Об оценках снизу колмогоровских поперечников

Ю.В. Малыхин

МИАН, 18.11.2024

Колмогоровский поперечник

Пусть X — нормированное пространство.
В теории аппроксимации изучаются приближения множеств $K \subset X$ "более простыми" множествами $V \subset X$. Формально, определим уклонение:

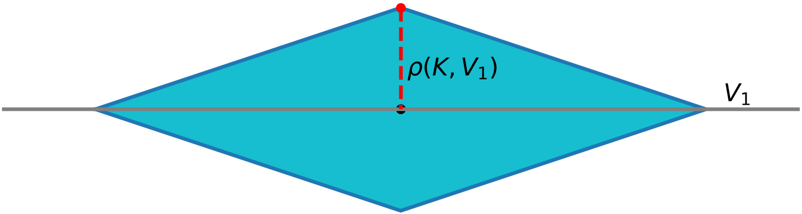
$$\rho(K, V)_X := \sup_{x \in K} \inf_{y \in V} \|x - y\|.$$

Колмогоровский n-поперечник множества $K \subset X$ определяет, насколько хорошо можно приблизить K с помощью подходящего n-мерного линейного подпространства:

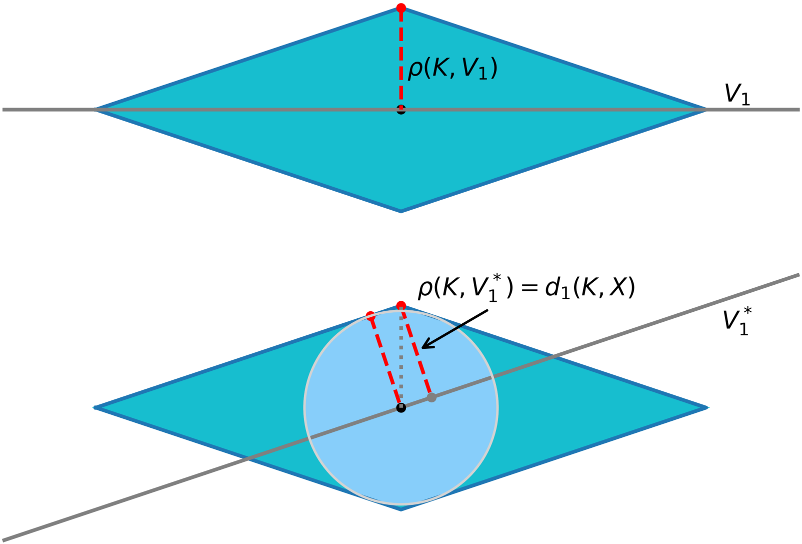
$$d_n(K, X) := \inf_{\substack{V_n \subset X \\ \dim V_n \leqslant n}} \rho(K, V_n)_X$$

Эта величина была введена в работе А.Н. Колмогорова 1936 г.

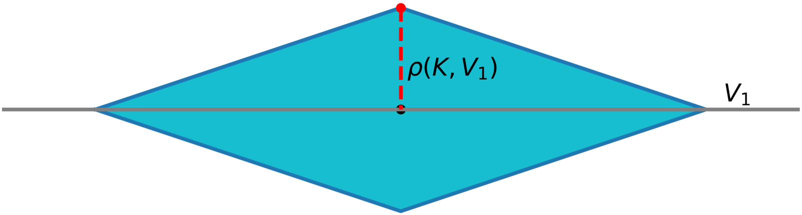
Пример 1: ромб K на евклидовой плоскости X.

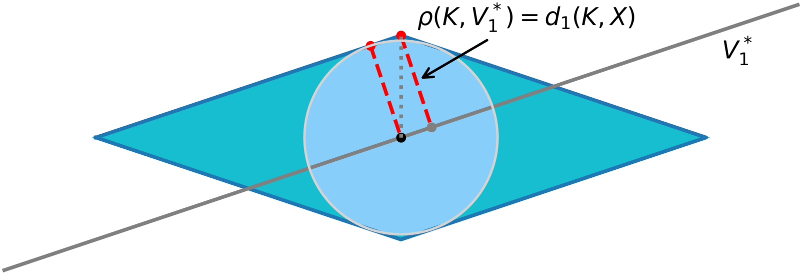


Пример 1: ромб K на евклидовой плоскости X.



Пример 1: ромб K на евклидовой плоскости X.





Пример 2 (B. Green): для любой орбиты конечной группы $G \subset \mathcal{O}(N)$ имеем $d_{N-1}(Gx, \ell_2^N) \leqslant C|x|/\sqrt{\log N}$.

