

О периоде разложения $\sqrt{D}$ в цепную дробь

М.А. Королёв*

* Математический институт им. В.А. Стеклова (МИАН)

Научная сессия МИАН, посвященная подведению итогов 2025
года

Москва
18 ноября 2025 года

Квадратичные иррациональности и цепные дроби



J.-L. LAGRANGE, 1770: цепная дробь числа α периодична (с некоторого места) тогда, и только тогда, когда α – квадратичная иррациональность.

Квадратичные иррациональности и цепные дроби

В связи с решением уравнения Пелля $x^2 - Dy^2 = \pm 1$ для бесквадратных чисел D представляет интерес разложение в цепную дробь числа $\sqrt{D}$. Известно, что оно имеет вид

$$\sqrt{D} = [q_0; \overline{q_1, q_2, \dots, q_2, q_1, 2q_0}].$$

Например,

$$\sqrt{21} = [4; \overline{1, 1, 2, 1, 1, 8}];$$

$$\sqrt{37} = [6; \overline{12}];$$

$$\sqrt{45} = [6; \overline{1, 2, 2, 2, 1, 12}];$$

$$\sqrt{109} = [10; \overline{2, 3, 1, 2, 4, 1, 6, 6, 1, 4, 2, 1, 3, 2, 20}].$$

Квадратичные иррациональности и цепные дроби

D	$p(D)$	$\sqrt{D}$	D	$p(D)$	$\sqrt{D}$	D	$p(D)$	$\sqrt{D}$
3395	4	58.27	6447	8	80, 29	9453	8	97, 23
3397	82	58.28	6449	83	80, 31	9454	106	97, 23
3398	30	58.29	6451	170	80, 32	9455	8	97, 24
3399	6	58.30	6454	48	80, 34	9458	7	97, 25
3401	32	58.32	6455	24	80, 34	9461	119	97, 27
3403	6	58.34	6457	74	80, 36	9462	10	97, 27
3405	18	58.35	6458	27	80, 36	9463	120	97, 28
3406	46	58.36	6459	30	80, 37	9465	58	97, 29
3407	32	58.37	6461	38	80, 38	9466	75	97, 29
3409	86	58.39	6463	36	80, 39	9467	10	97, 30
3410	12	58.40	6465	40	80, 41	9469	84	97, 31
3413	13	58.42	6466	29	80, 41	9470	18	97, 31
3414	18	58.43	6467	20	80, 42	9471	12	97, 32
3415	40	58.44	6469	49	80, 43	9473	73	97, 33

(W. PATZ, *Tafel Der regelmässigen Kettenbrüche und Ihrer Vollständigen Quotienten für Die Quadratwurzeln Aus Den Naturlichen Zahlen Von 1 – 10000*, 1955).

Верхние оценки $p(D)$ для бесквадратных чисел D

D.R. HICKERSON, 1973 :

$$p(D) < \sqrt{D} \exp \left((\ln 2 + o(1)) \frac{\ln D}{\ln \ln D} \right);$$

K.E. HIRST, 1972 :

$$p(D) < 2\sqrt{D}(\ln D + O(1));$$

R.G. STANTON, H.C. WILLIAMS, 1976 :

$$p(D) < 0.82\sqrt{D} \ln D, \quad D > 7;$$

R.G. STANTON, C. SUDLER, H.C. WILLIAMS, 1976 :

$$p(D) < 0.72\sqrt{D} \ln D, \quad D > 7;$$

J.H.E. COHN, 1977 :

$$p(D) < c\sqrt{D} \ln D + O(\sqrt{D}), \quad c = \frac{7}{2\pi^2} = 0.3546 \dots$$

H.W. LIU, 1986 :

$$p(D) < 0.24\sqrt{D} \ln D.$$

Е.В. Подсыпанин, 1979:

$$p(D) < \frac{\kappa \sqrt{\Delta} L(1, \chi_D)}{2h(D) \ln \varphi}, \quad \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

$h(D)$ – число классов вещественного квадратичного поля $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$,
 Δ – дискриминант поля, т.е.

$$\Delta = \begin{cases} D, & \text{если } D \equiv 1 \pmod{4}, \\ 4D, & \text{иначе,} \end{cases} \quad \chi_D(n) = \left(\frac{\Delta}{n} \right) \quad \text{— символ Кронекера,}$$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{2}(u_0 + v_0 \sqrt{D}) \quad \text{— фундаментальная единица в } \mathbb{Q}(\sqrt{D}),$$

$\kappa = 1$ или 3 в зависимости от того, будет ли чётным u_0 или нет.

