# Ветвящийся процесс в случайной среде, начинающийся с большого числа частиц

Афанасьев В.И.

Математический институт им. В.А. Стеклова

*viafan@mail.ru*

ноябрь 2025 г.

# Случайная среда

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ – исходное вероятностное пространство и $\Delta$ – пространство вероятностных мер на $\mathbf{N}_0$ с метрикой полной вариации. Рассмотрим случайные элементы $Q_1, Q_2, \ldots$, отображающие $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ в $\Delta$. Это означает, что $Q_n$ при каждом $n \in \mathbf{N}$ является вероятностной мерой на $\mathbf{N}_0$. Последовательность $\Pi = \{Q_1, Q_2, \ldots\}$ называется *случайной средой*.

# Ветвящийся процесс в случайной среде

Последовательность неотрицательных целочисленных случайных величин $\{Z_n,\ n \in \mathbf{N}_0\}$ называется *ветвящимся процессом в случайной среде*, если $Z_0$ равняется некоторому фиксированному $k \in \mathbf{N}$ и

$$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} \xi_i^{(n)}, \quad n \in \mathbf{N}_0.$$

# Ветвящийся процесс в случайной среде

Здесь предполагается, что при фиксированной случайной среде $\Pi$ случайные величины $\left\{\xi_i^{(n)}:\ n \in \mathbf{N}_0,\ i \in \mathbf{N}\right\}$ независимы, причем при фиксированном $n \in \mathbf{N}_0$ величины $\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \ldots$ одинаково распределены с распределением $Q_{n+1}$.

# Терминология

На языке ветвящихся процессов $Z_n$ – численность частиц $n$-го поколения, $\xi_i^{(n)}$ – число непосредственных потомков $i$-ой частицы из $n$-го поколения.

# Пояснение

Другими словами, случайный процесс $\{Z_n,\ n \in \mathbf{N}_0\}$ при фиксированной случайной среде $\Pi$ является (неоднородным) ветвящимся процессом Гальтона-Ватсона; при этом закон размножения частиц $n$-го поколения есть $Q_{n+1}$. Сопоставим (случайному) распределению $Q_n$ при $n \in \mathbf{N}$ производящую функцию $f_n(\cdot)$. Предполагается, что случайные элементы $Q_1, Q_2, \ldots$ независимы и одинаково распределены.

Положим при $n \in \mathbf{N}$

$$X_n = \ln f_n'(1), \qquad \eta_n = \frac{f_n''(1)}{(f_n'(1))^2}$$

(предполагается, что п.н. $f_1'(1), f_n''(1) \in (0, +\infty)$). Заметим, что случайные векторы $(X_1, \eta_1), (X_2, \eta_2), \ldots$ являются независимыми и одинаково распределенными.

# Сопровождающее случайное блуждание

Введем *сопровождающее случайное блуждание*

$$S_0 = 0, \qquad S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad n \in \mathbf{N}.$$

# Предположения

В дальнейшем предполагается, что

$$\mathbf{E}X_1 = 0, \qquad \mathbf{E}X_1^2 = \sigma^2 \in (0, +\infty)\,;$$

кроме того,

$$\mathbf{E}\ln^{2+q}(\eta_1 \vee 1) < +\infty$$

при некотором $q > 0$.

# Условие невырождения

Напомним предельную теорему для процесса $\{Z_n,\ n \in \mathbf{N}_0\}$, начинающегося с одной частицы: при $n \to \infty$

$$\left\{ \frac{\ln Z_{\lfloor nt \rfloor}}{\sigma\sqrt{n}},\ t \in [0,1] \;\middle|\; Z_n > 0 \right\} \stackrel{D}{\to} W^{+}.$$

Предельный процесс $W^{+} = \{W^{+}(t),\ t \in [0,1]\}$ называется броуновской извилиной.

