

В.И.Буслаев

О носителе меры в интегральном представлении функции Неванлинны,
задаваемой предельно периодической непрерывной дробью

Научная сессия МИАН,
посвященная подведению итогов 2025 года

18 ноября 2025 г.

ОБОЗНАЧЕНИЯ. $\mathbb{D} := \{z : |z| < 1\}$, $\mathbb{C}_+ := \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция $f(z)$ называется функцией Шура, если $f \in H(\mathbb{D})$ и $|f(z)| \leq 1$.

АЛГОРИТМ ШУРА. Пусть $f(z)$ – функция Шура, $a_1, a_2, \dots$ – последовательность точек, лежащих в $\mathbb{D}$,

$$\varphi_{a_n}(z) := \frac{z - a_n}{1 - \bar{a}_n z}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

– дробно линейные преобразования, переводящие $\mathbb{D}$ в $\mathbb{D}$. Тогда $|\gamma_0| \leq 1$, где

$$\gamma_0 := f(a_1), \quad f(z) = \gamma_0 + \frac{(1 - |\gamma_0|^2)\varphi_{a_1}(z)}{\bar{\gamma}_0\varphi_{a_1}(z) + \frac{1}{f_1(z)}}, \quad f_1(z) := \frac{f(z) - \gamma_0}{\varphi_{a_1}(z)(1 - \bar{\gamma}_0 f(z))} - \phi\text{-я Шура}$$

$$\gamma_1 := f_1(a_2), \quad f(z) = \gamma_0 + \frac{(1 - |\gamma_0|^2)\varphi_{a_1}(z)}{\bar{\gamma}_0\varphi_{a_1}(z) + \frac{1}{f_1(z)}} = \gamma_0 + \frac{(1 - |\gamma_0|^2)\varphi_{a_1}(z)}{\bar{\gamma}_0\varphi_{a_1}(z) + \frac{1}{\gamma_1 + \frac{(1 - |\gamma_1|^2)\varphi_{a_2}(z)}{\bar{\gamma}_1\varphi_{a_2}(z) + \frac{1}{f_2(z)}}}}$$

$$f(z) \sim \gamma_0 + \frac{(1 - |\gamma_0|^2)\varphi_{a_1}(z)}{\bar{\gamma}_0\varphi_{a_1}(z) + \frac{1}{\gamma_1 + \frac{(1 - |\gamma_1|^2)\varphi_{a_2}(z)}{\bar{\gamma}_1\varphi_{a_2}(z) + \frac{1}{\gamma_2 + \dots}}}}, \quad |\gamma_n| \leq 1, \quad n = 0, 1, \dots \quad (1) \quad \boxed{\text{A1}}$$

ОБОЗНАЧЕНИЯ.

$$\pi_0(z) \equiv \gamma_0, \pi_1(z) = \gamma_0 + \frac{(1 - |\gamma_0|^2)\varphi_{a_1}(z)}{\bar{\gamma}_0\varphi_{a_1}(z)}, \pi_2(z) = \gamma_0 + \frac{(1 - |\gamma_0|^2)\varphi_{a_1}(z)}{\bar{\gamma}_0\varphi_{a_1}(z) + \frac{1}{\gamma_1}}, \dots$$

ТЕОРЕМА ШУРА. Пусть $a_1 = a_2 = \dots = 0$, и пусть $|\gamma_n| < 1$, $n = 0, 1, \dots$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi_{2n}(z) = f(z), \quad z \in \mathbb{D},$$

локально равномерно в $\mathbb{D}$, $f(z)$ – функция Шура. Алгоритм Шура, примененный к $f(z)$, приводит к исходной непрерывной дроби.

ЗАМЕЧАНИЯ.

