Об одной коэффициентной обратной задаче с полунелокальными условиями для трехмерного уравнения Трикоми в параллелепипеде

Джамалов С.З., Шакиров А.А.

Институт Математики имени В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан

Введение и постановка проблемы

В процессе изучения нелокальных задач была выявлена тесная связь между задачами с нелокальными краевыми условиями и обратными задачами [1]. К настоящему времени линейные обратные задачи для классических уравнений параболического, эллиптического и гиперболического типов изучены достаточно хорошо в работах [2] [3] [4] [5].

[1] Бицадзе А.В. О нелокальных краевых задачах // ДАН СССР, 1989, т.277. №1, с.17-19.

[2] Аниконов Ю.Е. Некоторые методы исследования многомерных обратных задач для дифференциальных уравнений. - Новосибирск. Наука, 1978.-120с

[3] Бубнов. Б. А. К вопросу о разрешимости многомерных обратных задач для гиперболических уравнений. Новосибирск. 1987. Препринты №714, ВЦ.СО АН СССР. с.44.

[4] Лаврентьев М.М, Романов В.Г, Васильев В.Г. Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука, 1969,с.67

[5] Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. // Новосибирск. Сибирское научное издательство, 2009 г. - 457 с.

Обратные задачи (с поиском правых частей уравнений) для уравнений смешанного типа как первого, так и второго рода в ограниченных областях исследовались в работах [6] [7] [8] [9] [10]. Коэффициентные обратные задачи для уравнений смешанного типа в ограниченных областях практически не изучались. В данной работе мы попытаемся частично восполнить этот пробел.

---

[6] Сабитов К.Б., Мартемьянова Н.В. Нелокальная обратная задача для уравнения смешанного типа. // Изв. вузов. Математика.2011. №2.с.71-85.

[7] Сабитов К.Б., Бурханова (Хаджи). Обратная задача нахождения правых частей смешанных уравнений с оператором Чаплыгина. Lobachevski Jour.Math. **43** (4) 666–680 (2022).

[8] Джамалов С. З. Об одной линейной обратной задаче для уравнения Трикоми в трёхмерном пространстве. Вестник КРАУНЦ. Физ.Мат. Науки. **13** (2), 10–15 (2016)

[9] Джамалов С.З., Ашуров Р.Р. О линейной обратной задаче для многомерного уравнения смешанного типа первого рода второго порядка. Изв. Выс. Учеб. Зав. Матем. **6**, 1–12 (2019).

[10] Джамалов С.З. Нелокальные краевые и обратные задачи для уравнений смешанного типа (Монография). 2021. Ташкент: Fan Ziyosi.

В данной работе для исследования однозначной разрешимости коэффициентной обратной задачи для трёхмерного уравнения Трикоми в параллелепипеде предлагается метод, основанный на сведении коэффициентной обратной задачи к прямым нелинейным полунелокальным краевым задачам для семейства нагруженных дифференциальных уравнений Трикоми в ограниченной прямоугольной области.
Напомним, что нагруженным уравнением обычно называют уравнение с частными производными, содержащее в коэффициентах или в правой части значения некоторых функционалов из решения уравнения [11].

[11] Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их приложения. 2012. Москва: Наука.

В области G,

$G = (-1,1)\times(0,T)\times(0,\pi) = Q\times(0,\pi) = \{(x,t,y)|\, -1 < x < 1,\ 0 < t < T,\ 0 < y <$

рассматриваем трёхмерное уравнение Трикоми:

$$Lu = xu_{tt} - au_{xx} - u_{yy} + \alpha(x,t)u_t = c(x,t)u + \psi(x,t,y) \qquad (1)$$

где $\alpha(x,t)$ — достаточно большая функция, a — достаточно большое число. Пусть $\psi(x,t,y) = g(x,t,y) + h(x,t)\cdot f(x,t,y)$, $g(x,t,y)$ и $f(x,t,y)$ — заданные функции, а функции $h(x,t)$ и $c(x,t)$ подлежат определению.

Постановка задачи: Найти функции $\{u(x,t,y),\ h(x,t),\ c(x,t)\}$, удовлетворяющие уравнению (1) почти всюду в области G, такие, что $u(x,t,y)$ удовлетворяет следующим краевым условиям:
1) полунелокальные краевые условия

$$\gamma D_t^p u|_{t=0} = D_t^p u|_{t=T}, \quad p = 0, 1, \tag{2}$$

$$u_x|_{x=-1} = u_x|_{x=1} = 0, \tag{3}$$

$$u|_{y=0} = u|_{y=\pi} = 0, \tag{4}$$

где γ положительное число, такое что $|\gamma| > 1$;
2) дополнительные условия

$$u(x,t,\ell_1) = \varphi_1(x,t), \tag{5}$$

$$u(x,t,\ell_2) = \varphi_2(x,t), \tag{6}$$

$$0 < \ell_1 < \ell_2 < \pi < +\infty$$

и вместе с функциями $h(x,t)$, (x,t) принадлежит классу

$$U = \left\{(u,\ h,\ c)|\ u \in W_2^{2,3}(G),\ h \in W_2^2(Q),\ c \in W_2^2(Q)\right\}.$$

Здесь $W_2^{l,3}(G)$ — анизотропное пространство Соболева с нормой

$$[u]_{l,3}^2 \equiv \||u|\|_{W_2^{l,3}(G)}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left(1+k^2\right)^3 \|u_k\|_{W_2^l(Q)}^2, \qquad l = 0, 1, 2, ...$$

где $u_k(x,t)$ обозначают коэффициенты разложения Фурье функций $u(x,t,y)$ по системе $Y_k(y) = \left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin ky\right\}$, $k = 1, 2, 3, ...;$
$W_2^l(Q)$, $l = 0, 1, 2$ — пространства Соболева с нормой

$$\|u\|_{W_2^l(Q)}^2 = \|u\|_l^2 = \sum_{|\alpha|=0}^{l} \int\limits_Q (D^\alpha u)^2 dxdt,$$

где D^α — обобщённая производная по переменным x и t. При $l = 0$ она совпадает с пространством Лебега $L_2(Q)$. Далее, через $C^l(Q)$ обозначаются пространства непрерывно дифференцируемых функций до порядка l включительно с нормой

$$\|u\|_{C^l(Q)} = \sum_{|\alpha|=0}^{l} \max_{(x,t)\in Q} |D^\alpha u|$$

Для дальнейшего изучения обратной задачи нам понадобятся следующие вспомогательные теоремы и обозначения в упрощенном виде.