# Броуновская извилина

Броуновская извилина $W^+$ возникает в следующей условной функциональной предельной теореме: если $\mathbf{E}X_1 = 0$, $\mathbf{E}X_1^2 = \sigma^2 \in (0, +\infty)$, то при $n \to \infty$

$$\left\{ \frac{S_{\lfloor nt \rfloor}}{\sigma\sqrt{n}},\ t \in [0,1] \ \middle| \ S_1 \geq 0, \ldots, S_n \geq 0 \right\} \xrightarrow{D} W^+.$$

# Предположение

Зафиксируем $x \in (0, +\infty)$. Рассмотрим такую последовательность натуральных чисел $m_1(x), m_2(x), \ldots$, что при $n \to \infty$

$$\ln m_n(x) \sim \sigma\sqrt{n}x.$$

.

# Последовательность ВПСС

Теперь в отличие от ситуации, когда процесс $\{Z_i,\ i \in \mathbf{N}_0\}$ начинается с фиксированного числа частиц, т.е. $Z_0 = k \in \mathbf{N}$, рассмотрим последовательность процессов $\left\{Z_i^{(n,x)},\ i \in \mathbf{N}_0\right\}$, где

$$Z_i^{(n,x)} = \{\, Z_i \mid\ Z_0 = m_n\,(x)\} \,.$$

# Момент вырождения

Введем момент вырождения процесса $\left\{Z_i^{(n,x)},\ i \in \mathbf{N}_0\right\}$, т.е. момент

$$T^{(n,x)} = \min\left\{i \in \mathbf{N}_0 : Z_i^{(n,x)} = 0\right\}.$$

# Процесс с непрерывным временем

Положим при $t \geq 0$

$$Y_n^{(n,x)}(t) = \left\{ \frac{Z_{\lfloor nt \rfloor}}{m_n(x) \exp S_{\lfloor nt \rfloor}} \;\middle|\; Z_0 = m_n(x) \right\}.$$

# Предельный процесс

Пусть $\{W(t), \ t \geq 0\}$ – стандартное броуновское движение и $\tau_a$ – момент первого достижения точки $a \neq 0$ этим процессом. Для $x > 0$ введем случайный процесс $Y^{(x)} = \left\{Y^{(x)}(t), \ t \geq 0\right\}$: $Y^{(x)}(t) = 1$ при $t < \tau_{-x}$, $Y^{(x)}(t) = 0$ при $t \geq \tau_{-x}$. Пусть символ $\overset{D}{\to}$ означает сходимость случайных элементов (величин, векторов, процессов) по распределению в том или ином метрическом пространстве.

# Теорема 1

**Теорема 1.** *Пусть выполнены перечисленные условия, тогда при* $n \to \infty$

$$\frac{T^{(n,x)}}{n} \xrightarrow{D} \tau_{-x}.$$

**Теорема 2.** *Пусть выполнены перечисленные условия, тогда при* $n \to \infty$

$$\left\{ Y_n^{(n,x)}(t)\,,\ t \geq 0 \right\} \Rightarrow Y^{(x)},$$

*где символ* $\Rightarrow$ *означает сходимость в смысле конечномерных распределений.*

# Теорема 3

**Теорема 3.** *Пусть выполнены перечисленные условия, тогда при* $n \to \infty$

$$\left\{ \frac{\ln\left(Z_{\lfloor nt \rfloor}^{(n,x)} + 1\right)}{\sigma\sqrt{n}},\ t \geq 0 \right\} \xrightarrow{D} \left\{ x + W\left(t \wedge \tau_{-x}\right),\ t \geq 0 \right\}.$$

*Здесь символ* $\xrightarrow{D}$ *означает сходимость по распределению в пространстве* $D\left[0, +\infty\right)$ *с топологией Скорохода.*

# Классический ветвящийся процесс

Напомним аналогичный результат, касающийся критического ветвящегося процесса Гальтона-Ватсона $\{\xi_n,\ n \in \mathbf{N}_0\}$. Пусть $\mathbf{E}\xi_1 = 1$ и $\mathbf{D}\xi_1 = 2b \in (0, +\infty)$. Зафиксируем $x \in (0, +\infty)$. Рассмотрим такую последовательность натуральных чисел $m_1(x), m_2(x), \ldots$, что $m_n(x) \sim bnx$ при $n \to \infty$. Тогда при $n \to \infty$

$$\left\{ \frac{\xi_{\lfloor nt \rfloor}}{bn},\ t \geq 0 \,\middle|\, \xi_0 = m_n(x) \right\} \xrightarrow{D} U^{(x)}.$$

где $U^{(x)} = \left\{ U^{(x)}(t),\ t \geq 0 \right\}$ – феллеровская диффузия.

