N$ — непрерывное отображение.

$n = 3$: поиск в заданном гомотопическом классе

Пусть M, S, C, P и N как выше, и пусть $h : M \to N$ — непрерывное отображение.

Теорема 3. Общее отображение $f : M \to N$ со складками $S \setminus C$, сборками $C \setminus P$ и ласточкиными хвостами P и гомотопное h существует если и только если

$n = 3$: поиск в заданном гомотопическом классе

Пусть M, S, C, P и N как выше, и пусть $h : M \to N$ — непрерывное отображение.

Теорема 3. Общее отображение $f : M \to N$ со складками $S \setminus C$, сборками $C \setminus P$ и ласточкиными хвостами P и гомотопное h существует если и только если

- $[S] = w_1(M) + h^* w_1(N)$;

$n = 3$: поиск в заданном гомотопическом классе

Пусть M, S, C, P и N как выше, и пусть $h : M \to N$ — непрерывное отображение.

Теорема 3. Общее отображение $f : M \to N$ со складками $S \setminus C$, сборками $C \setminus P$ и ласточкиными хвостами P и гомотопное h существует если и только если

- $[S] = w_1(M) + h^* w_1(N)$;
- $[C] = w_2(M) + w_1(M) \cdot h^* w_1(N)$;

$n = 3$: поиск в заданном гомотопическом классе

Пусть M, S, C, P и N как выше, и пусть $h : M \to N$ — непрерывное отображение.

Теорема 3. Общее отображение $f : M \to N$ со складками $S \setminus C$, сборками $C \setminus P$ и ласточкиными хвостами P и гомотопное h существует если и только если

- $[S] = w_1(M) + h^* w_1(N)$;
- $[C] = w_2(M) + w_1(M) \cdot h^* w_1(N)$;
- для каждой компоненты $C' \subset C$ имеем $[C'] \cdot [S] \equiv |P \cap C'| \mod 2$.

$n = 3$: поиск среди всех отображений

Что делать, если гомотопический класс $h : M \to N$ не задан?

$n = 3$: поиск среди всех отображений

Что делать, если гомотопический класс $h : M \to N$ не задан?

Задача сводится к такой:

$n = 3$: поиск среди всех отображений

Что делать, если гомотопический класс $h : M \to N$ не задан?

Задача сводится к такой: *дан класс* $\alpha \in H^1(M; \mathbb{Z}_2)$*, существует ли отображение* $h : M \to N$*, такое что* $h^*(w_1 TN) = \alpha$*?*

$n = 3$: поиск среди всех отображений

Что делать, если гомотопический класс $h : M \to N$ не задан?

Задача сводится к такой: *дан класс* $\alpha \in H^1(M; \mathbb{Z}_2)$, *существует ли отображение* $h : M \to N$, *такое что* $h^*(w_1 TN) = \alpha$?

Понятные частные случаи:

$n = 3$: поиск среди всех отображений

Что делать, если гомотопический класс $h : M \to N$ не задан?

Задача сводится к такой: *дан класс $\alpha \in H^1(M; \mathbb{Z}_2)$, существует ли отображение $h : M \to N$, такое что $h^*(w_1 TN) = \alpha$?*

Понятные частные случаи:

если α поднимается до $\tilde{\alpha} \in H^1(M; \mathbb{Z})$ и N неориентируемо, то h существует;

$n = 3$: поиск среди всех отображений

Что делать, если гомотопический класс $h : M \to N$ не задан?

Задача сводится к такой: *дан класс* $\alpha \in H^1(M; \mathbb{Z}_2)$, *существует ли отображение* $h : M \to N$, *такое что* $h^*(w_1 TN) = \alpha$*?*

Понятные частные случаи:

если α поднимается до $\tilde{\alpha} \in H^1(M; \mathbb{Z})$ и N неориентируемо, то h существует;

если $\alpha^2 \neq 0$ и $w_2(N) = 0$, то h не существует.

$n = 4$ . . . . . .

$n = 4$ . . . . .