1. Поперечники класса W_1^1

Пусть $r \in \mathbb{N}$. Рассмотрим класс Соболева

$$W_p^r := W_p^r[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : \|f^{(r)}\|_p \leqslant 1\}.$$

В работе 1936 года Колмогоров вычислил точные значения поперечников $d_n(W_2^r, L_2)$ в терминах собственных значений специального дифференциального оператора.

Задача. Для всех $r \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$ найти *порядок* убывания поперечника $d_n(W_p^r, L_q)$.

Этот вопрос активно изучался в 1960-х и 1970-х годах:
С.Б. Стечкин, Г.Г. Лоренц, В.М. Тихомиров, Ю.И. Маковоз, Р.С. Исмагилов, Б.С. Кашин, Е.Д. Глускин. Решение задачи было в целом завершено в работе Кашина 1977 года.

Оставался открытым только один случай: $r = p = 1$, $2 < q < \infty$. Класс $W_1^1 := W_1^1[0,1]$ состоит из абсолютно непрерывных функций f, таких что $\int_0^1 |f'(x)|\, dx \leqslant 1$.

Е.Д. Куланин (1983) нашёл порядок поперечника с точностью до степени логарифма:

$$n^{-1/2} \log^{1/2-o(1)} n \lesssim d_n(W_1^1, L_q) \lesssim n^{-1/2} \log n.$$

Теорема (М., 2025)

Для любого $q \in (2,\infty)$ существуют числа $c_1(q), c_2(q) > 0$, такие что при всех $n \geqslant 2$ справедливо неравенство

$$c_1(q) n^{-1/2} \log n \leqslant d_n(W_1^1, L_q) \leqslant c_2(q) n^{-1/2} \log n.$$

Оставался открытым только один случай: $r = p = 1$, $2 < q < \infty$. Класс $W_1^1 := W_1^1[0,1]$ состоит из абсолютно непрерывных функций f, таких что $\int_0^1 |f'(x)|\,dx \leqslant 1$.

Е.Д. Куланин (1983) нашёл порядок поперечника с точностью до степени логарифма:

$$n^{-1/2}\log^{1/2-o(1)} n \lesssim d_n(W_1^1, L_q) \lesssim n^{-1/2}\log n.$$

Теорема (М., 2025)

Для любого $q \in (2,\infty)$ существуют числа $c_1(q), c_2(q) > 0$, такие что при всех $n \geqslant 2$ справедливо неравенство

$$c_1(q)n^{-1/2}\log n \leqslant d_n(W_1^1, L_q) \leqslant c_2(q)n^{-1/2}\log n.$$

Идея доказательства

Пусть χ_t — "ступенька", равная 1 на $[0, t]$, и (-1) в остальных точках отрезка $[0, 1]$. Оценка снизу сводится к приближению "случайной" ступеньки в среднем:

$$\rho(W_1^1, V_n)_{L_q} \asymp \sup_t \rho(\chi_t, V_n)_{L_q} \geqslant \left(\int_0^1 \rho(\chi_t, V_n)_{L_q}^q \, dt\right)^{1/q}$$

Каждой функции f можно сопоставить её коэффициенты Фурье $c_{k,j}(f)$ по системе Хаара и оценить L_q-норму f через весовую ℓ_q-норму вектора коэффициентов.

Случайная ступенька порождает случайный процесс

$$X_{k,j} := c_{k,j}(\chi_{\mathbf{t}}), \quad \mathbf{t} \sim \mathrm{Unif}[0, 1]$$

и дело сводится к поперечнику X в ℓ_q. Коэффициенты устроены весьма сложно, однако, при $q > 2$ для получения хороших оценок поперечника снизу **достаточно ортогональности**! Если вычесть из $X_{k,j}$ среднее (на носителе), то $\mathsf{E}(X'_{k_1,j_1} X'_{k_2,j_2}) = 0$.

2. Приближение единичной матрицы

Пусть $(\delta_{i,j})_{i,j=1}^N$ — единичная $N \times N$ матрица. Известно, что для неё существует хорошая аппроксимация логарифмического ранга:

$$\max_{1 \leqslant i,j \leqslant N} |\delta_{i,j} - A_{i,j}| < 0.01, \quad \operatorname{rank} A = O(\log N).$$

В качестве A можно взять матрицу Грама выборки N случайных векторов из $\{-1, 1\}^n$:

$$A_{i,j} = n^{-1} \langle \sigma^{(i)}, \sigma^{(j)} \rangle,$$

где $\sigma^{(1)}, \ldots, \sigma^{(N)} \sim \mathrm{Unif}\{-1, 1\}^n$, $n = O(\log N)$.

