Решения ассоциативного уравнения Янга-Бакстера, связанные с супералгебрами Ли

Мария Матушко

Математический институт им. Стеклова РАН

Научная сессия МИАН
18.11.2025

Пусть A — ассоциативная алгебра и $R(\hbar, u)$ – мероморфная функция комплексных переменных $(\hbar, u)$, принимающая значения в $A \otimes A$.

Ассоциативным уравнением Янга-Бакстера называется следующее уравнение в $A \otimes A \otimes A$:

$$R_{12}(x,u)R_{23}(y,v) - R_{13}(y,u+v)R_{12}(x-y,u) - R_{23}(y-x,v)R_{13}(x,u+v) = 0\,.$$

Пример:

$A = \mathrm{End}(\mathbb{C}^{\mathrm{N}})$, $P_{12} = \sum_{i,j=1}^{N} e_{ij} \otimes e_{ji} \in A \otimes A$ — оператор перестановки.

$$R_{12}(\hbar, u) = \frac{\mathrm{Id}_{12}}{\hbar} + \frac{P_{12}}{u}$$

Ассоциативное уравнение Янга-Бакстера

В скалярном случае $A = \mathrm{End}(\mathbb{C})$ ассоциативное уравнение Янга-Бакстера записывается как функциональное уравнение, еще известное как тождество Фея рода 1:

$$\phi(x,u)\phi(y,v) - \phi(y,u+v)\phi(x-y,u) - \phi(y-x,v)\phi(x,u+v) = 0\,.$$

В эллиптическом случае его решение задается эллиптической функцией Кронекера:

$$\phi(\hbar,u) = \frac{\theta'(0)\theta(u+\hbar)}{\theta(\hbar)\theta(u)} \stackrel{trig}{\rightarrow} \pi\cot(\pi u) + \pi\cot(\pi\hbar) \stackrel{rat}{\rightarrow} \frac{1}{u} + \frac{1}{\hbar}\,.$$

где $\theta(z) = \theta_{11}(z|\tau)$ — нечетная тета-функция Якоби.

Матричным обобщением является $\phi(\hbar,u)$ квантовая эллиптическая R-матрица Бакстера-Белавина.

Ассоциативное уравнение Янга-Бакстера

Будем называть ассоциативным уравнением Янга-Бакстера следующее уравнение:

$$R_{12}^{x}(u_1,u_2)R_{23}^{y}(u_2,u_3) - R_{13}^{y}(u_1,u_3)R_{12}^{x-y}(u_1,u_2) - R_{23}^{y-x}(u_2,u_3)R_{13}^{x}(u_1,u_3) = 0\,.$$

В $R_{ij}^{h}(u_i,u_j)$ параметр $\hbar$ играет роль постоянной Планка, а u_i, u_j — спектральных параметров.

Положив $R_{ij}^{\hbar}(u_i,u_j) := R_{ij}(\hbar, u_i - u_j)$, $u = u_1 - u_2$ и $v = u_2 - u_3$, получим ассоциативное уравнение Янга-Бакстера с первого слайда, где решение зависит от разности спектральных параметров.

К классическому уравнению Янга-Бакстера

Пусть некоторое решение ассоциативного уравнения Янга-Бакстера удовлетворяет условию:

$$R^{\hbar}_{12}(u,v) = -R^{-\hbar}_{21}(v,u)$$

и имеет разложение в окрестности $h = 0$ вида:

$$R^{\hbar}_{12}(u,v) = \frac{1}{\hbar} + r_{12}(u,v) + \hbar\, m_{12}(u,v) + O(\hbar^2),$$

тогда $r_{12}(u,v)$ — антисимметричное ($r_{12}(u,v) = -r_{21}(v,u)$) решение классического уравнения Янга-Бакстера:

$$[r_{12}(u,v), r_{13}(u,w)] + [r_{12}(u,v), r_{23}(v,w)] + [r_{13}(u,w), r_{23}(v,w)] = 0.$$

Доказательство. Из ассоциативного уравнения ЯБ:

$$\mathrm{r}_{12}(u,v)\mathrm{r}_{23}(v,w) - \mathrm{r}_{13}(u,w)\mathrm{r}_{12}(u,v) - \mathrm{r}_{23}(v,w)\mathrm{r}_{13}(u,w) = -\mathrm{m}_{12}(u,v) - \mathrm{m}_{23}(v,w) - \mathrm{m}_{13}(u,w).$$