1°. Теорема Шура верна и в многоточечном случае, в котором $a_1, a_2, \dots$ – произвольные точки, компактно лежащие в $\mathbb{D}$.

$$2^\circ. \pi_{2n+1}(z) = (\overline{\pi_{2n}(z^{-1})})^{-1}$$

$$3^\circ. \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_{2n+1}(z) = \tilde{f}(z) := (\overline{f(z^{-1})})^{-1}, \quad z \in \mathbb{D}^* := \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. $F(z)$ – функция Каратеодори, если $F \in H(\mathbb{D})$ и $\operatorname{Re} F(z) \geq 0$.

Пусть $F(z)$ – функция Каратеодори, $a_0, a_1, \dots$ – последовательность точек, лежащих в $\mathbb{D}$. Тогда $\operatorname{Re} \gamma_{-1} \geq 0$, где $\gamma_{-1} := F(a_0)$,

$$F(z) = \gamma_{-1} + \frac{(\gamma_{-1} + \bar{\gamma}_{-1})\varphi_{a_0}(z)}{-\varphi_{a_0}(z) + \frac{1}{f(z)}}, \quad f(z) = \frac{F(z) - \gamma_{-1}}{\varphi_a(z)(F(z) + \bar{\gamma}_{-1})} \quad \text{– ф-я Шура}$$

$$F(z) \sim \gamma_{-1} + \frac{(\gamma_{-1} + \bar{\gamma}_{-1})\varphi_{a_0}(z)}{-\varphi_{a_0}(z) + \frac{1}{\gamma_0 + \frac{(1 - |\gamma_0|^2)\varphi_{a_1}(z)}{\bar{\gamma}_0\varphi_{a_1}(z) + \frac{1}{\gamma_1 + \frac{(1 - |\gamma_1|^2)\varphi_{a_2}(z)}{\bar{\gamma}_1\varphi_{a_2}(z) + \frac{1}{\gamma_2 + \dots}}}}}}, \quad \begin{array}{l} \operatorname{Re} \gamma_{-1} \geq 0, \\ |\gamma_n| \leq 1, \quad n = 0, 1, \dots \end{array} \quad (2) \quad \boxed{\text{A2}}$$

ТЕОРЕМА РИССА–ХЕРГЛОТЦА. Функция $F(z)$ является функцией Каратеодори тогда и только тогда, когда существует неотрицательная мера ζ с носителем на окружности $\mathbb{T} := \{|z| = 1\}$ такая, что

$$F(z) = i \operatorname{Im} F(0) + \int_{\mathbb{T}} \frac{t+z}{t-z} d\zeta(t).$$

ТЕОРЕМЫ ГЕРОНИМУСА. Пусть непрерывная дробь $\frac{\text{A2}}{(2)}$ такова что

$$a_0 = a_1 = \dots = 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{Re} \gamma_{-1} > 0, \quad |\gamma_n| < 1, \quad n = 0, 1, \dots$$

$$\text{Тогда} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_{2n}(z) = F(z), \quad z \in \mathbb{D},$$

локально равномерно в $\mathbb{D}$, $F(z)$ – функция Каратеодори и

1°. Если многочлены

$$p_n(z) = k_n z^n + \dots + p_n(0), \quad k_n \neq 0, \quad n = 0, 1, \dots,$$

ортогональны по мере, соответствующей функции Каратеодори, то

$$p_n(z) = \frac{k_n}{k_{n-1}} z p_{n-1}(z) - \frac{k_n}{k_{n-1}} \bar{\gamma}_{n-1} z^{n-1} p_{n-1}^*(z), \quad \text{где } p_n^*(z) := \overline{p_n(1/\bar{z})}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$(\text{т.е. } \gamma_{n-1} = -\overline{p_n(0)}/p_n^*(0))$$

2°. Если

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=0}^n (1 - |\gamma_k|^2)^{1/n} = 1,$$

то носитель меры, соответствующей функции Каратеодори, совпадает с $\mathbb{T}$.

