Основы теории открытых квантовых систем. Лекция 10. Квантовая относительная энтропия и её монотонность

Теретёнков Александр Евгеньевич

12 ноября 2024 г.

Квантовая относительная энтропия

Определение. Пусть ρ, σ — матрицы плотности в $\mathbb{C}^n$

$$S(\rho||\sigma) = \operatorname{Tr}\rho\ln\rho - \operatorname{Tr}\rho\ln\sigma, \qquad \ker\rho = \ker\sigma = \{0\}$$

В общем случае введём носитель матрицы плотности

$$\operatorname{supp}\rho = \operatorname{sign}\rho \cdot \mathbb{C}^n.$$

$$S(\rho||\sigma) =$$

$$= \begin{cases} \operatorname{Tr}\rho|_{\operatorname{supp}\rho}\ln\rho|_{\operatorname{supp}\rho} - \operatorname{Tr}\rho|_{\operatorname{supp}\sigma}\ln\sigma|_{\operatorname{supp}\sigma}, & \operatorname{supp}\rho\subseteq\operatorname{supp}\sigma \\ +\infty, & \operatorname{supp}\rho\nsubseteq\operatorname{supp}\sigma \end{cases}$$

Квантовая относительная энтропия

Утверждение.

$$S(\rho||\sigma) \geqslant 0, \qquad \forall \rho, \sigma$$

Причём равенство достигается тогда и только тогда, когда $\rho = \sigma$.

Утверждение.

$$S(\rho||\sigma) \geqslant 0, \qquad \forall \rho, \sigma$$

Причём равенство достигается тогда и только тогда, когда $\rho = \sigma$.

Доказательство: Используя разложение в ряд Тейлора функции $\eta(\lambda) = -\lambda \ln \lambda$ с остаточным членом в форме Лагранжа

$$\eta(\lambda) = \eta(\mu) + (\lambda - \mu)\eta'(\mu) + \frac{1}{2}(\lambda - \mu)^2 \eta''(\xi), \quad 0 < \lambda < \xi < \mu \leqslant 1$$

С учётом $\eta'(\lambda) = -1 - \ln \lambda$, $\eta''(\lambda) = -\frac{1}{\lambda}$, получаем

$$-\lambda \ln \lambda = -\mu \ln \mu - (\lambda - \mu) - (\lambda - \mu) \ln \mu - \frac{1}{2}(\lambda - \mu)^2 \frac{1}{\xi}$$

Квантовая относительная энтропия

$$\lambda \ln \lambda - \lambda \ln \mu = \lambda - \mu + \frac{1}{2}(\lambda - \mu)^2 \frac{1}{\xi} \geqslant \lambda - \mu + \frac{1}{2}(\lambda - \mu)^2$$

(с учётом $\xi < 1$)
В частности, и в пределе $\lambda \to +0$

$$0 \geqslant -\mu + \frac{1}{2}\mu^2 \quad \text{при } \mu \in [0,1]$$

$$\rho = \sum_j \lambda_j |e_j\rangle\langle e_j|, \qquad \sigma = \sum_k \mu_k |h_k\rangle\langle h_k|$$

$$S(\rho||\sigma) = \sum_{j,k} |\langle e_j|h_k\rangle|^2 \left(\lambda_j \ln \lambda_j - \lambda_j \ln \mu_k\right) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{j,k} |\langle e_j|h_k\rangle|^2 (\lambda_j - \mu_k) + \frac{1}{2} \sum_{j,k} |\langle e_j|h_k\rangle|^2 (\lambda_j - \mu_k)^2 = \frac{1}{2} \operatorname{Tr}(\rho - \sigma)^2$$

Квантовая относительная энтропия

Таким образом, мы доказали, что

$$S(\rho||\sigma) \geqslant \frac{1}{2}\operatorname{Tr}(\rho-\sigma)^2, \qquad \forall \rho, \sigma$$

Очевидно, $\operatorname{Tr}(\rho-\sigma)^2 \geqslant 0$, причём, если $\operatorname{Tr}(\rho-\sigma)^2 = 0$, то $\rho = \sigma$. $\square$

Квантовая относительная энтропия

Теорема.(Монотонность относительной энтропии) Если Φ — канал, а ρ, σ — матрицы плотности, то

$$S(\Phi(\rho)||\Phi(\sigma)) \leqslant S(\rho||\sigma)$$

Квантовая относительная энтропия

Лемма 1.

