

Обращение преобразования Абеля–Прима при наличии дополнительной инволюции

О.К.Шейнман

МИАН

Научная сессия МИАН,
посвященная подведению итогов 2025 года
18 ноября 2025 г.

Преобразование Абеля–Прима

Σ – гладкая проективная кривая / $\mathbb{C}$ рода g ,

$\tau : \Sigma \rightarrow \Sigma$ – голоморфная инволюция.

Дифференциалы Прима: $\tau^*\omega = -\omega$.

$h = \dim\{\text{дифференциалов Прима}\}$

τ -инвариантный базис циклов:

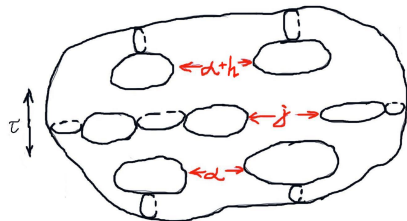
$$a_\alpha + \tau(a_{\alpha+h}) = b_\alpha + \tau(b_{\alpha+h}) = 0$$

$$a_j + \tau(a_j) = b_j + \tau(b_j) = 0$$

Нормализованные дифференциалы Прима: ω_α, ω_j , т.ч.

$$\oint_{a_\beta} \omega_\alpha = 2\pi i \delta_{\alpha,\beta}, \quad \oint_{a_k} \omega_j = 2\pi i \delta_{k,j}, \quad \oint_{a_j} \omega_\alpha = \oint_{a_\alpha} \omega_j = 0.$$

Отображение Абеля–Прима: $A(\zeta_1 + \dots + \zeta_h) = \sum_{k=1}^h \int^{\zeta_k} \begin{pmatrix} \omega_\alpha \\ \omega_j \end{pmatrix}$



Многообразие и θ -функция Прима

Матрица Прима:

$$\Pi = \left(\begin{array}{c|c} \Pi_{\alpha\beta} & \Pi_{\alpha j} \\ \hline \Pi_{i\beta} & \Pi_{ij} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} \int_{b_\beta} \omega_\alpha & \frac{1}{2} \int_{b_j} \omega_\alpha \\ \hline \int_{b_\beta} \omega_i & \frac{1}{2} \int_{b_j} \omega_i \end{array} \right).$$

Многообразие Прима:

$$\begin{array}{ccc} \text{Div}(\Sigma) & \xrightarrow{\text{Abel-Prym map}} & \mathbb{C}^h / \mathbb{Z}(2\pi i E, \Pi) \\ \text{Abel map} \downarrow & & \downarrow \text{pr} \\ \text{Jac}(\Sigma) & \xrightarrow{\text{alternation}} & \text{Prym}(\Sigma) \end{array}$$

θ -функция Прима:

$$\theta(z, \Pi) = \sum_{N \in \mathbb{Z}^h} \exp\left(\frac{1}{2} N^T \Pi N + N^T z\right), \quad z \in \mathbb{C}^h.$$

Обращение Якоби и теорема Римана о нулях

Проблема обращения отображения Абеля известна как проблема обращения Якоби. Её решение даётся теоремой Римана: прообраз общей точки $\phi \in \text{Jac}(\Sigma)$ – это дивизор ζ нулей функции $F(P) = \theta(\mathcal{A}(P) - \phi + \Delta)$, $P \in \Sigma$, $\deg \zeta = g$ ($g = \text{genus}(\Sigma)$, θ – тэта-функция Римана).

Теорема Абеля–Якоби: $\text{Sym}^g(\Sigma) \simeq \text{Jac}(\Sigma)$.

Теорема Римана для приммианов: прообраз общей точки $\phi \in \mathbb{Z}(2\pi iE, \Pi)$ – это дивизор ζ нулей функции $F(P) = \theta(\mathcal{A}(P) - \varepsilon^{-1}(\phi - \Delta))$, $P \in \Sigma$, $\deg \zeta = 2h$, $\mathcal{A}(\zeta) + \mathcal{A}(\tau\zeta) = 2\Delta$ ($h = \dim \text{Prum}(\Sigma)$, θ – тэта-функция Прима, $\mathcal{A}$ – преобразование Абеля–Прима, $\varepsilon = \text{diag}(\varepsilon_\alpha, \varepsilon_j)$, $\varepsilon_\alpha = \text{id}$, $\varepsilon_j = 2 \cdot \text{id}$).

Проблема обращения и кривые с двумя инволюциями

Вообще говоря,

на примианах нет аналога обращения Якоби

Действительно,

число нулей функции $F(P) = \theta(\mathcal{A}(P) - \varepsilon(\phi - \Delta))$ вдвое больше, чем размерность примиана.

Пусть на Σ имеется пара коммутирующих голоморфных инволюций τ_1, τ_2 , таких что дифференциалы Прима относительно τ_1 инвариантны относительно τ_2 . Назовём тройку (Σ, τ_1, τ_2) кривой с парой инволюций типа 1.