Если верна расширенная гипотеза Римана, то

$$p(D) \ll \sqrt{D} \ln \ln D.$$

J.H.E. СОНН, 1977: без каких бы то ни было гипотез

$$p(D) = \Omega\left(\frac{\sqrt{D}}{\ln \ln D}\right).$$

N. SARADHA, 2017: для «почти всех» бесквадратных D выполнено неравенство

$$p(D) < 6.5(1 + \varepsilon)\sqrt{D}(\ln D)^{1 - \ln 2} \quad 1 - \ln 2 = 0.3068 \dots$$

A. ROCKETT, P. SZÜSZ, 1990:

пусть $\alpha > 0$, $X > X_0$, и пусть $\mathcal{E}(X; \alpha)$ – множество тех бесквадратных D промежутка

$$X < D \leq 2X,$$

для которых выполнено неравенство

$$p(D) > \alpha\sqrt{D}.$$

Тогда

$$|\mathcal{E}(X; \alpha)| \leq \frac{cX}{(\ln \alpha)^2}, \quad c > 0 \quad - \text{постоянная.}$$

F. BATTISTONI L. GRENIÉ G. MOLteni, 2024:

$$|\mathcal{E}(X; \alpha)| \leq \frac{c_1 + o(1)}{\alpha} X, \quad |\mathcal{E}(X; \alpha)| \leq \frac{c_2 + o(1)}{\alpha^2} X,$$

$$c_1 = 1.6898 \dots, \quad c_2 = 47.$$

M.K., 2025:

$$|\mathcal{E}(X; \alpha)| \leq \frac{c_0 + o(1)}{\alpha^2} X, \quad c_0 = 3.663 \dots$$

1) D.R. NICKERSON, 1973: справедливо неравенство

$$p(D) \leq g(D),$$

где величина $g(D)$ равна количеству пар натуральных чисел m и q с условиями:

$$1 \leq m < \sqrt{D}, \quad \sqrt{D} - m < q < \sqrt{D} + m, \quad q|D - m^2.$$

2) F. BATTISTONI L. GRENIÉ G. MOLteni: получение асимптотики первого момента $g(D)$ и верхней оценки второго момента $g(D)$:

$$\sum_{D \leq X} g(D) = \frac{4}{3} (\ln 2) X^{3/2} (1 + o(1)), \quad \sum_{D \leq X} g^2(D) \leq 11.9 X^2 (1 + o(1))$$

и неравенство «чебышевского типа»:

$$(\alpha \sqrt{X})^2 \cdot |\mathcal{E}(X; \alpha)| \leq \sum_{D \in \mathcal{E}} p^2(D) \leq \sum_{X < D \leq 2X} g^2(D).$$

3) М.К.: вычисление асимптотики второго момента:

$$\sum_{D \leq X} g^2(D) = c_0 X^2 + O(X^{2-\delta+\varepsilon}), \quad c_0 = 1.218\dots, \quad \delta = \frac{1}{54}.$$

Точное выражение для постоянной c_0 :

$$c_0 = \frac{13}{14} \frac{\zeta(2)}{\zeta(3)} \mathfrak{S},$$

причём величина $\mathfrak{S}$ представляется следующим интегралом:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} &= \int_0^1 du_1 \int_0^1 du_2 \int_0^{1+u_1} dv_1 \int_0^{1+u_2} dv_2 \varphi(u_1, u_2, v_1, v_2) dv_2, \\ &\quad \text{где } \varphi(u_1, u_2, v_1, v_2) = \\ &= \frac{1}{v_1 v_2} \max(0, \min(1, (u_1 + v_1)^2, (u_2 + v_2)^2) - \max(u_1^2, u_2^2, (u_1 - v_1)^2, (u_2 - v_2)^2)) \end{aligned}$$

Её точное значение было найдено F. BATTISTONI L. GRENIÉ G. MOLTENI:

$$\mathfrak{S} = 2(\ln 2)^2 = 0.9609060278\dots$$

Теорема S. ВЕТТИН, V. CHANDÉE (2018) об оценке «суммы сумм Клоостермана» вида

$$S = \sum_{L < \ell \leq L_1} \sum_{M < m \leq M_1} \sum_{\substack{N < n \leq N_1 \\ (m, n) = 1}} a_m b_n c_\ell e\left(\vartheta \frac{\ell \overline{m}}{n} + f_{\ell, \vartheta}(m, n)\right)$$

где функция $f_{\ell, \vartheta}(x, y)$ при любом ℓ принадлежит классу $C^1(\mathbb{R}_+^2)$ и удовлетворяет в прямоугольнике

$$M \leq x \leq M_1, \quad N \leq y \leq N_1$$

некоторым естественным условиям на рост первых двух частных производных,

$\mathbf{a} = \{a_m\}, \mathbf{b} = \{b_n\}, \mathbf{c} = \{c_\ell\}$ – произвольные последовательности.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!