Теорема А.1 (С.Л. Соболев). Имеет место непрерывное вложение $W_2^2(Q) \subset C(Q)$, т.е.

$$\|u\|_{C(Q)}^2 \leq c_1 \|u\|_{W_2^2(Q)}^2 ,$$

где c_1 — положительная константа [12 13].

Theorem А.2. Для любой функции $u(x,t) \in W_2^1(Q)$ справедливо следующее неравенство:

$$\|u\|_{L_4(Q)} \leq c_2 \|u\|_{W_2^1(Q)} ,$$

где c_2 — положительная константа [12 13].

Теперь введем следующие обозначения: $g_j(x,t) = g(x,t,\ell_j)$,

$$f_j(x,t) = f(x,t,\ell_j), \quad \forall j = 1,2; \quad H = \det \begin{pmatrix} \varphi_1 & f_1 \\ \varphi_2 & f_2 \end{pmatrix},$$

$$L_1\varphi_i \equiv x\varphi_{i\ tt} - a\varphi_{i\ xx} + \alpha\varphi_{i\ t} - g_i, \quad i = 1,2,$$

[12] Соболев С.Л. Некоторые приложения функционального анализа в математической физике. 1988. Москва: Наука.

[13] Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.1973.с.407.

$$\gamma_0 = m_1 m_3 \left([g]^2_{1,3} + \varepsilon_{\varphi,g} [f]^2_{2,3} \right),$$

$$\gamma_1 = m_1 \left(\varepsilon_{\varphi,g} + m_2 [f]^2_{2,3} \right),$$

$$\gamma_2 = m_1 m_2,$$

$$\varepsilon_{\varphi,g} = \left(\left(1 + a + \|\alpha\|^2_{C^1}\right) \sum_{i=1,2} \sum_{|\alpha|=1}^{3} \|D^\alpha \varphi_i\|^2_C + \sum_{i=1,2} \|g_i\|^2_{C^1} \right)$$

$$m_1 = \frac{256}{\delta_0}\left(3+\mu^2\right), \quad m_2 = \frac{\pi^2}{6} c_2^2 \mathfrak{F}, \quad m_3 = 2 m_1 m_2 \left(1 + \|\alpha_x\|^2_C + \|\alpha_t\|^2_C\right)$$

для $(x,t) \in Q$, где $\mu = \frac{2}{T} \ln|\gamma| > 0$, $|\gamma| > 1$, δ — положительное число, точное значение которого будет определено ниже,

$$\mathfrak{F} = \max\left(\|f_1\|^2_{C^{0,1}_{x,t}(\bar{Q})}, \|f_2\|^2_{C^{0,1}_{x,t}(\bar{Q})}, \|\varphi_1\|^2_{C^{0,1}_{x,t}(\bar{Q})}, \|\varphi_2\|^2_{C^{0,1}_{x,t}(\bar{Q})} \right),$$

и c_2 определено выше.

Определение 1

Обобщенным решением задачи (1)-(6) будем называть функцию $\{u, h, c\}$ из класса U, удовлетворяющую уравнению (1) почти всюду в области G, с условиями (2)-(6).

Пусть все коэффициенты уравнения (1) являются достаточно гладкими функциями в области Q и пусть выполнены следующие условия относительно коэффициентов, правой части уравнения (1) и заданных функций $\varphi_i(x,t)$, $i = 1, 2$:

Условия 1:

нелокальные условия: $\alpha(x,0) = \alpha(x,T)$, $\alpha(-1,t) = \alpha(1,t)$;

$$\gamma g(x,0,y) = g(x,T,y), \quad \gamma f(x,0,y) = f(x,T,y);$$

гладкость: $f(x,t,l_i) = f_i(x,t) \in C^{0,1}_{x,t}(\bar{Q})$, $g(x,t,l_i) = g_i(x,t) \in C^{0,1}_{x,t}(\bar{Q})$,

$$f \in W_2^{3,3}(G), \quad g \in W_2^{3,3}(G).$$

Кроме того, пусть $2\alpha(x,t) + \mu x > \delta_0 > 1$, $a - \frac{7}{64}\delta_0 > \delta_1 > 1$, $\forall\,(x,t) \in \overline{Q}$.

Условия 2:

$\varphi_i \in W_2^3(Q)$, $\gamma D_t^p \varphi_i|_{t=0} = D_t^p \varphi_i|_{t=T}$, $\quad p = 0,1 \quad \varphi_{i\,x}|_{x=-1} = \varphi_{i\,x}|_{x=1} = 0, \varphi_i \neq 0$;

$$|H| = |\varphi_1 f_2 - \varphi_2 f_1| \geq \eta > 0.$$

Без ограничения общности можно принять $\eta = 1$.
Для доказательства разрешимости задачи (1)$-$(6) сначала воспользуемся методом Фурье. А именно, будем искать решение задачи (1)$-$(6) в виде

$$u(x,t,y) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t) \sin ky, \tag{A}$$

где функции $\{\sin ky\}$, $k = 1, 2, ...$, являются решениями спектральной задачи Штурма-Лиувилля с условиями Дирихле. Известно, что система собственных функций $\{\sin ky\}$ полна в пространстве $L_2(0,\pi)$ и образует в нём ортонормированный базис [14] [15] [16]. Для определения неизвестных функций необходимо выполнить некоторые формальности построения.

---

[14] Аниконов Ю.Е. Некоторые методы исследования многомерных обратных задач для дифференциальных уравнений. - Новосибирск. Наука, 1978.-120с

[15] Сабитов К.Б., Мартемьянова Н.В. Нелокальная обратная задача для уравнения смешанного типа. // Изв. вузов. Математика.2011. №2.с.71-85.

[16] Соболев С.Л. Некоторые приложения функционального анализа в математической физике. 1988. Москва: Наука.