МНОГОТОЧЕЧНЫЙ ВАРИАНТ ПЕРВОЙ ТЕОРЕМЫ ГЕРОНИМУСА. Пусть непрерывная дробь $(\frac{A_2}{2})$ такова что

$$\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{D} \text{ и } \operatorname{Re} \gamma_{-1} > 0, |\gamma_n| < 1, n = 0, 1, \dots$$

Тогда
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_{2n}(z) = F(z), z \in \mathbb{D},$$

локально равномерно в $\mathbb{D}$, $F(z)$ – функция Каратеодори и если рациональные функции $r_n(z) = \sum_{j=0}^n c_{n,j} \mathcal{L}_j(z)$, $c_{n,n} \neq 0$ получены процессом ортогонализации системы функций

$$\mathcal{L}_0(z) := 1, \mathcal{L}_1(z) := \varphi_{a_1}(z), \dots, \mathcal{L}_n(z) := \prod_{k=1}^n \varphi_{a_k}(z), \dots$$

по мере, соответствующей функции Каратеодори, то

$$\gamma_{n-1} := -\overline{r_n(a_{n-1})}/r_n^*(a_{n-1}), n = 1, 2, \dots$$

ЗАМЕЧАНИЕ. $\zeta_{2n+1}(z) = -\overline{\zeta_{2n}(\overline{z^{-1}})}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_{2n+1}(z) = -\overline{F(\overline{z^{-1}})}, z \in \mathbb{D}^*$

ТЕОРЕМА 1. Пусть непрерывная дробь $\frac{A_2}{B_2}$ такова, что

$$\operatorname{Re} \gamma_{-1} > 0, \quad |\gamma_n| < 1, \quad n = 0, 1, \dots$$

Тогда
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_{2n}(z) = F(z), \quad z \in \mathbb{D},$$

локально равномерно в $\mathbb{D}$, $F(z)$ – функция Каратеодори. При этом

1°. Если лежащие в $\mathbb{D}$ точки $a_0, a_1, \dots$ имеют предельное распределение такое, что

$$\frac{\xi_{a_0} + \dots + \xi_{a_{n-1}}}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{*} \theta, \text{ т. е. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v(a_0) + \dots + v(a_{n-1})}{n} = \int v(z) d\theta(z) \quad \forall v(z) \in C(\overline{\mathbb{C}})$$

где θ – вероятностная мера с носителем на компакте, лежащем в $\mathbb{D}$, и

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=0}^n (1 - |\gamma_k|)^{1/n} = 1,$$

то носитель меры, соответствующей функции Каратеодори, совпадает с $\mathbb{T}$.

2°. Если лежащие в $\mathbb{D}$ точки $a_0, a_1, \dots$ и коэффициенты $\gamma_{-1}, \gamma_0, \dots$ имеют периодические с периодом $q \in \mathbb{N}$ пределы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{nq+p} = a^p, \quad a^p \in \mathbb{D}, \quad p = 1, \dots, q,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_{nq+p} = \gamma^p, \quad |\gamma^p| < 1, \quad p = 1, \dots, q,$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi_n(z) = \mathbf{F}(z) = i \operatorname{Im} \mathbf{F}(0) + \int_{\Gamma \cup \tilde{\Gamma}} \frac{t+z}{t-z} d\zeta(t), \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma,$$

лок. равномерно в сферической метрике в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$, где мера ζ такова, что

$$\operatorname{supp} \zeta = \Gamma \cup \tilde{\Gamma} \subseteq \mathbb{T},$$

$\tilde{\Gamma}$ – множество полюсов функции $\mathbf{F}(z)$,

Γ – объединение не более, чем q дуг на $\mathbb{T}$,

$$\Gamma := \left\{ z \in \overline{\mathbb{C}} : \frac{I^2(z)}{\prod_{p=1}^q (z - a^p)(1 - z\bar{a}^p)} \in [0, 4 \prod_{p=1}^n (1 - |\gamma^p|^2)] \right\},$$

$I(z)$ – след матрицы

$$\begin{pmatrix} (z - a^1) & \gamma^0(1 - z\bar{a}^1) \\ \bar{\gamma}^0(z - a^1) & (1 - z\bar{a}^1) \end{pmatrix} \times \dots \times \begin{pmatrix} (z - a^q) & \gamma^{q-1}(1 - z\bar{a}^q) \\ \bar{\gamma}^{q-1}(z - a^q) & (1 - z\bar{a}^q) \end{pmatrix}, \quad \gamma^0 := \gamma^q$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. G – функция Неванлинны, если $G \in H(\mathbb{C}_+)$ и $\operatorname{Im} G(z) \geq 0$.

