Л. ЭЙЛЕР И ПРОБЛЕМА МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ КРОВОТОКА
L. EULER AND THE PROBLEM OF MATHEMATICAL DESCRIPTION OF BLOOD FLOW

ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР (LEONHARD EULER) (1707 – 1783)

ЮРИЙ ВИКТОРОВИЧ НАТОЧИН
Academician Yu. NATOCHIN

«Леонард Эйлер и развитие физиологии России».
Международная научная конференция «Леонард Эйлер. К 240-летию со дня смерти. К 300-летию Российской академии наук», СПб, 20–21 ноября 2023
Yu. Natochin “Leonhard Euler and the development of Russian physiology”.
International Scientific Conference "Leonhard Euler. On the 240th anniversary of his death. On the 300th Anniversary of the Russian Academy of Sciences", St. Petersburg, November 20-21, 2023

Euler L. Principia pro motu sanguinis per arterias determinando // Opera Postuma: Mathematica et Physica, Anno MDCCCXLIV [1844] detecta quae Academiae Scientiarum Petropolitanae obtulerunt ejusque auspiciis ediderunt auctoris pronepotes Paulus Henricus Fuss et Nicolaus Fuss. In 2 t. T. 2. Petropoli: apud Eggers et socios etc., 1862. Pp. 814–823.

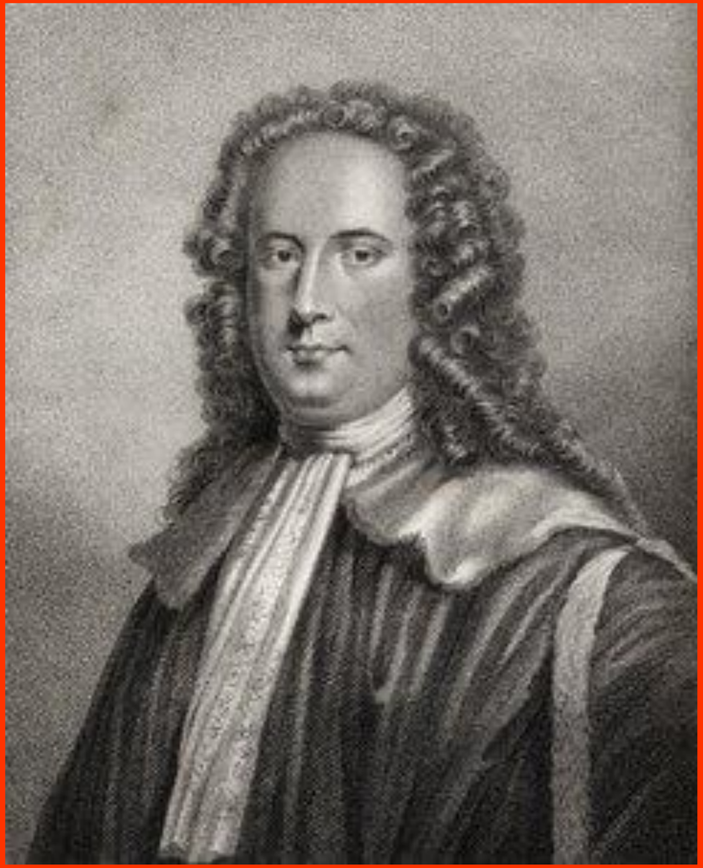
Euler L. Principia pro motu sanguinis per arterias determinando // Euler L. Opera omnia. Ser. 2: Opera mechanica et astronomica; 16: Commentationes mechanicae ad theoriam machinarum pertinentes / Sub auspiciis Academiae Scientiarum Naturalium Helveticae. Edenda curaverunt Ferdinand Rudio, Adolf Krazer, Paul Stäckel. Leipzig; Berlin: Druck und Verlag von B. G. Teubner, 1979. 327 S. S. 178–196.

