Реализация 4-мерных классов гомологий многообразиями постоянной отрицательной кривизны

А.А. Гайфуллин

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

Вторая Интернет-видео конференция «День математика и механика», посвященная 220-летию Н.И. Лобачевского,
17 сентября 2012 г.,
Екатеринбург–Москва–Санкт-Петербург–Новосибирск–Казань

Гомологии и бордизмы

Группы гомологий топологического пространства X получаются из групп циклов путём факторизации по отношению гомологичности. Следующий вопрос восходит к работам А. Пуанкаре по основаниям теории гомологий.

Что такое цикл?

Группы гомологий топологического пространства X получаются из групп циклов путём факторизации по отношению гомологичности. Следующий вопрос восходит к работам А. Пуанкаре по основаниям теории гомологий.

Что такое цикл?

1. Сингулярные гомологии $H_*(X)$: Цикл — формальная сумма сингулярных симплексов (т. е., непрерывных отображений $f_i : \Delta^n \to X$) с нулевой алгебраической границей.
   Эквивалентно: Цикл — отображение $f : Z^n \to X$, где Z^n — псевдомногообразие, т. е., симплициальный комплекс, в котором каждый $(n-1)$-мерный симплекс содержится ровно в двух n-мерных.
   (Пример: $\Sigma T^2 = CT^2 \cup_{T^2} CT^2$.)

Гомологии и бордизмы

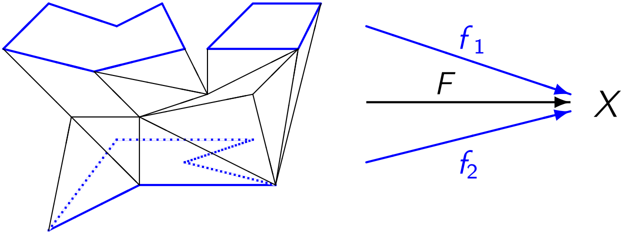
Группы гомологий топологического пространства X получаются из групп циклов путём факторизации по отношению гомологичности. Следующий вопрос восходит к работам А. Пуанкаре по основаниям теории гомологий.

Что такое цикл?

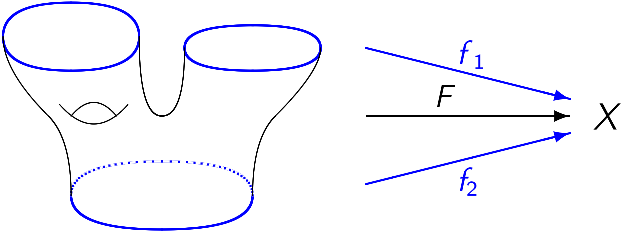
1. Сингулярные гомологии $H_*(X)$: Цикл — формальная сумма сингулярных симплексов (т. е., непрерывных отображений $f_i : \Delta^n \to X$) с нулевой алгебраической границей.
   Эквивалентно: Цикл — отображение $f : Z^n \to X$, где Z^n — псевдомногообразие, т. е., симплициальный комплекс, в котором каждый $(n-1)$-мерный симплекс содержится ровно в двух n-мерных.
   (Пример: $\Sigma T^2 = CT^2 \cup_{T^2} CT^2$.)
2. Бордизмы $\Omega_*(X)$: Цикл — непрерывное отображение $f : M^n \to X$, где M^n — замкнутое гладкое многообразие.

Гомологии и бордизмы

1. Сингулярные гомологии $H_*(X)$:

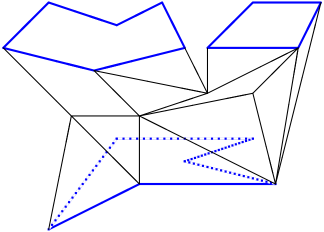


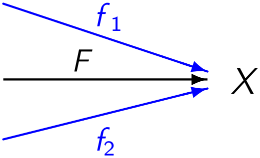
2. Бордизмы $\Omega_*(X)$:



Гомологии и бордизмы

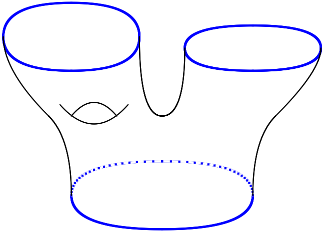
1. Сингулярные гомологии $H_*(X)$:

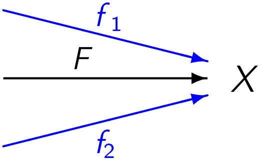




Как устроен гомоморфизм $\varphi\colon \Omega_*(X) \to H_*(X)$?
Каковы его ядро и коядро?
Насколько φ не сюръективен?