Тогда $\operatorname{rank} A \leqslant n$, $A_{i,i} = 1$ и $\mathrm{Law}(n^{1/2} A_{i,j}) \approx \mathcal{N}(0, 1)$ при $i \neq j$, что даёт $\mathsf{E} \max_{i \neq j} |A_{i,j}| \asymp n^{-1/2} \log N$.

Что можно сказать о структуре A? В нашем примере для $\gtrsim N^2$ элементов матрицы будет справедлива оценка $|A_{i,j}| \gtrsim n^{-1/2}$. Оказывается, этого нельзя избежать.

2. Приближение единичной матрицы

Пусть $(\delta_{i,j})_{i,j=1}^N$ — единичная $N \times N$ матрица. Известно, что для неё существует хорошая аппроксимация логарифмического ранга:

$$\max_{1\leqslant i,j\leqslant N} |\delta_{i,j} - A_{i,j}| < 0.01, \quad \operatorname{rank} A = O(\log N).$$

В качестве A можно взять матрицу Грама выборки N случайных векторов из $\{-1,1\}^n$:

$$A_{i,j} = n^{-1}\langle \sigma^{(i)}, \sigma^{(j)}\rangle,$$

где $\sigma^{(1)},\dots,\sigma^{(N)} \sim \mathrm{Unif}\{-1,1\}^n$, $n = O(\log N)$.

Тогда $\operatorname{rank} A \leqslant n$, $A_{i,i} = 1$ и $\mathrm{Law}(n^{1/2}A_{i,j}) \approx \mathcal{N}(0,1)$ при $i \neq j$, что даёт $\mathsf{E}\max_{i\neq j}|A_{i,j}| \asymp n^{-1/2}\log N$.

Что можно сказать о структуре A? В нашем примере для $\gtrsim N^2$ элементов матрицы будет справедлива оценка $|A_{i,j}| \gtrsim n^{-1/2}$. Оказывается, этого нельзя избежать.

2. Приближение единичной матрицы

Пусть $(\delta_{i,j})_{i,j=1}^N$ — единичная $N \times N$ матрица. Известно, что для неё существует хорошая аппроксимация логарифмического ранга:

$$\max_{1 \leqslant i,j \leqslant N} |\delta_{i,j} - A_{i,j}| < 0.01, \quad \operatorname{rank} A = O(\log N).$$

В качестве A можно взять матрицу Грама выборки N случайных векторов из $\{-1,1\}^n$:

$$A_{i,j} = n^{-1} \langle \sigma^{(i)}, \sigma^{(j)} \rangle,$$

где $\sigma^{(1)}, \ldots, \sigma^{(N)} \sim \mathrm{Unif}\{-1,1\}^n$, $n = O(\log N)$.

Тогда $\operatorname{rank} A \leqslant n$, $A_{i,i} = 1$ и $\mathrm{Law}(n^{1/2} A_{i,j}) \approx \mathcal{N}(0,1)$ при $i \neq j$, что даёт $\mathsf{E} \max_{i \neq j} |A_{i,j}| \asymp n^{-1/2} \log N$.

Что можно сказать о структуре A? В нашем примере для $\gtrsim N^2$ элементов матрицы будет справедлива оценка $|A_{i,j}| \gtrsim n^{-1/2}$. Оказывается, этого нельзя избежать.

Теорема (М., 2025)

Пусть A — матрица размера $N \times N$, ранга n такая, что

$$\max_{1 \leqslant i,j \leqslant N} |A_{i,j} - \delta_{i,j}| \leqslant 1/3.$$

Если $n \leqslant K \log N$ для некоторого K, то не менее $c(K)N^2$ элементов матрицы A по модулю больше $c(K)n^{-1/2}$.

Это даёт положительный ответ на вопрос Б.С. Кашина.

Отметим, что в области, скажем, $\operatorname{rank} A \asymp \log^2 N$, порядок оптимального приближения не известен!

Теорема (М., 2025)

Пусть A — матрица размера $N \times N$, ранга n такая, что

$$\max_{1 \leqslant i,j \leqslant N} |A_{i,j} - \delta_{i,j}| \leqslant 1/3.$$

Если $n \leqslant K \log N$ для некоторого K, то не менее $c(K)N^2$ элементов матрицы A по модулю больше $c(K)n^{-1/2}$.

Это даёт положительный ответ на вопрос Б.С. Кашина.

Отметим, что в области, скажем, $\operatorname{rank} A \asymp \log^2 N$, порядок оптимального приближения не известен!