Рассмотрим следы уравнения (1) при $y=\ell_i,\ \ i=1,2:$

$$Lu\big|_{y=l_i} = x\varphi_{i\,tt} - a\varphi_{i\,xx} - u_{yy}(x,t,\ell_i) + \alpha\varphi_{i\,t} = c\varphi_i + hf_i + g_i, \quad i=1,2. \quad (7)$$

Теперь, учитывая условия (5), (6) и условие $H \neq 0$, формально определим неизвестные функции $h(x,t)$ и $c(x,t)$ из системы уравнений (7):

$$\begin{cases} c\varphi_1 + hf_1 = \Phi_1 + L_1\varphi_1, \\ c\varphi_2 + hf_2 = \Phi_2 + L_1\varphi_2, \end{cases}$$

где

$$\Phi_i = \sum_{m=1}^{\infty} m^2 u_m(x,t)\sin m\ell_i, \quad L_1\varphi_i \equiv x\varphi_{itt} - a\varphi_{ixx} + \alpha\varphi_{it} - g_i, \qquad i=1,2,$$

в виде

$$c(x,t) = \frac{1}{H}\begin{vmatrix} \Phi_1 + L_1\varphi_1 & f_1 \\ \Phi_2 + L_1\varphi_2 & f_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{H}\left[(\Phi_1 + L_1\varphi_1)f_2 - (\Phi_2 + L_1\varphi_2)f_1\right]$$

$$= \frac{1}{H}\left[f_2\sum_{m=1}^{\infty} m^2 u_m(x,t)\sin m\ell_1 - f_1\sum_{m=1}^{\infty} m^2 u_m(x,t)\sin m\ell_2 + f_2L_1\varphi_1 - f_1L_1\varphi_2\right]$$

$$h(x,t)=\frac{1}{H}\begin{vmatrix}\varphi_1 & \Phi_1+L_1\varphi_1\\ \varphi_2 & \Phi_2+L_1\varphi_2\end{vmatrix}=\frac{1}{H}\left[(\Phi_1+L_1\varphi_1)\varphi_2-(\Phi_2+L_1\varphi_2)\varphi_1\right]$$

$$=\frac{1}{H}\left[\varphi_1\sum_{m=1}^{\infty}m^2u_m(x,t)\sin m\ell_2-\varphi_2\sum_{m=1}^{\infty}m^2u_m(x,t)\sin m\ell_1+\varphi_1L_1\varphi_2-\varphi_2L_1\varphi_1\right]$$

и для определения функций $u_k(x,t)$ в области Q получаем бесконечные системы нелинейных нагруженных дифференциальных уравнений Трикоми:

$$L\,u_k=xu_{k\,tt}-au_{k\,xx}+\alpha u_{k\,t}+k^2u_k$$

$$=\frac{u_k}{H}\left[f_2\sum_{m=1}^{\infty}m^2u_m(x,t)\sin m\ell_1-f_1\sum_{m=1}^{\infty}m^2u_m(x,t)\sin m\ell_2+f_2L_1\varphi_1-f_1L_1\varphi_2\right]$$

$$+\frac{f_k}{H}\left[\varphi_1\sum_{m=1}^{\infty}m^2u_m(x,t)\sin m\ell_2-\varphi_2\sum_{m=1}^{\infty}m^2u_m(x,t)\sin m\ell_1+\varphi_1L_1\varphi_2-\varphi_2L_1\varphi_1\right]$$

$$+g_k\equiv F u_k \tag{8}$$

с полунелокальными граничными условиями

$$\gamma D_t^p u_k\big|_{t=0}=D_t^p u_k\big|_{t=T},\quad p=0,1, \tag{9}$$

где f_k и g_k– — коэффициенты разложения Фурье функций f и g, $k = 1, 2, ...$

Введём следующие обозначения:

$$q \equiv \gamma_1 + 2\gamma_0\gamma_2 = m_1 \left(\varepsilon_{\varphi,g} + m_3 \left[g \right]^2_{1,3} + \left(m_2 + \varepsilon_{\varphi,g} m_3 \right) \left[f \right]^2_{2,3} \right)$$

Основной результат следующая:

Теорема 1

Пусть для коэффициентов уравнения (1) *выполнены указанные выше условия 1 и 2, а для коэффициентов уравнения и их следов выполнены следующие неравенства:*

$$q < \frac{1}{2}.$$

Тогда существует единственное решение задачи (1)-(6) *из класса* U.

Замачание 1.

Мы можем достичь неравенства $q < \frac{1}{2}$, выбрав область определения малой и взяв g_i с его производными малыми, а также взяв производные φ_i малыми.

Докажем теорему пошагово. Пусть существует решение задачи (1) из класса U. Сначала покажем, что функция $u(x,t,y)$ удовлетворяет граничным условиям (5)–(6) при любых $i=1,2$, то есть

$$u(x,t,\ell_i)=\varphi_i(x,t), \quad i=1,2.$$

Выполнение этих условий докажем, используя обратные предположения. Пусть существуют функции $\vartheta_i(x,t)$, удовлетворяющие условиям (5),(6):

$$u(x,t,\ell_i)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(x,t)\sin k\ell_i=\vartheta_i(x,t)\neq\varphi_i(x,t).$$

Для облегчения понимания рассмотрим каждый случай отдельно. Сначала рассмотрим случай $i=1$. Тогда для функции $z_1(x,t)=\vartheta_1(x,t)-\varphi_1(x,t)$ в области Q, учитывая условия (9)–(10), умножая системы уравнений (8) на $\sin\mu_k\ell_1$ и суммируя по k от 1 до ∞, получаем следующие нагруженные уравнения:

$$
\begin{aligned}
& x\vartheta_{1\ tt} - a\vartheta_{1\ xx} + \alpha\vartheta_{1\ t} + \sum_{m=1}^{\infty} m^2 u_m \sin m\ell_1 \\
&= \frac{\vartheta_1}{H}\left[f_2 \sum_{m=1}^{\infty} m^2 u_m(x,t)\sin m\ell_1 - f_1 \sum_{m=1}^{\infty} m^2 u_m(x,t)\sin m\ell_2 + f_2 L_1\varphi_1 - f_1 L_1\varphi_2\right] \\
&+ \frac{f_1}{H}\left[\varphi_1 \sum_{m=1}^{\infty} m^2 u_m(x,t)\sin m\ell_2 - \varphi_2 \sum_{m=1}^{\infty} m^2 u_m(x,t)\sin m\ell_1 + \varphi_1 L_1\varphi_2 - \varphi_2 L_1\varphi_1\right] \\
& + g_1.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Подставим вместо ϑ_1 выражение $z_1 + \varphi_1 = \vartheta_1 = \sum\limits_{m=1}^{\infty} u_m(x,t)\sin m\ell_1$.