2. Бордизмы $\Omega_*(X)$:





Проблема Стинрода о реализации циклов

Проблема (Н. Стинрод, конец 1940-х)

Пусть X — топологическое пространство и $z \in H_n(X, \mathbb{Z})$ — его класс гомологий. Существуют ли ориентированное замкнутое гладкое многообразие M^n и его непрерывное отображение $f : M^n \to X$ такие, что $f_*[M^n] = z$?

Если да, говорят, что z реализуем (по Стинроду).

Неориентированная версия проблемы Стинрода: тот же вопрос для гомологий с коэффициентиами в $\mathbb{Z}_2$ без предположения об ориентируемости M^n.

Теорема Тома

Теорема (Р. Том, 1954)

- *Все классы гомологий с коэффициентами в* $\mathbb{Z}_2$ *реализуемы.*
- *Все целочисленные классы гомологий размерностей* $n \leq 6$ *реализуемы.*
- *Имеется пример нереализуемого 7-мерного класса гомологий.*
- *Каждый класс гомологий реализуем с некоторой кратностью, т. е., для каждого* $z \in H_n(X, \mathbb{Z})$ *существует натуральное* k *такое, что класс* kz *реализуем.*
- *Кратность* k *зависит только от размерности* n *и не зависит от* X *и* z.

Дальнейшие результаты

С.П. Новиков, 1962:

- Описал препятствия к реализуемости.
- Каждый класс гомологий реализуем с нечётной кратностью.
- Если гомологии пространства X не содержат нечётного кручения, то все классы гомологий пространтсва X реализуемы.

В.М. Бухштабер, 1969:

- Нашёл связь между проблемой Стинрода и спектральной последовательностью Атьи–Хирцебруха.
- Вычислил модули дифференциалов спектральной последовательности Атьи–Хирцебруха и получил наилучшую известную оценку

$$k(n) \leqslant \prod_{\substack{p \text{ нечётное} \\ \text{простое}}} p^{\left[\frac{n-2}{2(p-1)}\right]}$$

Реализация циклов специальными многообразиями

Вопрос

Какой класс многообразий нужен, чтобы реализовать (с некоторыми кратностями) все классы гомологий?

Реализация циклов специальными многообразиями

Вопрос

Какой класс многообразий нужен, чтобы реализовать (с некоторыми кратностями) все классы гомологий?

Определение (М. Громов, Дж. Карлсон – Д. Толедо)

Пусть M^n и N^n — ориентированные замкнутые многообразия. Говорят, что M^n доминирует N^n, $M^n \geqslant N^n$, если существует отображение ненулевой степени $M^n \to N^n$.

S^n — наименьший элемент, $M^n \geqslant S^n$. Нет наибольшего элемента.

Проблема (Дж. Карлсон – Д. Толедо, 1989)

Найти не очень большой максимальный класс многообразий по отношению к отношению доминирования, т. е., класс $\mathcal{M}_n$ такой, что любое ориентированное замкнутое многообразие N^n доминируется некоторым $M^n \in \mathcal{M}_n$.

Отношение доминирования

$n = 2$. Всё ясно: $S^2_g \geqslant S^2_h \;\Leftrightarrow\; g \geqslant h$.

Отношение доминирования

$n = 2$. Всё ясно: $S^2_g \geqslant S^2_h \;\Leftrightarrow\; g \geqslant h$.

$n = 3$. Р. Брукс, 1985: каждое 3-мерное многообразие N^3 доминируется гиперболическим многообразием (многообразием с метрикой постоянной отрицательной кривизны).

Отношение доминирования

$n = 2$. Всё ясно: $S_g^2 \geqslant S_h^2 \iff g \geqslant h$.

$n = 3$. Р. Брукс, 1985: каждое 3-мерное многообразие N^3 доминируется гиперболическим многообразием (многообразием с метрикой постоянной отрицательной кривизны).

$n \geqslant 4$. Конструкция гиперболизации Громова: каждое многообразие доминируется со степенью 1 многообразием неположительной кривизны в смысле А.Д. Александрова.
П. Онтанеда, 2011: каждое многообразие доминируется со степенью 1 римановым многообразием с секционной кривизной в сколь угодно малом интервале $[-1-\varepsilon, -1]$.

