

Основы теории открытых квантовых систем.
Лекция 11. Модель столкновений. Уравнение
ГКСЛ и усреднение по классическим процессам

Теретёнков Александр Евгеньевич

19 ноября 2024 г.

Квантовая относительная энтропия

Лемма 2. Пусть Φ^* удовлетворяет "унитальному" неравенству Кэдисона

$$\mathrm{Tr} A^\dagger (\rho_1 \cdot + s \cdot \rho_2)^{-1} A \geq \mathrm{Tr} \Phi[A^\dagger] (\Phi[\rho_1] \cdot + s \cdot \Phi[\rho_2])^{-1} \Phi[A].$$

Квантовая относительная энтропия

Лемма 2. Пусть Φ^* удовлетворяет "унитальному" неравенству Кэдисона

$$\mathrm{Tr} A^\dagger (\rho_1 \cdot + s \cdot \rho_2)^{-1} A \geq \mathrm{Tr} \Phi[A^\dagger] (\Phi[\rho_1] \cdot + s \cdot \Phi[\rho_2])^{-1} \Phi[A].$$

Доказательство: Обозначим $B = (\Phi[\rho_1] \cdot + s \cdot \Phi[\rho_2])^{-1} \Phi[A]$, $X = (\rho_1 \cdot + s \cdot \rho_2)^{-\frac{1}{2}} A - (\rho_1 \cdot + s \cdot \rho_2)^{\frac{1}{2}} \Phi^*[B]$ и распишем очевидное равенство $\mathrm{Tr} X^\dagger X \geq 0$.

Квантовая относительная энтропия

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr} X^\dagger X &= \mathrm{Tr} A^\dagger (\rho_1 \cdot + s \cdot \rho_2)^{-1} A - \mathrm{Tr} A^\dagger \Phi^*[B] - \\ &- \mathrm{Tr} \Phi^*[B^\dagger] A + \mathrm{Tr} \Phi^*[B^\dagger] (\rho_1 \cdot + s \cdot \rho_2) \Phi^*[B] \geq 0 \end{aligned}$$

С учётом

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr} A^\dagger \Phi^*[B] + \mathrm{Tr} \Phi^*[B^\dagger] A &= \mathrm{Tr} \left((\Phi[A])^\dagger B + B^\dagger \Phi[A] \right) = \\ &= 2 \mathrm{Tr} \Phi[A^\dagger] (\Phi[\rho_1] \cdot + s \cdot \Phi[\rho_2])^{-1} \Phi[A] \end{aligned}$$

мы получаем

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr} A^\dagger (\rho_1 \cdot + s \cdot \rho_2)^{-1} A &\geq \mathrm{Tr} \Phi[A^\dagger] (\Phi[\rho_1] \cdot + s \cdot \Phi[\rho_2])^{-1} \Phi[A] + \\ &+ \mathrm{Tr} \Phi[A^\dagger] (\Phi[\rho_1] \cdot + s \cdot \Phi[\rho_2])^{-1} \Phi[A] - \mathrm{Tr} \Phi^*[B^\dagger] (\rho_1 \cdot + s \cdot \rho_2) \Phi^*[B] \end{aligned}$$

Квантовая относительная энтропия

Таким образом, осталось показать

$$\mathrm{Tr} \Phi[A^\dagger](\Phi[\rho_1] \cdot + s \cdot \Phi[\rho_2])^{-1} \Phi[A] \geq \mathrm{Tr} \Phi^*[B^\dagger](\rho_1 \cdot + s \cdot \rho_2) \Phi^*[B]$$

$$\begin{aligned} & \mathrm{Tr} \Phi^*[B^\dagger](\rho_1 \cdot + s \cdot \rho_2) \Phi^*[B] = \\ &= \mathrm{Tr}(\Phi^*[B^\dagger] \rho_1 \Phi^*[B] + s \Phi^*[B^\dagger] \Phi^*[B] \rho_2) = \\ &= \mathrm{Tr}(\Phi^*[B] \Phi^*[B^\dagger] \rho_1 + s \Phi^*[B^\dagger] \Phi^*[B] \rho_2) \leq / \text{Неравенство Кэдисона} / \\ &\leq \mathrm{Tr}(\Phi^*[BB^\dagger] \rho_1 + s \Phi^*[B^\dagger B] \rho_2) = \\ &= \mathrm{Tr}(BB^\dagger \Phi[\rho_1] + s B^\dagger B \Phi[\rho_2]) = \mathrm{Tr} B^\dagger (\Phi[\rho_1] B + s B \Phi[\rho_2]) = \\ &= \mathrm{Tr} B^\dagger (\Phi[\rho_1] \cdot + s \cdot \Phi[\rho_2]) B = \setminus B = (\Phi[\rho_1] \cdot + s \cdot \Phi[\rho_2])^{-1} \Phi[A] \setminus = \\ &= \mathrm{Tr} \Phi[A^\dagger](\Phi[\rho_1] \cdot + s \cdot \Phi[\rho_2])^{-1} \Phi[A] \quad \square \end{aligned}$$