1. $$S(\rho_1||\rho_2) = -\operatorname{Tr}\rho_1^{\frac{1}{2}}\ln(\rho_2\cdot\rho_1^{-1})\rho_1^{\frac{1}{2}}$$

2. $$S(\rho_1||\rho_2) = \int_0^{\infty}\operatorname{Tr}(\rho_2-\rho_1)(\rho_1\cdot+s\cdot\rho_2)^{-1}(\rho_2-\rho_1)\frac{ds}{(s+1)^2}$$

Квантовая относительная энтропия

Доказательство:
1) Отметим, что
$$f(X\cdot) = f(X)\cdot,$$
что можно проверить для полиномов.

$$\rho_2 \cdot \rho_1^{-1} = (\rho_2\cdot)(\cdot\rho_1^{-1}) = (\rho_2\cdot)(\cdot\rho_1)^{-1}$$

С учётом $[(\rho_2\cdot), (\cdot\rho_1)^{-1}] = 0$, имеем

$$-\ln(\rho_2 \cdot \rho_1^{-1}) = -\ln((\rho_2\cdot)(\cdot\rho_1)^{-1}) = \cdot(\ln\rho_1) - (\ln\rho_2)\cdot$$

$$-\operatorname{Tr}\rho_1^{\frac{1}{2}} \ln(\rho_2 \cdot \rho_1^{-1})\rho_1^{\frac{1}{2}} = \operatorname{Tr}\rho_1^{\frac{1}{2}}(\cdot(\ln\rho_1) - (\ln\rho_2)\cdot)\rho_1^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \operatorname{Tr}\rho_1^{\frac{1}{2}}(\rho_1^{\frac{1}{2}}\ln\rho_1 - \ln\rho_2\rho_1^{\frac{1}{2}}) = \operatorname{Tr}(\rho_1\ln\rho_1 - \rho_1\ln\rho_2) = S(\rho_1||\rho_2)$$

Квантовая относительная энтропия

Доказательство:

2)

$$-\ln w = -(w-1) + \int_0^\infty \frac{(w-1)^2}{w+s}\frac{ds}{(s+1)^2}$$

Поэтому представим энтропию в виде:

$$S(\rho_1||\rho_2) = -\operatorname{Tr}\rho_1^{\frac{1}{2}}(\rho_2\cdot\rho_1^{-1} - I)\rho_1^{\frac{1}{2}} +$$

$$+\int_0^\infty \frac{ds}{(s+1)^2}\operatorname{Tr}\rho_1^{\frac{1}{2}}(\rho_2\cdot\rho_1^{-1} - I)(\rho_2\cdot\rho_1^{-1} + sI)^{-1}(\rho_2\cdot\rho_1^{-1} - I)\rho_1^{\frac{1}{2}}$$

Начнём с первого члена

$$(\rho_2 \cdot \rho_1^{-1} - I)\rho_1^{\frac{1}{2}} = \rho_2 \rho_1^{-\frac{1}{2}} - \rho_1^{\frac{1}{2}} = (\rho_2 - \rho_1)\rho_1^{-\frac{1}{2}}$$

$$- \operatorname{Tr} \rho_1^{\frac{1}{2}}(\rho_2 \cdot \rho_1^{-1} - I)\rho_1^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \operatorname{Tr} \rho_1^{\frac{1}{2}}(\rho_2 - \rho_1)\rho_1^{-\frac{1}{2}} = \operatorname{Tr}(\rho_2 - \rho_1) = 1 - 1 = 0$$

Квантовая относительная энтропия

С учётом

$$\rho_2 \cdot \rho_1^{-1} + sI = \cdot \rho_1^{-\frac{1}{2}} (\rho_2 \cdot + s \cdot \rho_1) \cdot \rho_1^{-\frac{1}{2}}$$

подынтегральный член

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr} \rho_1^{\frac{1}{2}} (\rho_2 \cdot \rho_1^{-1} - I)(\rho_2 \cdot \rho_1^{-1} + sI)^{-1} (\rho_2 \cdot \rho_1^{-1} - I) \rho_1^{\frac{1}{2}} = \\ = \operatorname{Tr} (\rho_2 - \rho_1) \rho_1^{-\frac{1}{2}} (\rho_2 \cdot \rho_1^{-1} + sI)^{-1} (\rho_2 - \rho_1) \rho_1^{-\frac{1}{2}} = \\ = \operatorname{Tr} (\rho_2 - \rho_1) \rho_1^{-\frac{1}{2}} \cdot \rho_1^{\frac{1}{2}} (\rho_2 \cdot + s \cdot \rho_1)^{-1} \cdot \rho_1^{\frac{1}{2}} (\rho_2 - \rho_1) \rho_1^{-\frac{1}{2}} = \\ = \operatorname{Tr} (\rho_2 - \rho_1)(\rho_2 \cdot + s \cdot \rho_1)^{-1} (\rho_2 - \rho_1) \quad \square \end{aligned}$$