Отношение доминирования

$n = 2$. Всё ясно: $S_g^2 \geqslant S_h^2 \;\Leftrightarrow\; g \geqslant h$.

$n = 3$. Р. Брукс, 1985: каждое 3-мерное многообразие N^3 доминируется гиперболическим многообразием (многообразием с метрикой постоянной отрицательной кривизны).

$n \geqslant 4$. Конструкция гиперболизации Громова: каждое многообразие доминируется со степенью 1 многообразием неположительной кривизны в смысле А.Д. Александрова.

П. Онтанеда, 2011: каждое многообразие доминируется со степенью 1 римановым многообразием с секционной кривизной в сколь угодно малом интервале $[-1-\varepsilon, -1]$.

Дж. Карлсон – Д. Толедо, 1989: существуют многообразия, которые не доминируются никаким кэлеровым многообразием.

Д. Котщик – К. Лёх, 2008: существуют многообразия, которые не доминируются никаким прямым произведением многообразий положительных размерностей.

Гипотеза (Д. Котщик – К. Лёх, 2008)

Любое многообразие (размерности $\geqslant 2$) доминируется гиперболическим многообразием.

Напомним, что любое замкнутое гиперболическое многообразие имеет вид Λ^n/Γ, где Γ — свободная от кручения равномерная дискретная группа изометрий пространства Лобачевского Λ^n.

Эта гипотеза очевидна в размерности 2 и верна в размерности 3 согласно вышеупомянутому результату Р. Брукса (1985).

Теорема (Г., 2012)

Гипотеза Котщика–Лёх верна в размерности 4.

URC-многообразия

Определение (Г., 2012)

Ориентированное замкнутое многообразие M^n называется URC-многообразием, если любой класс гомологий $z \in H_n(X, \mathbb{Z})$ любого топологического пространства X может быть реализован с некоторой кратностью образом конечнолистного накрытия над M^n.

Определение (Г., 2012)

Ориентированное замкнутое многообразие M^n называется URC-многообразием, если любой класс гомологий $z \in H_n(X,\mathbb{Z})$ любого топологического пространства X может быть реализован с некоторой кратностью образом конечнолистного накрытия над M^n.

Существуют ли URC-многообразия? Как устроен класс всех URC-многообразий?

Мы построим много примеров URC-многообразий.

Конструкция Дэвиса–Янушкевича

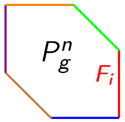
М. Дэвис, Т. Янушкевич, 1991:

Пусть P^n — простой многогранник, $F_1, \dots, F_m$ — его гиперграни.

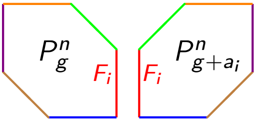
Рассмотрим группу $\mathbb{Z}_2^m$ с базисом $a_1, \dots, a_m$.

Возьмём 2^m экземпляров P^n_g многогранника P^n, пронумерованных элементами группы $g \in \mathbb{Z}_2^m$.

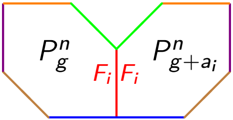
Для каждых g и i склеим многогранники P^n_g и $P^n_{g+a_i}$ вдоль гиперграни F_i. Многообразие $\mathcal{R}_{P^n}$:



М. Дэвис, Т. Янушкевич, 1991:
Пусть P^n — простой многогранник, $F_1, \dots, F_m$ — его гиперграни.
Рассмотрим группу $\mathbb{Z}_2^m$ с базисом $a_1, \dots, a_m$.
Возьмём 2^m экземпляров P^n_g многогранника P^n, пронумерованных элементами группы $g \in \mathbb{Z}_2^m$.
Для каждых g и i склеим многогранники P^n_g и $P^n_{g+a_i}$ вдоль гиперграни F_i. Многообразие $\mathcal{R}_{P^n}$:

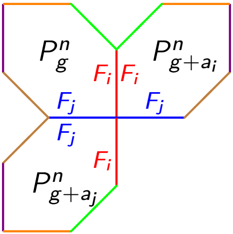


М. Дэвис, Т. Янушкевич, 1991:
Пусть P^n — простой многогранник, $F_1, \ldots, F_m$ — его гиперграни.
Рассмотрим группу $\mathbb{Z}_2^m$ с базисом $a_1, \ldots, a_m$.
Возьмём 2^m экземпляров P^n_g многогранника P^n, пронумерованных элементами группы $g \in \mathbb{Z}_2^m$.
Для каждых g и i склеим многогранники P^n_g и $P^n_{g+a_i}$ вдоль гиперграни F_i. Многообразие $\mathcal{R}_{P^n}$:

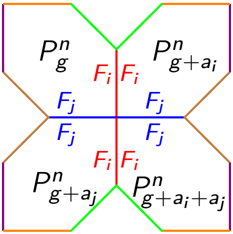


Конструкция Дэвиса–Янушкевича

М. Дэвис, Т. Янушкевич, 1991:
Пусть P^n — простой многогранник, $F_1, \dots, F_m$ — его гиперграни.
Рассмотрим группу $\mathbb{Z}_2^m$ с базисом $a_1, \dots, a_m$.
Возьмём 2^m экземпляров P_g^n многогранника P^n, пронумерованных элементами группы $g \in \mathbb{Z}_2^m$.
Для каждых g и i склеим многогранники P_g^n и $P_{g+a_i}^n$ вдоль гиперграни F_i. Многообразие $\mathcal{R}_{P^n}$:



М. Дэвис, Т. Янушкевич, 1991:
Пусть P^n — простой многогранник, $F_1, \dots, F_m$ — его гиперграни.
Рассмотрим группу $\mathbb{Z}_2^m$ с базисом $a_1, \dots, a_m$.
Возьмём 2^m экземпляров P_g^n многогранника P^n, пронумерованных элементами группы $g \in \mathbb{Z}_2^m$.
Для каждых g и i склеим многогранники P_g^n и $P_{g+a_i}^n$ вдоль гиперграни F_i. Многообразие $\mathcal{R}_{P^n}$:



Примеры URC-многообразий

Теорема (Г., 2012)

Пусть P^n — простой многогранник, удовлетворяющий одному из следующих условий:

1. *Граница двойственного симплициального многогранника изоморфна барицентрическому подразделению некоторой триангуляции сферы.*
2. *P^n — компактный простой многогранник в пространстве Лобачевского Λ^n, содержащий шар радиуса больше, чем*
$$\rho_n = \log\left(\sqrt{\frac{n(n+1)(n+2)}{6}} + \sqrt{\frac{n(n+1)(n+2)}{6} - 1}\right).$$
3. *P^n — компактный многогранник в Λ^n с прямыми двугранными углами.*

Тогда $\mathcal{R}_{P^n}$ — URC-многообразие.

Гиперболические URC-многообразия

Если $P^n \subset \Lambda^n$ — простой многогранник с прямыми двугранными углами, то $\mathcal{R}_{P^n}$ — гиперболическое URC-многообразие.

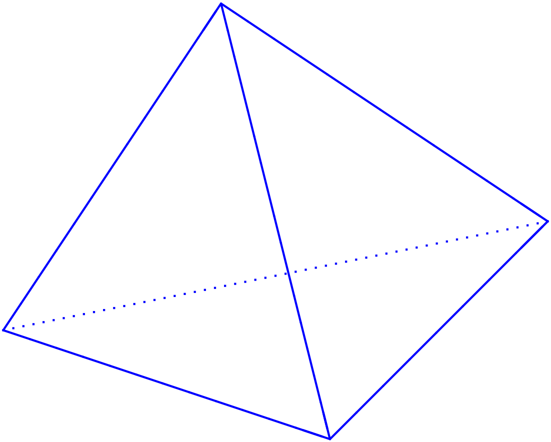
Пусть $W \subset \mathrm{Isom}\,\Lambda^n$ — группа, порождённая отражениями в гипергранях P^n. Тогда имеется свободная от кручения подгруппа $\Gamma \subset W$ индекса 2^m такая, что $\mathcal{R}_{P^n} = \Lambda^n/\Gamma$.

В Λ^2, Λ^3 и Λ^4 есть компактные многогранники с прямыми двугранными углами. (Например, правильный додекаэдр в Λ^3 и правильный 120-гранник в Λ^4.)
Значит, в размерностях 2, 3, 4 имеются гиперболические URC-многообразия.
Э.Б. Винберг (1984) доказал несуществование компактных многогранников с прямыми двугранными углами в Λ^n, $n \geqslant 5$.