Пусть $G(z)$ – функция Неванлинны, $d_0, d_1, \dots$ – последовательность точек, лежащих в $\mathbb{C}_+$, $\psi_{d_n}(z) = \frac{z-d_n}{z-\bar{d}_n}$ – дробно линейные преобразования, переводящие $\mathbb{C}_+$ в $\mathbb{D}$. Тогда $\operatorname{Im} \delta_{-1} \geq 0$, где $\delta_{-1} := G(d_0)$,

$$G(z) \sim \delta_{-1} + \frac{(\delta_{-1} - \bar{\delta}_{-1})\psi_{d_0}(z)}{-\psi_{d_0}(z) + \frac{1}{\delta_0 + \frac{(1 - |\delta_0|^2)\psi_{d_1}(z)}{\bar{\delta}_0\psi_{d_1}(z) + \frac{1}{\delta_1 + \frac{(1 - |\delta_1|^2)\psi_{d_2}(z)}{\bar{\delta}_1\psi_{d_2}(z) + \frac{1}{\delta_2 + \dots}}}}}}, \quad \begin{array}{l} \operatorname{Im} \delta_{-1} \geq 0, \\ |\delta_n| \leq 1, n = 0, 1, \dots \end{array} \quad (3) \quad \boxed{\text{A3}}$$

ТЕОРЕМА РИССА–ХЕРГЛОТЦА. Функция $G(z)$ является функцией Неванлинны тогда и только тогда, когда существует неотрицательная мера σ с носителем на $\overline{\mathbb{R}}$ такая, что

$$G(z) = \operatorname{Re} G(i) + \int_{\overline{\mathbb{R}}} \frac{1+uz}{u-z} d\sigma(u).$$

$F(z)$ – функция Каратеодори $\iff G(z) = iF(\psi(z))$ – функция Неванлинны.

При этом $\operatorname{supp} \zeta = \psi(\operatorname{supp} \sigma)$, где $\psi(z) = \frac{z-i}{z+i}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ.

$$G(z) = iF(\psi(z)) \text{ и } a_n = \psi(d_n) \implies \begin{cases} \delta_{-1} = i\gamma_{-1}, \delta_n = t_0 \dots t_n \gamma_n, t_n := \frac{1-a_n}{1-\bar{a}_n}, \\ \eta_{2n}(z) = i\zeta_{2n}(\psi(z)) \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть непрерывная дробь $\frac{A_3}{B_3}$ такова, что

$$\operatorname{Im} \delta_{-1} > 0, \quad |\delta_n| < 1, \quad n = 0, 1, \dots$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_{2n}(z) = G(z), \quad z \in \mathbb{C}_+,$$

локально равномерно в $\mathbb{C}_+$, $G(z)$ – функция Каратеодори. При этом

1°. Если лежащие в $\mathbb{C}_+$ точки $d_0, d_1, \dots$ имеют предельное распределение такое, что

$$\frac{\xi_{d_0} + \dots + \xi_{d_{n-1}}}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{*} \theta,$$

θ – вероятностная мера с носителем на компакте, лежащем в $\mathbb{C}_+$, и

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=0}^n (1 - |\delta_n|)^{1/n} = 1.$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_{2n}(z) = G(z), \quad z \in \mathbb{C}_+,$$

лок. равномерно в $\mathbb{C}_+$, $G(z)$ – функция Неванлинны такая, что $\operatorname{supp} \sigma = \overline{\mathbb{R}}$.