Аналог теоремы Абеля–Якоби для примианов

Теорема 1 (Sh'25). Пусть (Σ, τ_1, τ_2) – кривая с парой инволюций типа 1, $\Sigma_i = \Sigma/\tau_i$, $\text{Prym}_i(\Sigma)$ – примиаан Σ относительно τ_i , $h_i = \dim \text{Prym}_i(\Sigma)$, Π_i – соответствующая матрица Прима. Тогда

- отображение Абеля–Прима устанавливает взаимно однозначное соответствие между неспециальными τ_2 -инвариантными дивизорами степени $2h_1$ на Σ и открытым плотным подмножеством в $\mathbb{C}^{h_1}/\mathbb{Z}(2\pi iE, \Pi_1)$.
- в зависимости от типов ветвления $\Sigma \rightarrow \Sigma_i$ ($i = 1, 2$), встречаются следующие случаи:

$$\text{Prym}_1(\Sigma) \simeq \text{Sym}^{h_1} \Sigma_2 \quad \text{или} \quad \text{Prym}_1(\Sigma) \simeq (\text{Sym}^{h_1} \Sigma_2)/\mathbb{Z}_2,$$

где $\simeq$ обозначает бирациональную эквивалентность.

Типы ветвления и уточнение теоремы 1

Пусть $2n_1, 2n_2$ – степени дивизоров ветвления.

Лемма. В условиях Теоремы 1 возможны четыре случая:

1°. $n_1 = n_2 = 1$: $g(\Sigma)$ чётен, $g_1 = g_2 = h_1 = h_2 = g(\Sigma)/2$.

2°. $n_1 = 2, n_2 = 0$: $g(\Sigma)$ нечётен, $g_1 = g_2 - 1, h_1 = g_2, h_2 = g_1$.

3°. $n_1 = 0, n_2 = 2$: $g(\Sigma)$ нечётен, $g_1 = g_2 + 1, h_1 = g_2, h_2 = g_1$.

4°. $n_1 = n_2 = 0$: $g_1 = g_2 := \tilde{g}, g(\Sigma) = 2\tilde{g} - 1$ (нечётен),
 $h_1 = h_2 = \tilde{g} - 1$.

В случае 2° $\text{Prym}_1(\Sigma) \simeq (\text{Sym}^{h_1} \Sigma_2)/\mathbb{Z}_2$, в остальных случаях $\text{Prym}_1(\Sigma) \simeq \text{Sym}^{h_1} \Sigma_2$.

Сопоставление с теоремой В.В.Шокурова'83

Теорема Шокурова даёт необходимые и достаточные условия того, что примиан, как главнополяризованное абелево многообразие, изоморфен якобиану некоторой кривой, или прямой сумме якобианов. Такая возможность возникает в случаях 1, 2 и 3 леммы, так как в них $h_1 = g_2$, следовательно $\text{Sym}^{h_1} \Sigma_2 \cong \text{Jac}(\Sigma_2)$. В случае 2 имеется 4 точки ветвления, то есть примиан не является главнополяризованным. Случай 1 тоже отпадает, так как теорема Ш. доказана в предположении, что особые точки кривой – это в точности неподвижные точки инволюции, а у нас кривая гладкая, а неподвижных точек две. Остаётся случай 3, в котором из теоремы Ш. следуют ограничения на кривую Σ_1 : она либо гиперэллиптическая, либо тригональная, либо плоская квинтика.

Системы Хитчина с группой $SO(4)$ на кривых рода 2

Базовая кривая: $y^2 = P_5(x)$. Спектральная кривая:

$$\lambda^4 + (H_0 + H_1x + H_2x^2)\lambda^2 + (H_3 + H_4x + H_5x^2)^2 = 0, \quad y^2 = P_5(x).$$

Пара инволюций типа 1: $\tau_1 : \lambda \rightarrow -\lambda, y \rightarrow y, \tau_2 : \lambda \rightarrow -\lambda, y \rightarrow -y$.

Фазовое пространство: дивизоры степени 6 на спектральной кривой: $\zeta = \zeta_1 + \dots + \zeta_6, \zeta_1 = (\lambda_1, x_1, y_1), \dots, \zeta_6 = (\lambda_6, x_6, y_6)$.

Гамильтонианы: функции $H_j = H_j(\zeta_1, \dots, \zeta_6)$, находятся из условия прохождения спектр. кривой через точки (λ_i, x_i, y_i) .

Система разрешима в радикалах (П.Борисова '2020).

Симплектическая форма: $\omega = \sum_{i=1}^6 d\lambda_i \wedge \frac{dx_i}{y_i}$.

Решения: $\zeta(t) = \mathcal{A}^{-1}((c_1 t + c_0)/\mathbb{Z}(2\pi i E, \Pi_1)), c_0, c_1 \in \mathbb{C}^6$.

Вычисление симметрических функций точек прообраза в случае накрытий над $\mathbb{CP}^1$

Теорема 2 (Sh'24). Для $\phi \in \mathbb{Z}(2\pi iE, \Pi_1)$ разобьём $\mathcal{A}^{-1}(\phi)$ на h_1 пар точек, в каждой из которых элементы связаны инволюцией τ_2 . Пусть $x_1, \dots, x_{h_1}$ – проекции этих пар на $\mathbb{CP}^1$. Определим функции $\sigma_k(\phi) = x_1^k + \dots + x_{h_1}^k$. Тогда

$$\sigma_k(\phi) = c - \sum_{Q \in \pi^{-1}(\infty)} \sum_{i=1}^{h_1} D_{iQ} \ln \theta(\mathcal{A}(Q) - \phi + \Delta),$$

где D_{iQ} – дифференциальный оператор по ϕ , коэффициенты которого явно вычисляются через разложения Тэйлора базисных дифференциалов в Q , $c \in \mathbb{C}$, $\Delta \in \mathbb{C}^{h_1}$ – константы.

Для якобианов и $k = 1, 2$ – Б.Дубровин'81.

Спасибо за внимание