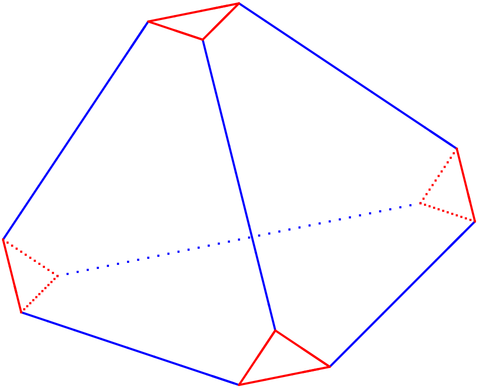
Вопрос

Существуют ли гиперболические URC-многообразия размерностей $\geqslant 5$?

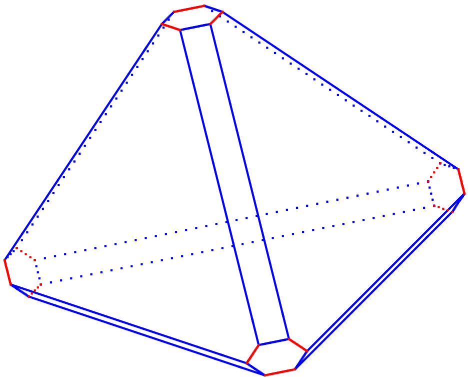
Пермутоэдр



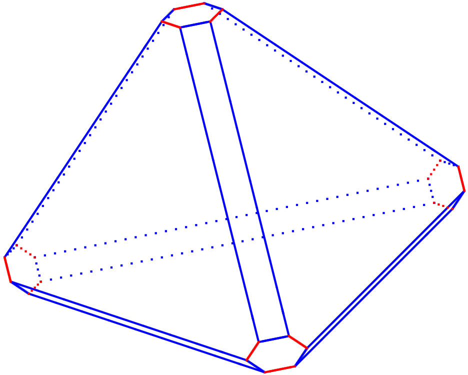
Пермутоэдр



Пермутоэдр



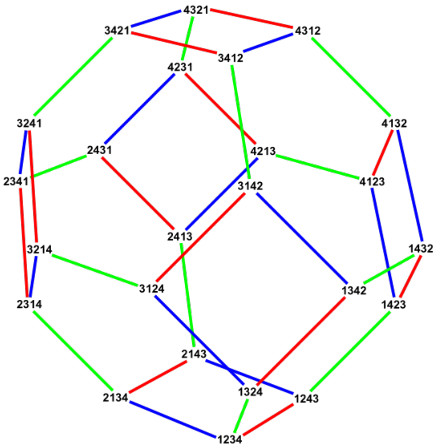
Пермутоэдр



$\boxed{\text{Гиперграни } \Pi^n} \longleftrightarrow \boxed{\text{Непустые собственные грани } \Delta^n}$

$$\#\ \text{гиперграней} = 2^{n+1} - 2$$

Пермутоэдр



Пермутоэдр Π^n может быть реализован как выпуклая оболочка $(n+1)!$ точек $(\nu(1), \nu(2), \ldots, \nu(n+1)) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\nu \in \mathfrak{S}_{n+1}$.

К. Томеи, 1984: Пусть M_0^n — многообразие симметрических трёхдиагональных вещественных $(n+1)\times(n+1)$-матриц

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & a_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n+1} \end{pmatrix}$$

с фиксированным простым спектром $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_{n+1}$.

Это многообразие изоспектральных матриц является носителем известной интегрируемой системы — цепочки Тоды.

К. Томеи построил разбиение многообразия M_0^n на 2^n пермутоэдров Π^n.

Многообразие $\mathcal{R}_{\Pi^n}$ есть $2^{2^{n+1}-n-2}$-листное накрытие над M_0^n.

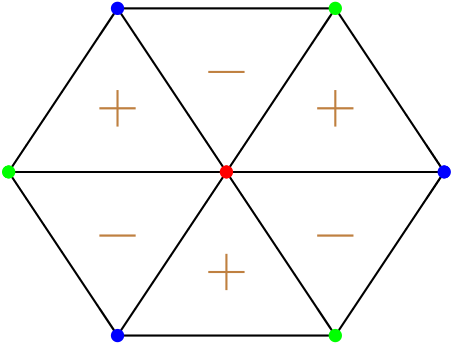
Многообразие M_0^n асферично $(=K(\pi,1))$.