2°. Если лежащие в $\mathbb{C}_+$ точки $d_0, d_1, \dots$ и коэффициенты $\delta_{-1}, \delta_0, \dots$ имеют периодические с периодом $q \in \mathbb{N}$ пределы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_{nq+p} = d^p, \quad d^p \in \mathbb{C}_+, \quad p = 1, \dots, q,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_{nq+p} = \delta^p, \quad |\delta^p| < 1, \quad p = 1, \dots, q,$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n(z) = \mathbf{G}(z) = \operatorname{Re} \mathbf{G}(i) + \int_{\Delta \cup \tilde{\Delta}} \frac{1+uz}{u-z} d\sigma(u), \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta,$$

лок. равномерно в сферической метрике в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta$, где мера σ такова, что

$$\operatorname{supp} \sigma = \Delta \cup \tilde{\Delta} \subseteq \overline{\mathbb{R}},$$

$\tilde{\Delta}$ – множество полюсов функции $\mathbf{G}(z)$,

Δ – объединение не более, чем q отрезков на $\overline{\mathbb{R}}$,

$$\Delta := \left\{ z \in \overline{\mathbb{C}} : \frac{I^2(z)}{\prod_{p=1}^q (z - d^p)(z - \bar{d}^p)} \in [0, 4 \prod_{p=1}^n (1 - |\delta^p|^2)] \right\},$$

$I(z)$ – след матрицы

$$\begin{pmatrix} (z - d^1) & \delta^0(z - \bar{d}^1) \\ \bar{\delta}^0(z - d^1) & (z - \bar{d}^1) \end{pmatrix} \times \dots \times \begin{pmatrix} (z - d^q) & \delta^{q-1}(z - \bar{d}^q) \\ \bar{\delta}^{q-1}(z - d^q) & (z - \bar{d}^q) \end{pmatrix}, \quad \delta^0 := \delta^q$$

ЛЕММА.

$$\pi_n(z) \rightrightarrows \mathbf{G}(z), \quad n \rightarrow \infty, \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta^*,$$

локально равномерно в сферической метрике в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta^*$, где $\mathbf{G}(z)$ – функция, мероморфная в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$,

$$\Delta^* := \left\{ z \in \overline{\mathbb{C}} : \frac{I^2(z)}{\prod_{p=1}^q (z - d^p)(z - \bar{d}^p)} \in [0, 4 \prod_{p=1}^n (1 - |\delta^p|^2)] \right\},$$

$I(z)$ – след матрицы

$$\begin{pmatrix} (z - d^1) & \delta^0(z - \bar{d}^1) \\ \bar{\delta}^0(z - d^1) & (z - \bar{d}^1) \end{pmatrix} \times \cdots \times \begin{pmatrix} (z - d^q) & \delta^{q-1}(z - \bar{d}^q) \\ \bar{\delta}^{q-1}(z - d^q) & (z - \bar{d}^q) \end{pmatrix}, \quad \delta^0 := \delta^q$$

Компакт Γ не содержит точек $d^1, \bar{d}^1, \dots, d^q, \bar{d}^q$ и состоит из не более, чем q аналитических дуг в $\overline{\mathbb{C}}$.

ТЕОРЕМА ШУРА.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi_{2n}(z) = G(z), \quad z \in \mathbb{C}_+ \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_{2n+1}(z) = \overline{G(\bar{z})}, \quad z \in \mathbb{C}_-.$$

$$\mathbf{G}(z) = \operatorname{Re} \mathbf{G}(i) + \int_{\operatorname{supp} \sigma} \frac{1 + uz}{u - z} d\sigma(u), \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \operatorname{supp} \sigma.$$

Положим

$$\operatorname{supp} \sigma := \Delta \cup \tilde{\Delta},$$

где Δ – объединение всех не вырождающихся в точку отрезков, лежащих в $\operatorname{supp} \sigma$, $\tilde{\Delta} = \operatorname{supp} \sigma \setminus \Delta$.

