

Длинные строки составных значений полиномов и базис порядка 2

A. O. Радомский¹

¹Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
г. Москва

Буняковский (1857) высказал следующее предположение.

Гипотеза 1. Пусть f неприводимый полином в $\mathbb{Z}[x]$ с положительным старшим коэффициентом, степени не ниже 2 и такой, что для любого простого p найдется целое число n_p такое, что $(f(n_p), p) = 1$ (здесь (a, b) обозначает наибольший общий делитель целых чисел a и b). Тогда существует бесконечно много натуральных чисел n таких, что $f(n)$ — простое число.

Гипотеза 1 остается открытой. Более того, она не доказана ни для одного полинома f , удовлетворяющего ее условиям. Бэйтман и Хорн (1962) высказали следующий количественный аналог Гипотезы 1.

Гипотеза 1'. Если f удовлетворяет условиям Гипотезы 1, то

$$\#\{1 \leq n \leq N : f(n) \text{ — простое число}\} \sim c(f) \frac{N}{\log N},$$

где $c(f) > 0$ — константа, зависящая только от полинома f .

Мы доказываем следующий результат.

Теорема 1. Пусть f удовлетворяет условиям Гипотезы 1. Тогда для достаточно большого натурального N найдутся две строки последовательных натуральных чисел $I_1 = \{n_1 - m, \dots, n_1 + m\}$ и $I_2 = \{n_2 - m, \dots, n_2 + m\}$ такие, что $m = [(\log N)(\log \log N)^{1/325525}]$, $I_1 \cup I_2 \subset [1, N]$, $N = n_1 + n_2$ и $f(n)$ составное число для любого $n \in I_1 \cup I_2$.

Отметим, что длины I_1 и I_2 необычно большие по сравнению с ожидаемой средней длиной, которая, если Гипотеза 1' верна, должна иметь порядок $\log N$.

Напомним, что множество $A \subseteq \mathbb{N}$ называется базисом порядка k , если любое достаточно большое натуральное число может быть представлено в виде суммы k элементов из A . Из Теоремы 1 следует, что множество

$$\{n \geq 3 : f(l) \text{ составное для любого } l \in [n-m, n+m], \text{ где } m = [(\log n)(\log \log n)^{1/325525}]\}$$

— базис порядка 2.

Радомский Артём Олегович, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», г. Москва, **e-mail:** aradomskii@hse.ru