В размерности 4 особенности общего положения —
складки $(x, y, z, t) \mapsto (x^2, y, z, t)$,
сборки $(x, y, z, t) \mapsto (x^3 + xy, y, z, t)$,
ласточкины хвосты $(x, y, z, t) \mapsto (x^4 + x^2 y + xz, y, z, t)$,
$\Sigma^{1,1,1,1}$-особенности $(x, y, z, t) \mapsto (x^5 + x^3 y + x^2 z + xt, y, z, t)$
и $\Sigma^2_\pm$-особенности $(x, y, z, t) \mapsto (x^2 \pm y^2 + xz + yt, xy, z, t)$.

$n = 4$ . . . . .

В размерности 4 особенности общего положения —
складки $(x, y, z, t) \mapsto (x^2, y, z, t)$,
сборки $(x, y, z, t) \mapsto (x^3 + xy, y, z, t)$,
ласточкины хвосты $(x, y, z, t) \mapsto (x^4 + x^2y + xz, y, z, t)$,
$\Sigma^{1,1,1,1}$-особенности $(x, y, z, t) \mapsto (x^5 + x^3y + x^2z + xt, y, z, t)$
и $\Sigma^2_\pm$-особенности $(x, y, z, t) \mapsto (x^2 \pm y^2 + xz + yt, xy, z, t)$.

Теорема Дольда-Уитни. Векторное расслоение E ранга 4 над четырёхмерной базой однозначно определяется классами $w_1(E)$, $w_2(E)$, $e(E)$ и $p_1(E)$.

$n = 4$ . . . . .

В размерности 4 особенности общего положения —
складки $(x, y, z, t) \mapsto (x^2, y, z, t)$,
сборки $(x, y, z, t) \mapsto (x^3 + xy, y, z, t)$,
ласточкины хвосты $(x, y, z, t) \mapsto (x^4 + x^2y + xz, y, z, t)$,
$\Sigma^{1,1,1,1}$-особенности $(x, y, z, t) \mapsto (x^5 + x^3y + x^2z + xt, y, z, t)$
и $\Sigma^2_\pm$-особенности $(x, y, z, t) \mapsto (x^2 \pm y^2 + xz + yt, xy, z, t)$.

Теорема Дольда-Уитни. Векторное расслоение E ранга 4 над четырёхмерной базой однозначно определяется классами $w_1(E)$, $w_2(E)$, $e(E)$ и $p_1(E)$.

Вопрос. Как выразить харклассы $f^*(TN)$ для общего отображения четырёхмерных многообразий $f : M \to N$, зная его особенности?

$n = 4$ . . . . .

В размерности 4 особенности общего положения —
складки $(x, y, z, t) \mapsto (x^2, y, z, t)$,
сборки $(x, y, z, t) \mapsto (x^3 + xy, y, z, t)$,
ласточкины хвосты $(x, y, z, t) \mapsto (x^4 + x^2y + xz, y, z, t)$,
$\Sigma^{1,1,1,1}$-особенности $(x, y, z, t) \mapsto (x^5 + x^3y + x^2z + xt, y, z, t)$
и $\Sigma^2_\pm$-особенности $(x, y, z, t) \mapsto (x^2 \pm y^2 + xz + yt, xy, z, t)$.

Теорема Дольда-Уитни. Векторное расслоение E ранга 4 над четырёхмерной базой однозначно определяется классами $w_1(E)$, $w_2(E)$, $e(E)$ и $p_1(E)$.

Вопрос. Как выразить харклассы $f^*(TN)$ для общего отображения четырёхмерных многообразий $f : M \to N$, зная его особенности?

Многочлены Тома:

* $[\overline{\Sigma^1(f)}] = w_1(M) + f^*w_1(N)$
* $[\overline{\Sigma^{1,1}(f)}] = w_2(M) + w_1(M) \cdot f^*w_1(N) + f^*w_1(N)^2 + f^*w_2(N)$

произвольное n

произвольное n

Множество критических точек $\Sigma(f)$ общего отображения $f : M \to N$ разбивается на многообразия Бордмана $\Sigma(f) = \bigsqcup_I \Sigma^I(f)$, где $I = i_1 \geq i_2 \geq \ldots \geq i_r \geq 0$ — всевозможные мультииндексы.