Докажем, что $\Delta = \Delta^*$, $\tilde{\Delta}$ – множество полюсов $G(z)$. Для этого достаточно доказать, что $G(z)$ не имеет мероморфного продолжения ни через какую сколь угодно малую дугу на Δ^* .

ЛЕММА. Пусть E – компакт в $\mathbb{C}_+$, содержащий (предельно периодические) точки $d_1, d_2, \dots$, $\bar{E} := \{z : \bar{z} \in E\}$, $\mathbf{E} := E \cup \bar{E}$, $f(z) \in H(\mathbf{E})$.

Тогда для всякого компакта $K \subset \overline{\mathbb{C}}$, не пересекающегося с $\mathbf{E}$, состоящего из конечного числа континуумов и такого, что $f(z)$ допускает мероморфное продолжение во все связанные компоненты $\overline{\mathbb{C}} \setminus K$, имеющие непустое пересечение с $\mathbf{E}$, выполняется неравенство

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \det \left(\oint_{\mathbf{E}} \frac{f(z) z^{j+k-2}}{\prod_{p=1}^n (z - d_p)(z - \bar{d}_p)} dz \right)_{j,k=1,\dots,n} \right|^{1/n^2} \leq \mathbf{d}_\varphi K,$$

где

$$\mathbf{d}_\varphi K := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\max_{z_1, \dots, z_n \subset K} \prod_{1 \leq q < r \leq n} |z_q - z_r| e^{-(\varphi(z_q) + \varphi(z_r))} \right)^{2/(n-1)n}$$

– трансфинитный диаметр компакта K во внешнем поле

$$\varphi(z) = \frac{1}{2q} \sum_{p=1}^q (\log |z - d^p| + \log |z - \bar{d}^p|).$$

ЛЕММА.

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \det \left(\oint_{\mathbf{E}} \frac{\mathbf{G}(z) z^{j+k-2}}{\prod_{p=1}^n (z - d_p)(z - \bar{d}_p)} dz \right)_{j,k=1,\dots,n} \right|^{1/n^2} = \prod_{p=1}^q \frac{(1 - |\delta^p|^2)^{1/2q}}{|I(d_p)|^{1/q^2}}.$$

ЛЕММА.

$$\mathbf{d}_\varphi \Gamma = \prod_{p=1}^q \frac{(1 - |\delta^p|^2)^{1/2q}}{|I(d_p)|^{1/q^2}}.$$

Если допустить, что функция $\mathbf{G}(z)$ имеет мероморфное продолжение через сколь-угодно малую дугу $U = \Gamma \cap \{|z - z_0| < \varepsilon\}$, $z_0 \in \Gamma$, $\varepsilon > 0$, то получим противоречие, так как

$$\begin{aligned} \prod_{p=1}^q \frac{(1 - |\delta^p|^2)^{1/2q}}{|I(d_p)|^{1/q^2}} &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \det \left(\oint_{\mathbf{E}} \frac{G(z) z^{j+k-2} dz}{\prod_{p=1}^n (z - d_p)(z - \bar{d}_p)} \right)_{j,k=1,\dots,n} \right|^{1/n^2} \\ &\leq \mathbf{d}_\varphi(\Gamma \setminus U) < \mathbf{d}_\varphi \Gamma = \prod_{p=1}^q \frac{(1 - |\delta^p|^2)^{1/2q}}{|I(d_p)|^{1/q^2}}. \end{aligned}$$

Следовательно, функция $\mathbf{G}(z)$ мероморфна вне Γ и не может иметь мероморфного продолжения ни через какую сколь-угодно малую дугу, лежащую на Γ .

Так как функция $\mathbf{G}(z)$ мероморфна вне $\Gamma \cap \Delta$ и не может иметь мероморфного продолжения ни через какую сколь-угодно малую дугу, лежащую на $\Gamma \cup \Delta$, то $\Gamma = \Delta$ и $\tilde{\Delta}$ – множество полюсов $G(z)$.