Модель столкновений: Дискретное время

Многократно повторяем шаги:

- 1 Система подносится к **новому** окружению в состоянии ρ_β

$$\rho_S \otimes \rho_\beta$$

- 2 Система "сталкивается" с окружением посредством унитарного оператора U

$$U(\rho_S \otimes \rho_\beta)U^\dagger$$

В результате после каждого шага система находится в состоянии

$$\rho'_S = \text{Tr}_B U(\rho_S \otimes \rho_\beta)U^\dagger = \Phi(\rho_S),$$

где Φ — канал.

Модель столкновений: Дискретное время

После n шагов

$$\Phi^n(\rho_S)$$

получаем вполне положительную динамику с дискретным временем.

- ① Ciccarello, F., Lorenzo, S., Giovannetti, V., Palma, G. M. (2022). Quantum collision models: Open system dynamics from repeated interactions. Physics Reports, 954, 1-70.
<https://arxiv.org/abs/2106.11974>

Модель столкновений: Дискретное время

Можно также записать

$$\Phi^n(\rho_S) \otimes \rho_\beta = (\mathcal{P}\mathcal{U}\mathcal{P})^n \rho$$

$$\mathcal{U} = U \cdot U^\dagger$$

Повторные селективные измерения невырожденной наблюдаемой

$$\mathcal{P}\rho = \sum_j |j\rangle\langle j|\rho|j\rangle\langle j|$$

$$\mathcal{U} = U \cdot U^\dagger$$

Упражнение. Показать

$$\mathcal{P}\mathcal{U}\mathcal{P}\rho = \sum_{kj} P_{kj} |k\rangle\langle j|\rho|j\rangle\langle k|,$$

вычислив P_{kj} , а также показать что P — бистохастическая матрица.

Модель столкновений: Непрерывный предел

Предполагаются быстрые сильные столкновения.

$$\mathcal{U} = e^{-i[H, \cdot] \Delta t} = I - i[H, \cdot] \Delta t - \frac{1}{2}[H, [H, \cdot]] \Delta t^2 + \dots$$

$$H = H_0 + H_I$$

$$H_0 = O(1), \quad H_I = O\left(\frac{1}{\sqrt{\Delta t}}\right), \quad \text{tr}_B(H_I \rho_\beta) = 0$$

H_0 не обязан быть свободным гамильтонианом!

С учётом

$$\text{tr}_B[H, \rho \otimes \rho_\beta] = [\text{tr}_B(H \rho_\beta), \rho] = [\text{tr}_B(H_0 \rho_\beta), \rho]$$

$$\text{tr}_B \mathcal{U}(\rho \otimes \rho_\beta) = \rho - i[\text{tr}_B(H_0 \rho_\beta), \rho] \Delta t - \frac{1}{2} \text{Tr}_B[H_I, [H_I, \rho \otimes \rho_\beta]] \Delta t^2 + o(\Delta t)$$

Модель столкновений: Непрерывный предел

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \text{Tr}_B[H_I, [H_I \rho \otimes \rho_\beta]] \Delta t &= \Delta t (\text{Tr}_B(H_I \rho \otimes \rho_\beta H_I) \\ &\quad - \frac{1}{2} \text{Tr}_B(H_I^2 \rho \otimes \rho_\beta) - \frac{1}{2} \text{Tr}_B(\rho \otimes \rho_\beta H_I^2)) \\ &= \Psi(\rho) - \frac{1}{2} \{\Psi^*(I), \rho\} \end{aligned}$$

$$\rho_\beta = \sum_k p_k |k\rangle \langle k|$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \Psi(\rho) &= \text{Tr}_B(H_I(\rho \otimes \sum_k p_k |k\rangle \langle k|) H_I) \\ &= \sum_{k'k} \langle k'_B | H_I | k_B \rangle \rho p_{k_B} \langle k_B | H_I | k'_B \rangle \end{aligned}$$

Модель столкновений: Непрерывный предел

$$\frac{1}{\Delta t} \Psi(\rho) = \sum_{k'k} \langle k'_B | H_I | k_B \rangle \rho p_{k_B} \langle k_B | H_I | k'_B \rangle$$

$$\begin{aligned} \langle k_B | H_I | k'_B \rangle &= (I \otimes \langle k |) H_I (I \otimes | k' \rangle) \\ &= ((I \otimes \langle k' |) H_I (I \otimes | k \rangle))^{\dagger} = \langle k'_B | H_I | k_B \rangle^{\dagger} \end{aligned}$$

$$\Psi(\rho) = \sum_{k'k} L_{k'k} \rho L_{k'k}^{\dagger}, \quad L_{k'k} = \sqrt{p_k \Delta t} \langle k'_B | H_I | k_B \rangle$$