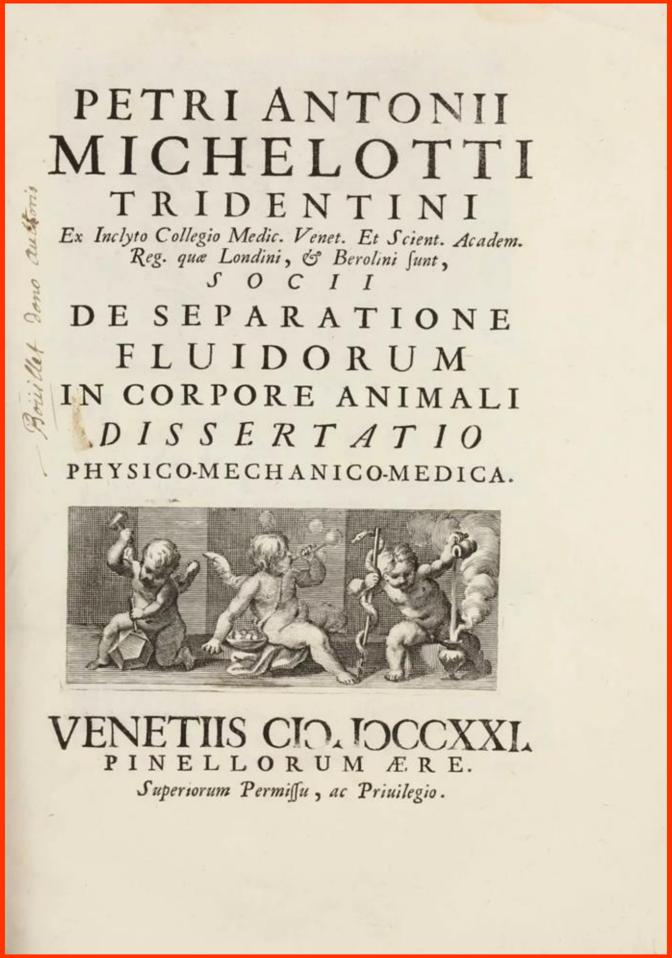
Российская Академия наук. Персональный состав: В 4-х книгах / Ред. Ю. С. Осипов. Кн.1: Действительные члены. Члены-корреспонденты. Почётные члены. Иностранные члены. 1724-1917 / Составитель Б. В. Левшин. М.: Наука, 2009. 562 с.

Russian Academy of Sciences. Personal composition: In 4 books / Ed. by Yu. S. Osipov. Book 1: Full members. Corresponding members. Honorary members. Foreign members. 1724-1917 / Compiled by B. V. Levshin. Moscow: Nauka, 2009.

ДАНИИИЛ БЕРНУЛЛИ (DANIEL BERNOULLI) (1700–1782)

PIETRO ANTONIO MICHELOTTI
(1673-1740)