Делая замену индексов $2 \leftrightarrow 3$ и параметров $v \leftrightarrow w$ получаем:

$$\mathrm{r}_{13}(u,w)\mathrm{r}_{32}(w,v) - \mathrm{r}_{12}(u,v)\mathrm{r}_{13}(u,w) - \mathrm{r}_{32}(w,v)\mathrm{r}_{12}(u,v) = -\mathrm{m}_{13}(u,w) - \mathrm{m}_{32}(w,v) - \mathrm{m}_{12}(u,v).$$

К квантовому уравнению Янга-Бакстера

Если решение $R^\hbar(u,v)$ ассоциативного уравнения Янга-Бакстера удовлетворяет унитарности

$$R^\hbar_{12}(u,v)R^\hbar_{21}(v,u) = f^\hbar(u,v)\,\mathrm{Id}$$

с симметричной функцией $f^\hbar(u,v) = f^\hbar(v,u)$ и условию кососимметричности

$$R^\hbar_{12}(u,v) = -R^{-\hbar}_{21}(v,u),$$

то оно является решением квантового уравнения Янга-Бакстера:

$$R^\hbar_{12}(u,v)R^\hbar_{13}(u,w)R^\hbar_{23}(v,w) = R^\hbar_{23}(v,w)R^\hbar_{13}(u,w)R^\hbar_{12}(u,v)\,.$$

Приложения ассоциативного уравнения Янга-Бакстера

- Изначально появилось без параметров как соотношение $r_{ij}r_{jk} + r_{ik}r_{ji} + r_{jk}r_{ki} = 0$ в квадратичной алгебре [Fomin, Kirillov 99] в контексте исчисления Шуберта.
- биалгебры и алгебры Хопфа [Aguiar 01]
- версия с параметрами [Polishchuk 02] в геометрическом контексте, классификация тригонометричсеких решений [Shedler 03]
- приложения к интегрируемым системам: R-матричные пары Лакса [Levin, Olshanetsky, Zotov 14], системы взаимодействующих волчков [Krasnov, Zotov 18], спиновые цепочки [Sechin, Zotov 18], [M.M. Zotov 23]

$\mathbb{Z}_2$-градуированные алгебры. Супералгебра Ли.

Супералгеброй называется $\mathbb{Z}_2$-градуированная алгебра $A = A_{\bar{0}} \oplus A_{\bar{1}}$, что означает: если $a \in A_\alpha$, $b \in A_\beta$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$, то $ab \in A_{\alpha+\beta}$.
Если $a \in A_\alpha$, то a — однородный элемент степени α. Элементы $A_{\bar{0}}$ называются четными, а элементы $A_{\bar{1}}$ нечетными.

Супералгеброй Ли называется супералгебра $G = G_{\bar{0}} \oplus G_{\bar{1}}$ с билинейной операцией [,], удовлетворяющей аксиомам:

$$[a, b] = -(-1)^{\alpha\beta}[b, a] \text{ для } a \in G_\alpha, b \in G_\beta\,,$$

$$[a, [b, c]] = [[a, b], c] + (-1)^{\alpha,\beta}[b, [a, c]] \text{ для } a \in G_\alpha, b \in G_\beta, .$$

Естественный способ ввести такую операцию в супералгебре как суперкоммутатор: $[a, b] = ab - (-1)^{\deg a \deg b}\, ba\,.$

Тензорное произведение супералгебр

Пусть A и B — супералгебры. Их тензорное произведение $A \otimes B$ — супералгебра, векторное пространство, которой определяется как тензорное произведение соответсвующих пространств A и B с индуцированной $\mathbb{Z}_2$-градуировкой и операцией умножения:

$$(a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2) = (-1)^{\deg b_2 \deg a_1} a_1 a_2 \otimes b_1 b_2, \text{ где } a_i \in A, b_i \in B$$

$$\deg(a \otimes b) = \deg a + \deg b\,.$$

Супералгебра Ли $\mathrm{gl}(N|M)$

Рассмотрим $\mathbb{Z}_2$-градуированное векторное пространство $\mathbb{C}^{N|M} = \mathbb{C}^N \oplus \mathbb{C}^M$ с градуировкой

$$p_i = \begin{cases} 0 & \text{for } 1 \leq i \leq N, \\ 1 & \text{for } N < i \leq N+M. \end{cases}$$