Модель столкновений: Непрерывный предел

В результате за шаг

$$\Phi(\rho) = (I + \Delta t \mathcal{L} + o(\Delta t))\rho$$

$$\mathcal{L} = -i[H', \cdot] + \Psi - \frac{1}{2}\{\Psi^*(I), \cdot\}$$

$$H' = \text{tr}_B(H_0 \rho_\beta)$$

$$\Psi(\rho) = \sum_{k'k} L_{k'k} \rho L_{k'k}^\dagger, \quad L_{k'k} = \sqrt{p_k \Delta t} \langle k'_B | H_I | k_B \rangle$$

Модель столкновений: Непрерывный предел

Если шагов n , общее время $t = n\Delta t$ фиксировано, то

$$\rho(t) = \Phi^n(\rho(0)) = \left(I + \frac{t}{n} \mathcal{L} + o(n^{-1}) \right)^n \rho(0)$$

При $n \rightarrow \infty$

$$\rho(t) = e^{\mathcal{L}t} \rho(0)$$

Модель столкновений: Средние операторов окружения

$$H_0 = \sum_{\alpha} A_{\alpha}^{(0)} \otimes B_{\alpha}^{(0)}, \quad H_I = \sum_{\alpha} A_{\alpha} \otimes B_{\alpha}, \quad \langle B_{\alpha} \rangle = 0$$

$$\langle \cdot \rangle \equiv \text{tr}_B(\cdot \rho_B)$$

Упражнение.

$$H' = \sum_{\alpha} A_{\alpha}^{(0)} \langle B_{\alpha}^{(0)} \rangle$$

$$\Psi(\rho) = \Delta t \sum_{\alpha, \beta} \langle A_{\alpha} A_{\beta} \rangle (B_{\beta} \cdot B_{\alpha})$$

Уравнение ГКСЛ и усреднение по классическим процессам

Утверждение. Пусть $\xi_t, t \geq 0$ — классический случайных процесс Леви (классический резервуар), то есть

- ① $\xi_0 = 0$
- ② $\forall 0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n, \xi_{t_2} - \xi_{t_1}, \xi_{t_3} - \xi_{t_2}, \dots, \xi_{t_n} - \xi_{t_{n-1}}$
(независимость приращений)
- ③ При $t > s$ приращения $\xi_t - \xi_s$ и $\xi_{t-s} - \xi_0$ распределены одинаково (стационарность приращений)
- ④ Непрерывный (по вероятности).

Тогда

$$\Phi_t \rho = \mathbb{E} e^{-iA\xi_t} \rho e^{iA\xi_t}. \quad A = A^\dagger$$

определяет однопараметрическую непрерывную вполне положительную полугруппу сохраняющую след.

Уравнение ГКСЛ и усреднение по классическим процессам

Доказательство:

$$\Phi_t \rho = \mathbb{E} e^{-iA\xi_t} \rho e^{iA\xi_t} = \mathbb{E} e^{-iA(\xi_t - \xi_s)} e^{-iA\xi_s} \rho e^{iA\xi_s} e^{iA(\xi_t - \xi_s)} =$$

с учётом независимости и стационарности

$$\begin{aligned} &= \mathbb{E} e^{-iA(\xi_t - \xi_s)} (\mathbb{E} e^{-iA\xi_s} \rho e^{iA\xi_s}) e^{iA(\xi_t - \xi_s)} = \mathbb{E} e^{-iA\xi_{t-s}} \Phi_s \rho e^{iA\xi_{t-s}} = \\ &= \Phi_{t-s} \Phi_s \rho \end{aligned}$$

Непрерывность полугруппы следует из непрерывности (по вероятности) случайного процесса. □

Уравнение ГКСЛ и усреднение по классическим процессам

Отметим, что $\Phi_t(I) = \mathbb{E}_{\xi_t} e^{-iA\xi_t} I e^{iA\xi_t} = \mathbb{E}_{\xi_t} I = I$. Таким образом, отображение Φ_t является бистахастическим, а следовательно приводит к возрастанию энтропии $S(\Phi_t(\rho)) \geq S(\rho)$.

Уравнение ГКСЛ и усреднение по классическим процессам

Упражнение. Проверить, что двухвременная корреляционная функция ($\mathcal{U}_s = e^{-iA\xi_s} \cdot e^{iA\xi_s}$) удовлетворяет регрессионной теореме

$$\mathbb{E} \operatorname{Tr}(A\mathcal{U}_{t-s}(B\mathcal{U}_s\rho)) = \operatorname{Tr}(A\Phi_{t-s}(B\Phi_s\rho))$$