# Феллеровская диффузия

Феллеровская диффузия $U^{(a)}$ – это однородный неотрицательный марковский процесс (с непрерывными траекториями), стартующий из точки $a > 0$, с поглощающим состоянием в точке $0$. Переходная плотность $p(t, x, y)$ при положительных $t, x$ имеет следующее преобразование Лапласа: при $\lambda \geq 0$

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\lambda y} p(t, x, y)\, dy = \exp\left(-\frac{\lambda x}{1 + \lambda t}\right) - \exp\left(-\frac{x}{t}\right).$$

# Вспомогательные функции

Введем для каждого $i \in \mathbf{N}$ функции

$$g_i\left(s\right) = \frac{1}{1 - f_i\left(s\right)} - \frac{1}{f_i'\left(1\right)\left(1 - s\right)}, \quad s \in \left[0, 1\right).$$

Оказывается, при $i \in \mathbf{N}$ и $s \in [0, 1)$

$$0 \leq g_i\left(s\right) \leq \eta_i.$$

# Суперпозиция производящих функций

Положим при $n \in \mathbf{N}$, $0 \leq i < n$ и $s \in [0, 1)$

$$f_{i,n}(s) = f_{i+1} \circ f_{i+2} \circ \ldots \circ f_n(s), \qquad f_{n,n}(s) = s$$

и

$$\eta_{i,n}(s) = g_i(f_{i,n}(s)).$$

# Суперпозиция производящих функций

Оказывается, при $n \in \mathbf{N}$

$$1 - f_{0,n}(s) = \left( \frac{a_n}{1-s} + b_n(s) \right)^{-1}, \quad s \in [0,1),$$

где

$$a_n = \exp(-S_n), \qquad b_n(s) = \sum_{i=0}^{n-1} \eta_{i+1,n}(s)\, a_i.$$

# Производящие функции численности поколения

Обозначим $\mathbf{P}_{\Pi}$ и $\mathbf{E}_{\Pi}$ вероятность и математическое ожидание, вычисленные при фиксированной случайной среде. Известно, что при $n \in \mathbf{N}$ и $s \in [0, 1)$

$$\mathbf{E}_{\Pi}\left(s^{Z_n} \mid Z_0 = 1\right) = f_{0,n}(s)$$

и, значит, при $n \in \mathbf{N}$ и $s \in [0, 1)$

$$\mathbf{E}_{\Pi}\left(s^{Z_n} \mid Z_0 = 1\right) = 1 - \left(\frac{a_n}{1 - s} + b_n(s)\right)^{-1}.$$

# Производящие функции численности поколения

Следовательно, при $s \in [0,1)$

$$\mathbf{E}_{\Pi} s^{Z_{\lfloor nt \rfloor}^{(n,x)}} = \left(1 - \frac{1}{a_{\lfloor nt \rfloor} / (1-s) + b_{\lfloor nt \rfloor}(s)}\right)^{m_n(x)}.$$

# Список литературы

1. V.I. Afanasyev, J. Geiger, G. Kersting, V.A. Vatutin, Criticality for branching processes in random environment, *Ann. Probab.*, 33:2 (2005), 645-673.

2. G. Kersting, V. Vatutin, *Discrete time branching processes in random environment.* John Viley and Sons, Inc., London, 2017.

3. V. I. Afanasyev, "A critical branching process with immigration in random environment", *Stoch. Proc. Appl.*, 139 (2021), 110-138.

# Список литературы


4. T. Lindvall, "Convergence of critical Galton-Watson branching processes", *J. Appl. Probab.*, 9:2 (1972), 445-450.

5. В. И. Афанасьев, "Ветвящийся процесс в случайной среде, начинающийся с большого числа частиц", *Теория вероятн. и ее примен.*, 70:1 (2025), 3-28.