Обозначим через e_{ij} генераторы супералгебры Ли $\mathrm{gl}(N|M)$, $\deg e_{ij} = p_i + p_j$. Элементы e_{ij} рассматриваются как элементарные матричные единицы, действующие на пространстве $\mathbb{C}^{N|M}$.
Тензорное произведение $\mathrm{gl}(N|M) \otimes \mathrm{gl}(N|M)$ — супералгебра с индуцированной $\mathbb{Z}_2$-градуировкой и умножением в $\mathbb{C}^{N|M} \otimes \mathbb{C}^{N|M}$ определенным как

$$(\mathrm{Id} \otimes e_{ij})(e_{kl} \otimes \mathrm{Id}) = (-1)^{(p_i+p_j)(p_k+p_l)} e_{kl} \otimes e_{ij}.$$

Рациональная R-матрица $\mathrm{gl}(N|M)$

Обозначим $P_{12} = \sum\limits_{i,j=1}^{N+M} (-1)^{p_j} e_{ij} \otimes e_{ji}$ — оператор перестановки, действующий в $\mathbb{C}^{N|M} \otimes \mathbb{C}^{N|M}$.

Рациональная R-матрица $\mathrm{gl}(N|M)$:

$$R^{\hbar}_{12}(u, v) = \frac{\mathrm{Id}_{12}}{\hbar} + \frac{P_{12}}{u - v}$$

удовлетворяет ассоциативному уравнению Янга-Бакстера, квантовому уравнению Янга-Бакстера.

Тригонометрическое решение ассоциативного уравнения Янга-Бакстера

[M.M., Zotov 2024]

$$R^{\hbar}_{12}(u,v) = \pi \sum_{a=1}^{N+M} \Big((-1)^{p_a} \cot(\pi(u-v)) + \cot(\pi\hbar) \Big) e_{aa} \otimes e_{aa} +$$

$$+\pi \sum_{a\neq c}^{N+M} e_{aa} \otimes e_{cc} \frac{\exp\left(\frac{\pi\imath\hbar}{N+M} \Big(2(a-c) - (N+M)\mathrm{sign}(a-c) \Big) \right)}{\sin(\pi\hbar)} +$$

$$+\pi \sum_{a\neq c}^{N+M} (-1)^{p_c} e_{ac} \otimes e_{ca} \frac{\exp\left(\frac{\pi\imath(u-v)}{N+M} \Big(2(a-c) - (N+M)\mathrm{sign}(a-c) \Big) \right)}{\sin(\pi(u-v))} .$$

Примеры суперсимметричных R-матриц

Пример $\mathrm{GL}(2)$ (6-вершинная R-матрица):

$$R^{\hbar}_{12}(z) = \pi\Big(\cot(\pi z) + \coth(\pi\hbar)\Big)\Big(e_{11}\otimes e_{11} + e_{22}\otimes e_{22}\Big) +$$

$$+\frac{\pi}{\sin(\pi\hbar)}\Big(e_{11}\otimes e_{22} + e_{22}\otimes e_{11}\Big) + \frac{\pi}{\sin(\pi z)}\Big(e_{12}\otimes e_{21} + e_{21}\otimes e_{12}\Big)\,.$$

Пример $\mathrm{GL}(1|1)$:

$$R^{\hbar}_{12}(z) = \pi\Big(\cot(\pi z) + \coth(\pi\hbar)\Big)e_{11}\otimes e_{11} + \pi\Big(-\cot(\pi z) + \coth(\pi\hbar)\Big)e_{22}\otimes e_{22}$$

$$+\frac{\pi}{\sin(\pi\hbar)}\Big(e_{11}\otimes e_{22} + e_{22}\otimes e_{11}\Big) + \frac{\pi}{\sin(\pi z)}\Big(-e_{12}\otimes e_{21} + e_{21}\otimes e_{12}\Big)\,.$$

Спиновые цепочки. Пример $GL(1|1)$

По решениям ассоциативного уравнения Янга-Бакстера можно строить интегрируемые спиновые цепочки. Гамильтониан задается формулой:

$$H = \sum_{k<i}^{L} R_{i-1,i} \ldots R_{k+1,i} R_{k,i} F_{i,k} R_{i,k+1} \ldots R_{i,i-1}\,,$$