Проблема комбинаторной реализации циклов

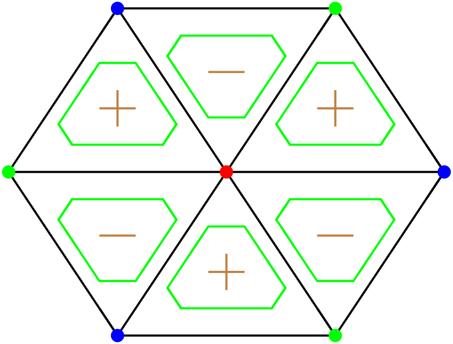
Проблема

Пусть нам дан сингулярный цикл $h : Z^n \to X$, представляющий класс гомологий z, где Z^n — ориентированное псевдомногообразие. Можно ли построить явно ориентированное гладкое многообразие M^n и отображение $f : M^n \to X$ такое, что $f_*[M^n] = qz$ для некоторого натурального q?

Комбинаторная реализация циклов

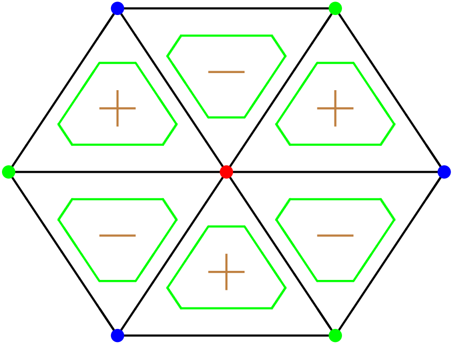


Комбинаторная реализация циклов



Над каждым n-симплексом Z^n расположим q пермутоэдров Π^n.

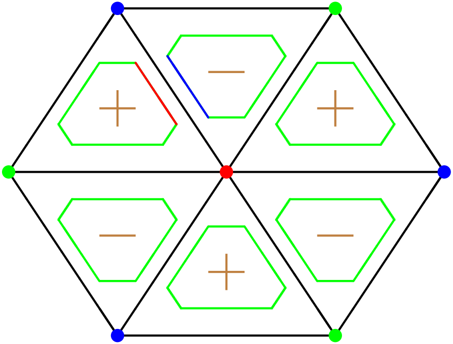
Комбинаторная реализация циклов



Над каждым n-симплексом Z^n расположим q пермутоэдров Π^n.

1. Отождествляем гиперграни соответствующие одному симплексу Z^n.
2. Склеиваем $+$ с $-$.

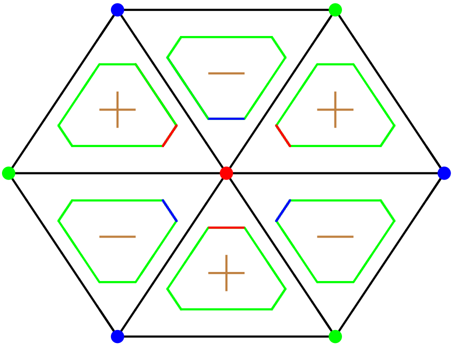
Комбинаторная реализация циклов



Над каждым n-симплексом Z^n расположим q пермутоэдров Π^n.

1. Отождествляем гиперграни соответствующие одному симплексу Z^n.
2. Склеиваем $+$ с $-$.

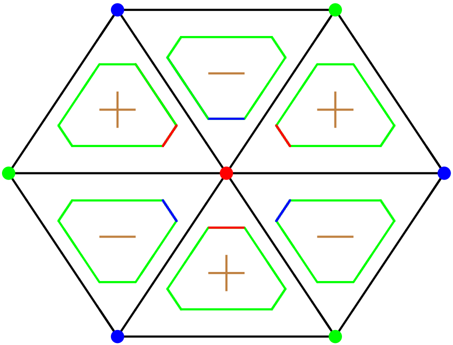
Комбинаторная реализация циклов



Над каждым n-симплексом Z^n расположим q пермутоэдров Π^n.

1. Отождествляем гиперграни соответствующие одному симплексу Z^n.
2. Склеиваем $+$ с $-$.