Тогда из (11) следует

$$
x(z_1+\varphi_1)_{tt} - a(z_1+\varphi_1)_{xx} + \alpha(z_1+\varphi_1)_t + \sum_{m=1}^{\infty} m^2 u_m(x,t)\sin m\ell_1
$$

$$
= g_1 + cz_1 + \frac{1}{H}\sum_{k=1}^{\infty} k^2 u_k \sin k\ell_1[\varphi_1 f_2 - f_1\varphi_2] + \frac{1}{H}\left(\varphi_1 f_2 - \varphi_2 f_1\right) L_1\varphi_1
$$

или

$$xz_{1\ tt} - az_{1\ xx} + \alpha z_{1\ t} + \sum_{m=1}^{\infty} m^2 u_m(x,t) \sin m\ell_1 + x\varphi_{1\ tt} - a\varphi_{1\ xx} + \alpha\varphi_{1\ t}$$
$$= g_1 + cz_1 + \sum_{k=1}^{\infty} k^2 u_k \sin k\ell_1 + x\varphi_{1\ tt} - a\varphi_{1\ xx} + \alpha\varphi_{1\ t} - g_1. \tag{12}$$

На основании формул (8)–(12) для функции $z_1(x,t) = \vartheta_1(x,t) - \phi_1(x,t)$ в области Q получаем следующую задачу:

$$L_0 z_1 \equiv xz_{1\ tt} - az_{1\ xx} + \alpha z_{1\ t} = cz_1, \tag{13}$$

$$\gamma\, D_t^p z_1|_{t=0} = D_t^p z_1|_{t=T}, \quad p = 0, 1, \tag{14}$$

$$z_{1x}|_{x=-1} = z_{1x}|_{x=1} = 0 \tag{15}$$

Докажем единственность решения задачи (13)–(15) методом интеграла энергии [12, 17]. Для этого рассмотрим тождество

$$2(L_0 z_1, e^{-\mu t}(z_{1\,t} + z)) = 2(cz_1, e^{-\mu t}(z_{1\,t} + z)); \tag{16}$$

интегрируя по частям тождество (16) с учётом условий теоремы 1 и граничных условий (14), (15) при $|\gamma| > 1$, получаем следующее неравенство:

$$\delta e^{\mu T}\left\|z_1\right\|_1^2 \leq 2\left\|c\right\|_{C(Q)}^2\left\|z_1\right\|_1^2,$$

$$\left(\delta e^{\mu T}-2\left\|c\right\|_{C(Q)}^2\right)\left\|z_1\right\|_1^2 \leq 0. \tag{17}$$

В конце покажем справедливость неравенства $\left\|c\right\|_{C(Q)}^2 < r$, где $r=\frac{1}{2}\delta e^{\mu T}$. Пока же воспользуемся им и получим $\left\|z_1\right\|_1^2 \leq 0$, т.е. $z_1=0$, откуда следует $\vartheta_1=\varphi_1$. Таким образом, при $y=\ell_1$ решение уравнения (1) удовлетворяет условию $u(x,t,\ell_1)=\varphi_1(x,t)$. Аналогично, $u(x,t,\ell_2)=\varphi_2(x,t)$ доказано в случае, когда $i=2$.

Семейство нагруженных нелинейных уравнений Трикоми третьего порядка с малым параметром

Теперь докажем разрешимость задачи (8)–(10) методами "$\varepsilon-$регуляризации", априорных оценок, Галеркина и последовательных приближений [12, 18, 19], а именно, в области $Q = (-1, 1) \times (0, T)$ рассмотрим следующее семейство нагруженных нелинейных уравнений третьего порядка с малым параметром:

$$L_\varepsilon u_{k,\varepsilon} = -\varepsilon u_{k,\varepsilon\ ttt} + L_0 u_{k,\varepsilon} + k^2 u_{k,\varepsilon} = \frac{u_{k,\varepsilon}}{H}\left[f_2 \sum_{m=1}^{\infty} m^2 u_{m,\varepsilon} \sin m\ell_1\right.$$

$$\left. - f_1 \sum_{m=1}^{\infty} m^2 u_{m,\varepsilon} \sin m\ell_2 + f_2 L_1 \varphi_1 - f_1 L_1 \varphi_2\right] + \frac{f_k}{H}\left[\varphi_1 \sum_{m=1}^{\infty} m^2 u_{m,\varepsilon} \sin m\ell_2\right.$$

$$\left. - \varphi_2 \sum_{m=1}^{\infty} m^2 u_{m,\varepsilon} \sin m\ell_1 + \varphi_1 L_1 \varphi_2 - \varphi_2 L_1 \varphi_1\right] + g_k \equiv F(u_{k,\varepsilon}) \tag{18}$$

с полунелокальными краевыми условиями

$$\gamma D_t^p u_{k,\varepsilon}|_{t=0} = D_t^p u_{k,\varepsilon}|_{t=T}, \quad p = 0, 1, 2 \tag{19}$$

$$u_{k,\varepsilon x}|_{x=-1} = u_{k,\varepsilon x}|_{x=1} = 0, \tag{20}$$

где ε — малое положительное число.
Для доказательства однозначной разрешимости задачи (18)–(20) нам понадобятся следующие обозначения и леммы.
Определим пространства векторных функций

$$W_s(Q) = \{v = (v_1, v_2, ..., v_k, ...)|\ v_k \in W_2^s(Q),\ k = 1, 2, 3, ...\}, \quad s = 0, 1, 2$$