где используются короткие обозначения $F^{\hbar}_{ij}(z) = \partial_z R^{\hbar}_{ij}(z)$, $F_{ij} = F^{\hbar}_{ij}(x_i - x_j)$ и $R_{ij} = R^{\hbar}_{ij}(x_i - x_j)$, $x_k = \frac{k}{N}$.
В нерелятивистском пределе получается Гамильтониан спиновой цепочки

$$\lim_{\hbar\to 0} \frac{1}{\hbar} H = \pi^2 \sum_{k<i}^{L} \frac{1}{\sin^2(\pi(x_i - x_k))} \Big(e_{11} \otimes e_{22} + e_{22} \otimes e_{11} + 2e_{22} \otimes e_{22} \Big) +$$

$$+\pi^2 \sum_{k<i}^{L} \frac{\cos(\pi(x_i - x_k))}{\sin^2(\pi(x_i - x_k))} \Big(e_{12} \otimes e_{21} - e_{21} \otimes e_{12} \Big)\,,$$

являющейся суперсимметричной версией спиновой цепочки [Fukui, Kawakami 96], [Sechin, Zotov 18].

Пусть теперь индексы i, j принимают значения $\pm 1, \ldots, \pm N$, а индексы a, b — $1, \ldots, N$. Рассмотрим $\mathbb{Z}_2$-градуированное векторное пространство $\mathbb{C}^{N|N} = \mathbb{C}^N \oplus \mathbb{C}^N$ с градуировкой:

$$p_i = \begin{cases} 0 \text{ для } 1 \leq i \leq N, \\ 1 \text{ для } -N \leq i \leq -1. \end{cases}$$

Обозначим

$$J = \sum_i e_{i,-i} (-1)^{p_i},$$

заметим, что $J^2 = -\mathrm{Id}$ и $\deg(J) = 1$. Пусть $Q(N) \subset \mathrm{End}(\mathbb{C}^{\mathrm{N|N}})$ — централизатор J, он порожден элементами

$$e_{ab} + e_{-a,-b}, \qquad e_{a,-b} + e_{-a,b}.$$

$Q(N)$ может рассматриваться как супералгебра Ли $\mathfrak{q}_N$ и называется "квир"супералгебра Ли. $\mathfrak{q}_N$ определяется как подалгебра неподвижных точек в $\mathfrak{gl}_{N|N}$ относительно инволютивного автоморфизма $\eta : e_{i,j} \to e_{-i,-j}$.

Квантовая R-матрица супералгебры $\mathfrak{q}_N$

Функция

$$R^{\hbar}_{12}(u,v) = \frac{1}{\hbar} + \frac{P_{12}}{u-v} + (\mathrm{Id}\otimes\eta)\frac{P_{12}}{u+v} =$$

$$= \frac{1}{\hbar} + \sum_{i,j} e_{ij}\otimes e_{ji}\frac{(-1)^{p_j}}{u-v} + \sum_{i,j} e_{ij}\otimes e_{-j,-i}\frac{(-1)^{p_j}}{u+v}$$

— решение квантового уравнения Янга-Бакстера [Nazarov 92].

Свойства

- унитарность: $R^{\hbar}_{12}(u,v)R^{\hbar}_{21}(v,u) = \left(\frac{1}{\hbar^2} - \frac{1}{(u-v)^2} - \frac{1}{(u+v)^2}\right)\mathrm{Id}$
- кососимметричность: $R^{\hbar}_{12}(u,v) = -R^{-\hbar}_{21}(v,u)$,
- удовлетворяет ассоциативному уравнению Янга-Бакстера [M.M. 25]