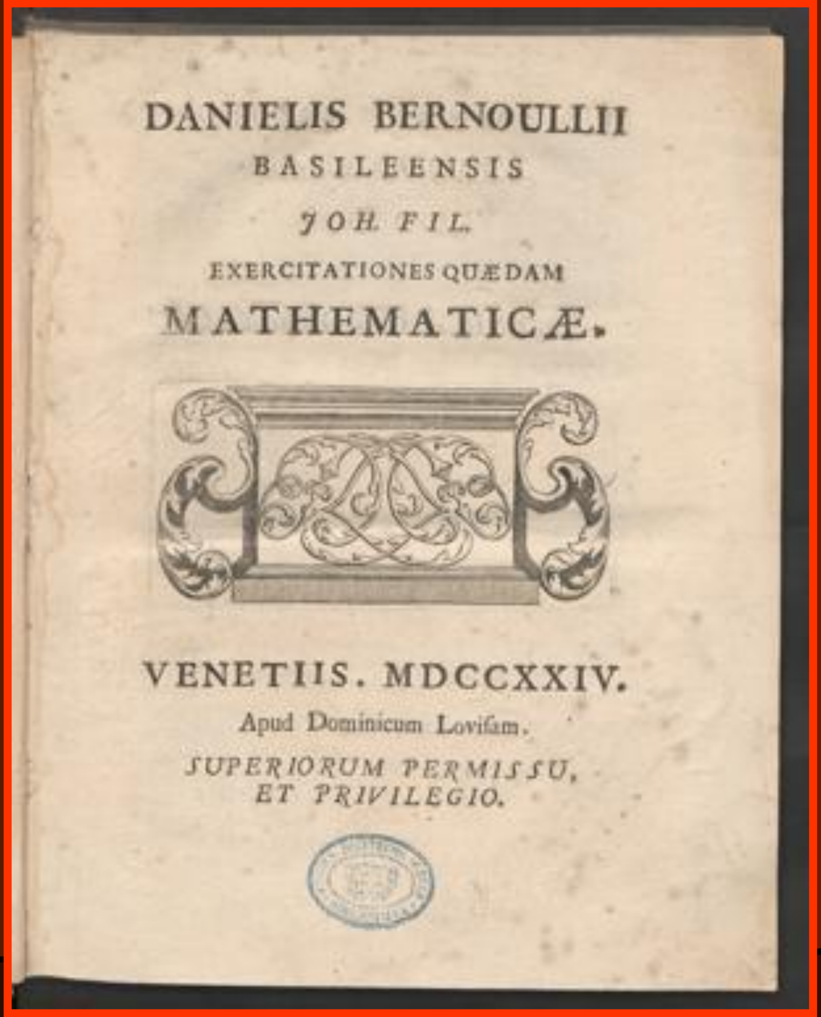




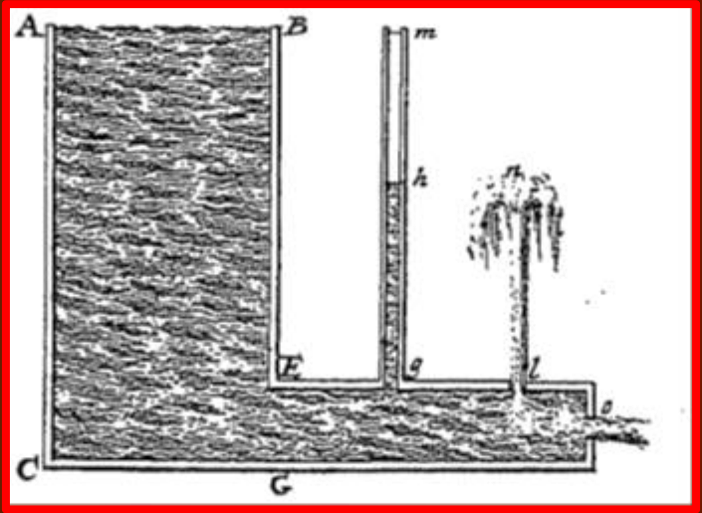
PETRI ANTONII
MICHELOTTI
TRIDENTINI
Ex Inclyto Collegio Medic. Venet. Et Scient. Academ. Reg. quæ Londini, & Berolini sunt,
SOCII
DE SEPARATIONE
FLUIDORUM
IN CORPORE ANIMALI
DISSERTATIO
PHYSICO-MECHANICO-MEDICA.

VENETIIS CIↃ. IↃCCXXI.
PINELLORUM ÆRE.
Superiorum Permissu, ac Privilegio.

ЗАКОН Д. БЕРНУЛЛИ
D. BERNOULLI'S LAW



$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = const$
(вдоль линии тока),
где ρ – плотность жидкости;
p – давление, v – скорость потока, g – ускорение свободного падения, h – высота



Бернулли показал, что давление, оказываемое движущейся жидкостью на стенки, меньше статического давления, причем разница равна половине квадрата скорости, умноженной на плотность.

Bernoulli showed that the pressure exerted by a moving liquid on the walls is less than the static pressure, and the difference is equal to half the square of the velocity multiplied by the density.

В современной медицине уравнение Бернулли используют иногда в модифицированном виде:

$$\Delta p \sim 4v^2$$

где Δp – градиент давления над аортальном клапаном, который зависит только от скорости крови (v) на нем.
(Средний и пиковый градиенты через клапан, рассчитанные по «модифицированному уравнению Бернулли», остаются важными параметрами для оценки степени стеноза аортального клапана).

In modern medicine, the Bernoulli equation is sometimes used in a modified form:

$$\Delta p \sim 4v^2$$

where Δp is the pressure gradient above the aortic valve, which depends only on the blood velocity (v) on it.
(The average and peak gradients through the valve, calculated using the "modified Bernoulli equation", remain important parameters for assessing the degree of aortic valve stenosis).