с нормой

$$\langle v\rangle_s^2 \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + k^2\right)^3 \|v_k\|^2_{W_2^s(Q)}, \qquad (B)$$

где $W_2^s(Q)$– пространства Соболева. Из определения пространств $W_s(Q)$, $s = 0, 1, 2$ с некоторой нормой (B) следует, что $W_2(Q) \subset W_1(Q) \subset W_0(Q)$ и они являются банаховыми пространствами.
Теперь по формуле

$$W(Q) = \{\, \{v_k\}_{k=1}^{\infty}| \quad \{v_{k\,ttt}\}_{k=1}^{\infty} \in L_2(Q),\ \{v_k\}_{k=1}^{\infty} \in W_2(Q)\}$$

обозначим класс векторных функций, удовлетворяющих соответствующим граничным условиям (22)–(23).
Определим норму в этом классе $W(Q)$ следующим образом:

$$[v]^2_{W(Q)} \equiv \frac{\varepsilon}{\delta} \langle v_{ttt}\rangle_0^2 + \langle v\rangle_2^2$$

Определение 2

Обобщённым решением задачи (18)–(20) *называется векторная функция* $\{\upsilon_k\}_{k=1}^{\infty} \in W(Q)$, *удовлетворяющая уравнению* (18) *почти всюду в области* Q.

Доказана разрешимость задачи (18)–(20) методом последовательных приближений, а именно, рассматривается следующая система нелинейных нагруженных уравнений третьего порядка с малым параметром:

$$L_\varepsilon u_{k,\varepsilon}^{(\theta)} = -\varepsilon u_{k,\varepsilon\ ttt}^{(\theta)} + L_0 u_{k,\varepsilon}^{(\theta)} + k^2 u_{k,\varepsilon}^{(\theta)}$$

$$= \frac{u_{k,\varepsilon}^{(\theta-1)}}{H}\left[f_2 \sum_{m=1}^{\infty} m^2 u_{m,\varepsilon}^{(\theta-1)} \sin m\ell_1 - f_1 \sum_{m=1}^{\infty} m^2 u_{m,\varepsilon}^{(\theta-1)} \sin m\ell_2 + f_2 L_1 \varphi_1 - f_1 L_1 \varphi_2\right]$$

$$+\frac{f_k}{H}\left[\varphi_1 \sum_{m=1}^{\infty} m^2 u_{m,\varepsilon}^{(\theta-1)} \sin m\ell_2 - \varphi_2 \sum_{m=1}^{\infty} m^2 u_{m,\varepsilon}^{(\theta-1)} \sin m\ell_1 + \varphi_1 L_1 \varphi_2 - \varphi_2 L_1 \varphi_1\right]$$

$$+g_k \equiv F(u_{k,\varepsilon}^{(\theta-1)}) \tag{21}$$

с полунелокальными граничными условиями

$$\gamma D_t^p u_{k,\varepsilon}^{(\theta)}\Big|_{t=0} = D_t^p u_{k,\varepsilon}^{(\theta)}\Big|_{t=T} \quad p=0,1,2, \tag{22}$$

$$u_{k,\varepsilon x}^{(\theta)}\Big|_{x=-1} = u_{k,\varepsilon x}^{(\theta)}\Big|_{x=1} = 0, \tag{23}$$

где $\varepsilon > 0$, $\theta = 0,1,2,...,\quad k = 1,2,3...$, $u_{k,\varepsilon}^{(-1)} \equiv 0$.

Лемма 1

Пусть выполнены все условия теоремы 1, тогда для решения задачи (21)–(23) справедливы следующие оценки:

I) $\frac{\varepsilon}{\delta}\left\langle u_{\varepsilon\, tt}^{(\theta)}\right\rangle_0^2 + \left\langle u_\varepsilon^{(\theta)}\right\rangle_1^2 < 2\gamma_0,$

II) $\frac{\varepsilon}{\delta}\left\langle u_{\varepsilon\, ttt}^{(\theta)}\right\rangle_0^2 + \left\langle u_\varepsilon^{(\theta)}\right\rangle_2^2 < 2\gamma_0.$

Рассмотрим тождество

$$2\Big(L_\varepsilon u_{k,\varepsilon}^{(\theta)}, e^{-\mu t} u_{k,\varepsilon t}^{(\theta)}\Big)_0 = 2\Big(F_\varepsilon(u_{k,\varepsilon}^{(\theta-1)}), e^{-\mu t} u_{k,\varepsilon t}^{(\theta)}\Big)_0. \tag{24}$$

Интегрируя по частям и принимая во внимание граничные условия (22), (23) и $\gamma^2 = e^{\mu T}$, и используя неравенство Коши с σ-ой получим

$$\varepsilon e^{-\mu T} \left\| u_{k,\varepsilon tt}^{(\theta)} \right\|_0^2 + \delta e^{-\mu T} \left\| u_{k,\varepsilon}^{(\theta)} \right\|_1^2$$

$$\leq \sigma \|g_k\|_0^2 + 2\mathfrak{F} \left(\left(1 + a + \|\alpha\|_C^2\right) \sum_{i=1,2} \sum_{|\alpha|=1}^{3} \|D^\alpha \varphi_i\|_C^2 + \sum_{i=1,2} \|g_i\|_{C^1}^2 \right) \|f_k\|_1^2$$

$$+2\sigma\mathfrak{F} \left(\left(1 + a + \|\alpha\|_C^2\right) \sum_{i=1,2} \sum_{|\alpha|=1}^{3} \|D^\alpha \varphi_i\|_C^2 + \sum_{i=1,2} \|g_i\|_{C^1}^2 \right) \left\| u_{k,\varepsilon}^{(\theta-1)} \right\|_1^2$$

$$+\sigma \frac{\pi^2}{6} c_2^2 \left(\|\varphi_0\|_C^2 + \|\varphi_1\|_C^2 \right) \|f_k\|_1^2 \left(\sum_{m=1}^{\infty} \left(1 + m^2\right)^3 \left\| u_{m,\varepsilon}^{(\theta-1)} \right\|_1^2 \right)$$

$$+\sigma \frac{\pi^2}{6} c_2^2 \left(\|f_0\|_C^2 + \|f_1\|_C^2 \right) \left\| u_{k,\varepsilon}^{(\theta-1)} \right\|_1^2 \left(\sum_{m=1}^{\infty} \left(1 + m^2\right)^3 \left\| u_{m,\varepsilon}^{(\theta-1)} \right\|_1^2 \right), \tag{25}$$

где $\delta = \min\left(\delta_1/2, \mu\right)$.