Тригонометрическое решение ассоциативного и квантового уравнения Янга-Бакстера, связанное с $\mathfrak{q}_N$

$$\mathrm{R}^{\hbar}_{12}(u,v) = \pi \sum_i \Big((-1)^{p_i} \cot(\pi(u-v)) + \cot(\pi\hbar) \Big) e_{ii} \otimes e_{ii} +$$

$$\pi \sum_i \Big((-1)^{p_i} \cot(\pi(u+v)) + \cot(\pi\hbar) \Big) e_{ii} \otimes e_{-i,-i} +$$

$$+\pi \sum_{|i|\neq|j|} e_{ii} \otimes e_{jj} \frac{\exp\left(\frac{\pi\imath\hbar}{N}\Big((|i|-|j|) - N\mathrm{sign}\,(|i|-|j|) \Big)\right)}{\sin(\pi\hbar)} +$$

$$+\pi \sum_{i\neq j} (-1)^{p_j} e_{ij} \otimes e_{ji} \frac{\exp\left(\frac{\pi\imath(u-v)}{N}\Big((i-j) - N\mathrm{sign}(i-j) \Big)\right)}{\sin(\pi(u-v))} +$$

$$+\pi \sum_{i\neq j} (-1)^{p_j} e_{i,j} \otimes e_{-j,-i} \frac{\exp\left(\frac{\pi\imath(u+v)}{N}\Big((i-j) - N\mathrm{sign}(i-j) \Big)\right)}{\sin(\pi(u+v))}.$$

Тригонометрическое решение квантового уравнения Янга-Бакстера без спектральных параметров

Пусть

$$S^{\hbar}_{12} = \sum_{i \le j} e_{ij} \otimes s_{ij} \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^{\mathrm{N}|\mathrm{N}}) \otimes \mathrm{Q}(\mathrm{N}),$$

где

$$s_{aa} = 1 + (q-1)(e_{aa} + e_{-a,-a}) \qquad s_{-a,-a} = 1 + (q^{-1}-1)(e_{aa} + e_{-a,-a})$$

$$s_{ab} = (q - q^{-1})(e_{ba} + e_{-b,-a}), \;\; s_{-b,-a} = -(q - q^{-1})(e_{ba} + e_{-b,-a}), \;\; a < b$$

$$s_{-a,b} = -(q - q^{-1})(e_{b,-a} + e_{-b,a}).$$

$S^{\hbar}$ удовлетворяет квантовому уравнению Янга-Бакстера:
$S^{\hbar}_{12} S^{\hbar}_{13} S^{\hbar}_{23} = S^{\hbar}_{23} S^{\hbar}_{13} S^{\hbar}_{12}$ [Ольшанский 92].

Это решение не зависит от спектральных параметров, а зависит от $q = \exp \pi \imath \hbar$.

Преобразование твиста

Пусть $F^{\hbar}_{12} \in Q(N) \otimes Q(N)$:

$$F^{\hbar}_{12} = \sum_{a,b=1}^{N} \exp\left(\frac{\pi\imath\hbar\left((a-b) - N\mathrm{sign}(a-b)\right)}{2N}\right)(e_{aa} + e_{-a,-a}) \otimes (e_{bb} + e_{-b,-b})$$

и $\tilde{S}^{\hbar}_{12} = F_{12}(\hbar) S^{\hbar}_{12} F^{-1}_{21}(\hbar)$.

Тогда $\tilde{S}^{\hbar}_{12}$ удовлетворяет квантовому и ассоциативному уравнению Янга-Бакстера без параметров:

$$\tilde{S}^{x}_{12}\tilde{S}^{y}_{23} - \tilde{S}^{y}_{13}\tilde{S}^{x-y}_{12} - \tilde{S}^{y-x}_{23}\tilde{S}^{x}_{13} = 0.$$

Как ввести спектральные параметры?

Супералгебры $\mathfrak{q}_N$ обладает замечательным свойством, справедлива дуальность Шура-Вейля с алгеброй Сергеева: полупрямое произведение симметрической группы S_N и алгебры Клиффорда из N элементов: $c_i c_j = -c_j c_i$ и $c_j^2 = -1$, $i, j = 1 \ldots N$.

В аффинной алгебре Сергеева можно построить набор элементов, который удовлетворяет уравнению Янга-Бакстера [Jones, Nazarov 99]. Благодаря этой связи тригонометрическое решение, удовлетворяющее квантовому и ассоциативному уравнению Янга-Бакстера со спектральными параметрами [M.M. 25], записывается в виде:

$$R_{12}^{\hbar}(u, v) = \frac{1}{\sin(\pi\hbar)} \tilde{S}_{12}^{\hbar} + \frac{e^{-\pi\imath(u-v)}}{\sin \pi(u-v)} P_{12} + \frac{e^{-\pi\imath(u+v)}}{\sin \pi(u+v)} J_1 J_2 P_{12}$$

.

Спасибо за внимание!