Неравенство Кэдисона

Говорят, что положительное отображение $\Phi^*(I) = I$ удовлетворяет "унитальному" неравенству Кэдисона (иногда, говорят удовлетворяет неравенству Шварца), если

$$\Phi^*(B^\dagger B) \geqslant \Phi^*(B^\dagger)\Phi^*(B), \qquad \forall B \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

Упражнение. Доказать, что это утверждение следует из 2-положительности, но строго сильнее положительности (то есть существуют положительные отображения, которые этом неравенству не удовлетворяют.)

$\frac{2k+1}{2}$ — положительные отображения

Если унитальное отображение $\Phi^* \otimes I_{k^2}$ удовлетворяет "унитальному" неравенству Кэдисона, то будем называть Φ $\frac{2k+1}{2}$-***положительным (сохраняющем след) отображением***.

Утверждение.

$$1 \text{ - пол.} \supset \frac{3}{2} \text{ - пол.} \supset 2 \text{ - пол.} \supset \ldots \supset n \text{ - пол.} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \text{ - пол.} = \text{ вполне}$$

- Chruściński, D. (2022). Dynamical maps beyond Markovian regime. Physics Reports, 992, 1-85. Section 4.5.

Квантовая относительная энтропия

Лемма 2. Пусть Φ^* удовлетворяет "унитальному" неравенству Кэдисона

$$\mathrm{Tr}\, A^\dagger(\rho_1 \cdot + s \cdot \rho_2)^{-1} A \geqslant \mathrm{Tr}\, \Phi[A^\dagger](\Phi[\rho_1] \cdot + s \cdot \Phi[\rho_2])^{-1} \Phi[A].$$

Квантовая относительная энтропия

Лемма 2. Пусть Φ^* удовлетворяет "унитальному" неравенству Кэдисона

$$\operatorname{Tr} A^\dagger(\rho_1 \cdot + s \cdot \rho_2)^{-1} A \geqslant \operatorname{Tr} \Phi[A^\dagger](\Phi[\rho_1] \cdot + s \cdot \Phi[\rho_2])^{-1} \Phi[A].$$

Квантовая относительная энтропия

Доказательство (Теоремы): Так как

$$\frac{1}{(s+1)^2} > 0, s \in \mathbb{R}_+$$

то по леммам 1 и 2 (полагая $A = \rho_2 - \rho_1$)

$$S(\rho_1||\rho_2) = \int_0^\infty \mathrm{Tr}(\rho_2 - \rho_1)(\rho_1 \cdot + s \cdot \rho_2)^{-1}(\rho_2 - \rho_1)\frac{ds}{(s+1)^2} \geqslant$$

$$\geqslant \int_0^\infty \mathrm{Tr}(\Phi[\rho_2] - \Phi[\rho_1])(\Phi[\rho_1] \cdot + s \cdot \Phi[\rho_2])^{-1}(\Phi[\rho_2] - \Phi[\rho_1])\frac{ds}{(s+1)^2} =$$

$$= S(\Phi[\rho_1]||\Phi[\rho_2]) \quad \square$$

Монотонность энтропии фон Неймана

Упражнение. Если Φ — бистохастический канал, ρ — матрица плотности, то

$$S(\Phi(\rho)) \geqslant S(\rho).$$

Квантовая относительная энтропия

Квантовые относительные энтропии Реньи

$$S_\alpha(\rho||\sigma) = (\alpha - 1)^{-1} \ln \left(\mathrm{Tr}(\sigma^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}} \rho \sigma^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}})^\alpha \right)$$

В частности,

$$S_{\frac{1}{2}}(\rho||\sigma) = -2 \ln F(\rho, \sigma),$$

где

$$F(\rho, \sigma) = \left(\mathrm{Tr} \sqrt{\sqrt{\rho} \sigma \sqrt{\rho}} \right)^2$$

— фиделити.

Теорема. $\alpha \geqslant \frac{1}{2}$, Φ — канал

$$S_\alpha(\Phi(\rho)||\Phi(\sigma)) \leqslant S_\alpha(\rho||\sigma)$$

- Frank, R. L., Lieb, E. H. (2013). Monotonicity of a relative Rényi entropy. Journal of Mathematical Physics, 54(12).