Здесь мы приняли σ равным $\sigma = \frac{14}{\delta_0}$, откуда следует $\delta_0 - 7\sigma^{-1} = \frac{\delta_0}{2}$. Теперь, умножая (28) на $\left(1+\lambda_k^2\right)^3$ и суммируя по k от 1 до ∞, получаем первую рекуррентную формулу

$$\frac{\varepsilon}{\delta}\left\langle u_{\varepsilon\ tt}^{(\theta)}\right\rangle_0^2 + \left\langle u_{\varepsilon}^{(\theta)}\right\rangle_1^2 < \gamma_{00} + \gamma_{11}\left\langle u_{\varepsilon}^{(\theta-1)}\right\rangle_1^2 + \gamma_{22}\left\langle u_{\varepsilon}^{(\theta-1)}\right\rangle_1^4, \tag{26}$$

где

$$\gamma_{00} = \frac{14}{\delta_0}\left[g\right]_{0,3}^2 + 2\frac{14}{\delta_0}\varepsilon_{\varphi,g}\mathfrak{F}\left[f\right]_{1,3}^2,$$

$$\gamma_{11} = 2\frac{14}{\delta_0}\varepsilon_{\varphi,g}\mathfrak{F} + \frac{14}{\delta_0}\frac{\pi^2}{3}c_2^2\mathfrak{F}\left[f\right]_{1,3}^2,$$

$$\gamma_{22} = \frac{14}{\delta_0}\frac{\pi^2}{3}c_2^2\mathfrak{F}.$$

Для удобства в (26) вводятся следующие обозначения: $J_1^{(\theta)} = \left\langle u_{\varepsilon}^{(\theta)}\right\rangle_1^2$ и $I_2^{(\theta)} = \left\langle u_{\varepsilon\ tt}^{(\theta)}\right\rangle_0^2$. Так как $\gamma_{00} < \gamma_0$, $\gamma_{11} < \gamma_1$, $\gamma_{22} < \gamma_2$, то из (26) получаем следующую рекуррентную формулу

$$\frac{\varepsilon}{\delta}I_2^{(\theta)} + J_1^{(\theta)} \le \gamma_0 + \gamma_1 J_1^{(\theta-1)} + \gamma_2 J_1^{2(\theta-1)}. \tag{27}$$

Замечание 2.

Обратим внимание, что для линейных обратных задач в рекуррентной формуле (27) коэффициент γ_2 всегда будет равен нулю. Однако для нелинейных обратных задач γ_2 не равен нулю. Это усложняет ограниченный характер итерационного процесса.

Докажем ограниченность итерационного процесса. В качестве начального приближения возьмём $u_{k,\varepsilon}^{(-1)} = 0$. Тогда из задачи (21)–(23) для нулевого приближения имеем

$$\frac{\varepsilon}{\delta} I_2^{(0)} + J_1^{(0)} \leq \gamma_0 < 2\gamma_0.$$

Отсюда из рекуррентной формулы (27) с учётом условий теоремы 1 получаем следующую оценку:

$$\frac{\varepsilon}{\delta} I_2^{(1)} + J_1^{(1)} < \gamma_0 + 2\gamma_0\gamma_1 + 4\gamma_0^2\gamma_2 < 2\gamma_0. \tag{28}$$

Продолжая этот процесс, по индукции из (27), учитывая неравенство $\gamma_1 + 2\gamma_0\gamma_2 < \frac{1}{2}$, следующее из (28), получаем первую априорную оценку для $\forall\,\theta$, $\theta = 2, 3, \ldots$,

$$\frac{\varepsilon}{\delta} I_2^{(\theta)} + J_1^{(\theta)} < \gamma_0 + \gamma_1 J_1^{(\theta-1)} + \gamma_2 J_1^{2(\theta-1)} < \gamma_0 + 2\gamma_0\gamma_1 + 4\gamma_0^2\gamma_2 < 2\gamma_0.$$

Таким образом, первая априорная оценка леммы 1 доказана.

Аналогично доказывается ***II)* априорная оценка**, который получается из тождества

$$\left|-2\left(L_\varepsilon u_{k,\varepsilon}^{(\theta)}, Pu_{k,\varepsilon}^{(\theta)}e^{-\mu t}\right)_0\right| = \left|-2\left(F_\varepsilon(u_{k,\varepsilon}^{(\theta-1)}), Pu_{k,\varepsilon}^{(\theta)}e^{-\mu t}\right)_0\right| \qquad (29)$$

где $Pu_{k,\varepsilon}^{(\theta)} = u_{k,\varepsilon\ ttt}^{(\theta)} - u_{k,\varepsilon\ tt}^{(\theta)} + u_{k,\varepsilon\ xx}^{(\theta)} - u_{k,\varepsilon\ t}^{(\theta)}$.

Введём теперь новую функцию по формуле $\vartheta_{k,\varepsilon}^{(\theta)} = u_{k,\varepsilon}^{(\theta)} - u_{k,\varepsilon}^{(\theta-1)}$, $k = 1, 2, ..., \theta = 0, 1, ...$ Тогда для неё справедлива следующая лемма.