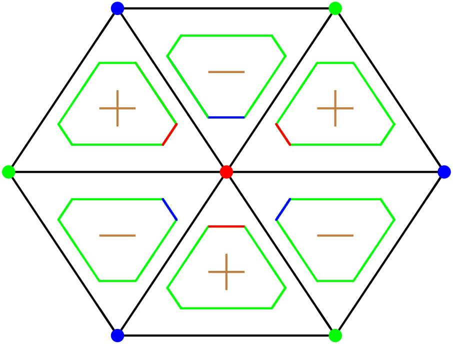
Комбинаторная реализация циклов



Над каждым n-симплексом Z^n расположим q пермутоэдров Π^n.

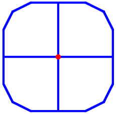
1. Отождествляем гиперграни соответствующие одному симплексу Z^n.
2. Склеиваем $+$ с $-$.

Оказывается, можно выбрать q и процедуру склейки так, чтобы получившийся комплекс обладал следующим свойством:
В каждой вершине сходятся углы ровно 2^n пермутоэдров, причём они сходятся «стандартным образом» — как углы кубов в стандартном кубическом разбиении $\mathbb{R}^n$.



Над каждым n-симплексом Z^n расположим q пермутоэдров Π^n.

1. Отождествляем гиперграни соответствующие одному симплексу Z^n.
2. Склеиваем $+$ с $-$.



Оказывается, можно выбрать q и процедуру склейки так, чтобы получившийся комплекс обладал следующим свойством: В каждой вершине сходятся углы ровно 2^n пермутоэдров, причём они сходятся «стандартным образом» — как углы кубов в стандартном кубическом разбиении $\mathbb{R}^n$.

Значит, мы получили сглаживаемое многообразие.

Следствие

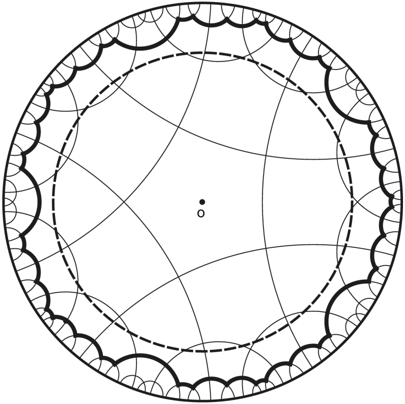
Все такие многообразия M^n, полученные при помощи описанной конструкции (для всех псевдомногообразий Z^n), являются конечнолистными накрытиями над многообразием Томеи M_0^n.

Следствие

Многообразие Томеи M_0^n и многообразие $\mathcal{R}_{\Pi^n}$ являются URC-многообразиями.

Теперь для того, чтобы доказать, что некоторое многообразие Q^n является URC-многообразием, нам достаточно построить отображение ненулевой степени $\widetilde{Q}^n \to M_0^n$, где $\widetilde{Q}^n$ — конечнолистное накрытие многообразия Q^n.

1. Для того, чтобы построить отображение $\mathcal{R}_{P_1^n} \to \mathcal{R}_{P_2^n}$ ненулевой степени, достаточно построить симплициальное отображение $K_1 \to K_2$ ненулевой степени, где K_i — граница симплициального многогранника, двойственного к P_i. (Симплициальное отображение симплициальных комплексов — отображение, переводящее вершины в вершины и линейное на симплексах.)
2. Граница многогранника, двойственного к пермутоэдру Π^n, изоморфна барицентрическому подразделению границы симплекса $(\partial\Delta^n)'$.
3. Если K — достаточно «мелкая» триангуляция S^n, то имеется отображение $K \to (\partial\Delta^n)'$ ненулевой степени.
4. Если $P^n \subset \Lambda^n$ — простой многогранник, содержащий достаточно большой шар, то граница двойственного многогранника — достаточно мелкая триангуляция сферы. Значит, $\mathcal{R}_{P^n}$ — URC-многообразие.



Пусть P^n — компактный многогранник в Λ^n с прямыми двугранными углами, W — группа, порождённая отражениями в гипергранях P^n, $\mathcal{M}_\rho$ — множество всех зеркал отражений из группы W, не пересекающих шар радиуса ρ с центром o.

Пусть P^n_ρ — выпуклый многогранник, ограниченный всеми зеркалами из $\mathcal{M}_\rho$. Тогда $\mathcal{R}_{P^n_\rho}$ — конечнолистное накрытие над $\mathcal{R}_{P^n}$. При достаточно больших ρ, $\mathcal{R}_{P^n_\rho}$ — URC-многообразие. Значит, $\mathcal{R}_{P^n}$ — URC-многообразие.

Спасибо за внимание!