Эйлер выводит два общих уравнения для одномерного нестационарного потока несжимаемой жидкости через упругую трубку (предполагается, что жидкость приводится в движение поршневым насом):

$$\text{I. } \partial s/\partial t + \partial(vs)/\partial z = 0$$

$$\text{II. } 2g(\partial p/\partial z) + v(\partial v/\partial z) + \partial v/\partial t = 0»$$

к которым добавляется *ad hoc* условие

$s = \Sigma p/c + p$

где $s = s(z,t)$ – площадь поперечного сечения артерии;
$v = v(z,t)$ – скорость тока крови;
$p = p(z,t)$ – давление (напор);
t – время; z – координата вдоль трубки;
c – константа, отражающая податливость стенки трубки;
Σ – максимальная площадь сечения сосуда.

При малых изменениях величин s и p и малых v уравнения Эйлера принимают вид: $\partial^2 p/\partial t^2 = c^2\partial^2 p/\partial z^2$, где $c^2 = (\rho D)^{-1}$ и D – величина, характеризующая расширение трубки (артерии). Таким образом, при указанных условиях получается одномерное волновое уравнение, которое изучалось Даламбером, Эйлером и некоторыми другими математиками.

Euler derives two general equations for a one-dimensional unsteady flow of an incompressible fluid through an elastic tube (it is assumed that the fluid is driven by a piston pump):

$$\text{I. } \partial s/\partial t + \partial\,(vs)/\partial z = 0$$

$$\text{II. } 2g(\partial p/\partial z) + v(\partial v/\partial z) + \partial v/\partial t = 0\text{»}$$

with *ad hoc* additional condition

$s = \Sigma p/c + p$

where $s = s(z,t)$ is the cross–sectional area of the artery;
$v = v(z,t)$ – blood flow rate;
$p = p(z,t)$ – pressure (head);
t is the time; z is the coordinate along the tube;
c is the constant characterizing the ductility of the tube wall;
Σ is the maximum cross–sectional area of the artery.

For small changes in the values of s and p and small v, the Euler equations take the form:
$\partial^2 p/\partial t^2 = c^2 \partial^2 p/\partial z^2$,
where $c^2 = (\rho D)^{-1}$ and D – the value that characterizes the expansion of the tube (artery). Thus, under these conditions, a one-dimensional wave equation is obtained, which was studied by D'Alembert, Euler and some other mathematicians.

«Храм науки — строение многосложное. Различны пребывающие в нем люди и приведшие их туда духовные силы. Некоторые занимаются наукой с гордым чувством своего интеллектуального превосходства; для них наука является тем подходящим спортом, который должен им дать полноту жизни и удовлетворение честолюбия. Можно найти в храме и других: плоды своих мыслей они приносят здесь в жертву только в утилитарных целях. Если бы посланный богом ангел пришел в храм и изгнал из него тех, кто принадлежит к этим двум категориям, то храм катастрофически опустел бы. Все-таки кое-кто из людей как прошлого, так и нашего времени в нем бы остался. …

Я хорошо знаю, что мы только что с легким сердцем изгнали многих людей, построивших значительную, возможно, даже наибольшую, часть науки; по отношению ко многим принятое решение было бы для нашего ангела горьким. Но одно кажется мне несомненным: если бы существовали только люди, подобные изгнанным, храм не поднялся бы, как не мог бы вырасти лес из одних лишь вьющихся растений».

А. Эйнштейн

The Temple of Science is a complex structure. The people who live in it and the spiritual forces that brought them there are different. Some people engage in science with a proud sense of their intellectual superiority; for them, science is the right sport that should give them fullness of life and satisfaction of ambition. You can find others in the temple: they sacrifice the fruits of their thoughts here only for utilitarian purposes. If an angel sent by God had come to the temple and driven out those belonging to these two categories, the temple would have been catastrophically empty. Still, some of the people of both the past and our time would have stayed in it. ...

I am well aware that we have just, with a light heart, expelled many people who built a significant, perhaps even the largest, part of science; in relation to many, the decision taken would be bitter for our angel. But one thing seems certain to me: if there were only people like the exiles, the temple would not have risen, just as a forest of climbing plants alone could not grow."

A. Einstein