Лемма 2

Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда для функций $\left\{\vartheta_k^{(\theta)}\right\} \in W(Q)$ *справедливы следующие оценки:*

III) $\frac{\varepsilon}{\delta}\left\langle \vartheta_{\varepsilon\ tt}^{(\theta)}\right\rangle_0^2 + \left\langle \vartheta_{\varepsilon}^{(\theta)}\right\rangle_1^2 < 2\gamma_0 q^\theta$,

IV) $\frac{\varepsilon}{\delta}\left\langle \vartheta_{\varepsilon\ ttt}^{(\theta)}\right\rangle_0^2 + \left\langle \vartheta_{\varepsilon}^{(\theta)}\right\rangle_2^2 < 2\gamma_0 q^\theta$,

где $q < \frac{1}{2}$, *согласно условиям теоремы 1.*

$$q \equiv \gamma_1 + 2\gamma_0\gamma_2 = m_1\left(\varepsilon_{\varphi,g} + m_3\,[g]_{1,3}^2 + (m_2 + \varepsilon_{\varphi,g}m_3)\,[f]_{2,3}^2\right)$$

Доказательство. Из (13)–(15) для функций $\left\{\vartheta_{k,\varepsilon}^{(\theta)}\right\} \in W(Q)$ получаем следующую задачу:

$$L_\varepsilon \vartheta_{k,\varepsilon}^{(\theta)} = -\varepsilon \vartheta_{k,\varepsilon\, ttt}^{(\theta)} + L_0 \vartheta_{k,\varepsilon}^{(\theta)} + k^2 \vartheta_{k,\varepsilon}^{(\theta)}$$

$$= \frac{1}{H} u_{k,\varepsilon}^{(\theta-1)} f_2 \sum_{m=1}^{\infty} m^2 u_{m,\varepsilon}^{(\theta-1)} \sin m\ell_1 - \frac{1}{H} u_{k,\varepsilon}^{(\theta-1)} f_1 \sum_{m=1}^{\infty} m^2 u_{m,\varepsilon}^{(\theta-1)} \sin m\ell_2$$

$$-\frac{1}{H} u_{k,\varepsilon}^{(\theta-2)} f_2 \sum_{m=1}^{\infty} m^2 u_{m,\varepsilon}^{(\theta-2)} \sin m\ell_1 + \frac{1}{H} u_{k,\varepsilon}^{(\theta-2)} f_1 \sum_{m=1}^{\infty} m^2 u_{m,\varepsilon}^{(\theta-2)} \sin m\ell_2$$

$$+\frac{1}{H} \vartheta_{k,\varepsilon}^{(\theta-1)} \left[f_2 L_1 \varphi_1 - f_1 L_1 \varphi_2 \right]$$

$$+\frac{1}{H} f_k \left[\varphi_1 \sum_{m=1}^{\infty} m^2 \vartheta_m^{(\theta-1)} \sin m\ell_2 - \varphi_2 \sum_{m=1}^{\infty} m^2 \vartheta_m^{(\theta-1)} \sin m\ell_1 \right] \tag{30}$$

с полунелокальными граничными условиями

$$\gamma\, D_t^p \vartheta_{k,\varepsilon}^{(\theta)} \Big|_{t=0} = D_t^p \vartheta_{k,\varepsilon}^{(\theta)} \Big|_{t=T}, \quad p = 0, 1, 2, \tag{31}$$

$$\vartheta_{k,\varepsilon x}^{(\theta)} \Big|_{x=-1} = \vartheta_{k,\varepsilon x}^{(\theta)} \Big|_{x=1} = 0, \tag{32}$$

где $k = 1, 2, ..., \theta = 0, 1, ...$.

Как в случае леммы 1, для получения оценки *III)* интегрируем по частям следующий тождество учитывая условия теоремы 1 и (31)-(32):

$$\left|-2\left(L_\varepsilon \vartheta_k^{(\theta)}, e^{-\mu t}\vartheta_{tk,\varepsilon}^{(\theta)}\right)_0\right| = \left|-2\left(F_k(u_{k,\varepsilon}^{(\theta-1)}) - F_k(u_{k,\varepsilon}^{(\theta-2)}), e^{-\mu t}\vartheta_{tk,\varepsilon}^{(\theta)}\right)_0\right|. \tag{33}$$

Для получения оценки *IV)* делаем тоже самое для тождества

$$\left|-2\left(L_\varepsilon \vartheta_{k,\varepsilon}^{(\theta)}, e^{-\mu t}P\vartheta_{k,\varepsilon}^{(\theta)}\right)_0\right| = \left|-2\left(F_k(u_{k,\varepsilon}^{(\theta-1)}) - F_k(u_{k,\varepsilon}^{(\theta-2)}), e^{-\mu t}P\vartheta_{k,\varepsilon}^{(\theta)}\right)_0\right|, \tag{34}$$

где $P\vartheta_{k,\varepsilon}^{(\theta)} = \vartheta_{k,\varepsilon ttt}^{(\theta)} - \vartheta_{k,\varepsilon tt}^{(\theta)} + \vartheta_{k,\varepsilon xx}^{(\theta)} - \vartheta_{k,\varepsilon t}^{(\theta)}$.

Теорема 2

Пусть выполнены все условия теоремы 1. Тогда задача (8)–(10) *имеет единственное решение в* $W(Q)$.

Для доказательства теоремы покажем, что последовательность $\{u_k^{(l)}\} \in W(Q)$ является фундаментальной. Предположим, что $\left\{u_\varepsilon^{(\theta)}\right\}, \left\{u_\varepsilon^{(\theta-1)}\right\} \in W(Q)$. Теперь рассмотрим новые функции $\left\{\vartheta_k^{(\theta)}\right\} = \left\{u_k^{(\theta)} - u_k^{(\theta-1)}\right\}$.

Для этих функций справедлива априорная оценка $IV)$ из леммы 2, т.е.

$$\left[\vartheta_\varepsilon^{(\theta)}\right]^2_{W(Q)} < 2\gamma_0 q^\theta. \tag{35}$$

Докажем теперь, что последовательность функций $\{u_\varepsilon^{(\theta)}\} \in W(Q)$ является фундаментальной. Для этого, используя оценку (35) и неравенство треугольника, получаем следующее неравенство

$$\left[u_\varepsilon^{(\theta+p)} - u_\varepsilon^{(\theta)}\right]^2_{W(Q)} \le \left[u_\varepsilon^{(\theta+p)} - u_\varepsilon^{(\theta+p-1)}\right]^2_{W(Q)} + \left[u_\varepsilon^{(\theta+p-1)} - u_\varepsilon^{(\theta+p-2)}\right]^2_{W(Q)} + ...$$

$$+ \left[u_\varepsilon^{(\theta+1)} - u_\varepsilon^{(\theta)}\right]^2_{W(Q)} \le 2\gamma_0 \left(q^{\theta+p} + q^{\theta+p-1} + ... + q^{\theta+1}\right)$$

$$= 2\gamma_0 q^{\theta+1}(1 + q + q^2 + ... + q^p) \le \frac{2\gamma_0 q^{\theta+1}}{1-q}.$$