произвольное n

Множество критических точек $\Sigma(f)$ общего отображения $f : M \to N$ разбивается на многообразия Бордмана $\Sigma(f) = \bigsqcup_I \Sigma^I(f)$, где $I = i_1 \geq i_2 \geq \ldots \geq i_r \geq 0$ — всевозможные мультииндексы.

Теорема [P, 20]. Зная ростки общего отображения $f : M \to N$ во всех критических точках, можно восстановить расслоение $f^*(TN)$.

произвольное n

Множество критических точек $\Sigma(f)$ общего отображения $f : M \to N$ разбивается на многообразия Бордмана $\Sigma(f) = \bigsqcup_I \Sigma^I(f)$, где $I = i_1 \geq i_2 \geq \ldots \geq i_r \geq 0$ — всевозможные мультииндексы.

Теорема [P, 20]. Зная ростки общего отображения $f : M \to N$ во всех критических точках, можно восстановить расслоение $f^*(TN)$.

Пусть во всех точках $x \in S \subset M$ заданы согласованные ростки φ_x. Назовём получившееся расслоение $T^\varphi M$.

произвольное n

Множество критических точек $\Sigma(f)$ общего отображения $f : M \to N$ разбивается на многообразия Бордмана $\Sigma(f) = \bigsqcup_I \Sigma^I(f)$, где $I = i_1 \geq i_2 \geq \ldots \geq i_r \geq 0$ — всевозможные мультииндексы.

Теорема [P, 20]. Зная ростки общего отображения $f : M \to N$ во всех критических точках, можно восстановить расслоение $f^*(TN)$.

Пусть во всех точках $x \in S \subset M$ заданы согласованные ростки φ_x. Назовём получившееся расслоение $T^\varphi M$.

Тогда решается обратная задача: если $h : M \to N$ непрерывное отображение, такое что $h^*(TN) \simeq T^\varphi M$, то существует $f \sim h$ с особенностями в S, эквивалентными φ_x.

произвольное n

Множество критических точек $\Sigma(f)$ общего отображения $f : M \to N$ разбивается на многообразия Бордмана $\Sigma(f) = \bigsqcup_I \Sigma^I(f)$, где $I = i_1 \geq i_2 \geq \ldots \geq i_r \geq 0$ — всевозможные мультииндексы.

Теорема [P, 20]. Зная ростки общего отображения $f : M \to N$ во всех критических точках, можно восстановить расслоение $f^*(TN)$.

Пусть во всех точках $x \in S \subset M$ заданы согласованные ростки φ_x. Назовём получившееся расслоение $T^\varphi M$.

Тогда решается обратная задача: если $h : M \to N$ непрерывное отображение, такое что $h^*(TN) \simeq T^\varphi M$, то существует $f \sim h$ с особенностями в S, эквивалентными φ_x.

Гипотеза. $T^\varphi M$ зависит только от топологических типов $\{\varphi_x\}$

произвольное n

Множество критических точек $\Sigma(f)$ общего отображения $f : M \to N$ разбивается на многообразия Бордмана $\Sigma(f) = \bigsqcup_I \Sigma^I(f)$, где $I = i_1 \geq i_2 \geq \ldots \geq i_r \geq 0$ — всевозможные мультииндексы.

Теорема [P, 20]. Зная ростки общего отображения $f : M \to N$ во всех критических точках, можно восстановить расслоение $f^*(TN)$.

Пусть во всех точках $x \in S \subset M$ заданы согласованные ростки φ_x. Назовём получившееся расслоение $T^\varphi M$.

Тогда решается обратная задача: если $h : M \to N$ непрерывное отображение, такое что $h^*(TN) \simeq T^\varphi M$, то существует $f \sim h$ с особенностями в S, эквивалентными φ_x.

Гипотеза. $T^\varphi M$ зависит только от топологических типов $\{\varphi_x\}$

Гипотеза. $T^\varphi M$ можно восстановить по бордмановской стратификации S и дополнительным (комбинаторным) данным

Всё!