Ясно, что при достаточно большом θ, поскольку $q < \frac{1}{2}$, эта величина сколь угодно мала. Отсюда следует, что последовательность $\left\{ u_\varepsilon^{(\theta)} \right\}$ является фундаментальной. Следовательно, задача (18)-(20) имеет решение в пространстве $W(Q)$, то есть $\left\{u_\varepsilon^{(\theta)}\right\} \to \{u_\varepsilon\}$. Отсюда следует, что функции $\{u_\varepsilon\} \in W(Q)$ являются решениями задачи (18)-(20).

Теперь покажем, что $\{u_{k,\varepsilon}\}$ имеет предел в подходящем пространстве, а предельная функциональная последовательность $\{u_k\}$ является решением задачи (8)–(10).
Заметим, что $F(u_{k,\varepsilon})$ в (18) состоит из нелинейных членов. Сначала оценим этот член. Используя лемму A.2 и неравенство Коши, имеем:

$$\int\limits_Q \left(\sum_{m=1}^{\infty} m^2 u_{m,\varepsilon_j} u_{k,\varepsilon_j} \sin m\ell_1\right)^2 dxdt = \int\limits_Q \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} m^3 u_{m,\varepsilon_j} u_{k,\varepsilon_j} \sin m\ell_1\right)^2 dxdt$$

$$\leq \int\limits_Q \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \sum_{m=1}^{\infty} m^6 u_{m,\varepsilon_j}^2 u_{k,\varepsilon_j}^2 dxdt = \frac{\pi^2}{6} \sum_{m=1}^{\infty} m^6 \int\limits_Q u_{m,\varepsilon_j}^2 u_{k,\varepsilon_j}^2 dxdt$$

$$\leq \frac{\pi^2}{6} \sum_{m=1}^{\infty} m^6 \left(\int\limits_Q u_{m,\varepsilon_j}^4 dxdt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_Q u_{k,\varepsilon_j}^4 dxdt\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \frac{\pi^2}{6} c_2^2 \sum_{m=1}^{\infty} m^6 \left\|u_{m,\varepsilon_j}\right\|_{W_2^1(Q)}^2 \left\|u_{k,\varepsilon_j}\right\|_{W_2^1(Q)}^2$$

$$\leq \frac{\pi^2}{6} c_2^2 \sum_{m=1}^{\infty} \left(1+m^2\right)^3 \left\|u_{m,\varepsilon_j}\right\|_{W_2^1(Q)}^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(1+k^2\right)^3 \left\|u_{k,\varepsilon_j}\right\|_{W_2^1(Q)}^2 \leq \frac{\pi^2}{6} c_2^2 (2\gamma_0)^2. \tag{36}$$

Здесь мы имеем ограниченность подынтегрального выражения в $L_2(Q)$, что позволяет нам выделить слабо сходящуюся подпоследовательность в $L_2(Q)$. Итак, из оценки леммы 1 можно перейти к пределу в подпоследовательности $\left\{u_{k,\varepsilon_j}\right\}$, такой, что

$$u_{k,\varepsilon_j} \to u_k \qquad W_2^2;$$

$$u_{k,\varepsilon_j} \to u_k \qquad W;$$

учитывая вышеприведенные результаты и (36)

$$F\left(u_{k,\varepsilon_j}\right) \to F\left(u_k\right) \qquad L_2.$$

Из леммы 1 следует, что $\sqrt{\varepsilon_j} u_{k,\varepsilon_j ttt}$ ограничено, поэтому имеем $\sqrt{\varepsilon_j}\sqrt{\varepsilon_j} u_{k,\varepsilon_j ttt} \to 0$ в $L_2(Q)$. Поскольку сходимость в $L_2(Q)$ сильнее слабой сходимости, то отсюда следует, что $\sqrt{\varepsilon_j}\left(\sqrt{\varepsilon_j} u_{k,\varepsilon_j ttt}, \vartheta\right) \to 0$. Переходя к слабому пределу в (18) при $\varepsilon_j \to 0$, получаем $Lu_k = F(u_k)$. Это означает, что функция u_k при фиксированном k будет единственным решением задачи (8)–(10) из $W2^2(Q)$ [12, 18]. Это доказывает теорему 2.

Докажем теорему 1.
Поскольку все условия теоремы 1 выполнены, то, применяя равенства Парсеваля–Стеклова [20] для решения задачи (8)$-$(10), получаем решение задачи (1)$-$(6) из указанного класса U.
Оценка для $c(x,t)$:

$$\|c\|_{C(Q)} = \max_{Q} |c(x,t)|$$

$$= \max_{Q} \left| \frac{1}{H} \left[f_2 \sum_{m=1}^{\infty} m^2 u_m \sin m\ell_1 - f_1 \sum_{m=1}^{\infty} m^2 u_m \sin m\ell_2 + f_2 L_1 \varphi_1 - f_1 L_1 \varphi_2 \right] \right|$$

$$\leq 2\mathfrak{F} \sum_{m=1}^{\infty} m^2 \max |u_m| + \mathfrak{F} \left(\max |L_1 \varphi_1| + \max |L_1 \varphi_2| \right)$$

$$< 2\mathfrak{F} \frac{\pi^2}{6} c_1 \sum_{m=1}^{\infty} \left(1 + m^2\right) \|u_m\|_2^2 + 2\mathfrak{F}\gamma_0$$

$$< 2\mathfrak{F} \frac{\pi^2}{6} \gamma_0 + 2\mathfrak{F}\gamma_0 < 2\mathfrak{F}\gamma_0 \left(2c_1 + 1\right)$$

Мы можем выбрать данные таким образом, что число $2\mathfrak{F}\gamma_0 \left(2c_1 + 1\right)$ будет меньше r.
Теорема 1 доказана.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!