ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ КВАНТОВАНИЕ ТЕОРИИ ЗАМКНУТЫХ СТРУН

А. Г. Сергеев

Математический институт им. В.А.Стеклова РАН

МОСКВА 2012

I. Квантование по Дираку.

Классическая система задается парой $(M, \mathcal{A})$, состоящей из фазового пространства M и алгебры наблюдаемых $\mathcal{A}$.

Фазовое пространство M есть гладкое симплектическое многообразие четной размерности $2n$ с симплектической формой ω. Локально, оно изоморфно *стандартной модели* $M_0 := (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$, где ω_0 – стандартная симплектическая форма на $\mathbb{R}^{2n}$, задаваемая в канонических координатах (p_i, q_i), $i = 1, \dots, n$, на $\mathbb{R}^{2n}$ формулой

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i.$$

Алгебра наблюдаемых $\mathcal{A}$ есть произвольная подалгебра Ли в алгебре Ли $C^\infty(M,\mathbb{R})$ гладких вещественнозначных функций на фазовом пространстве M относительно скобки Пуассона, определяемой симплектической формой ω. В частности, $\mathcal{A}$ может совпадать со всей алгеброй Пуассона $C^\infty(M,\mathbb{R})$.

В случае стандартной модели $M_0 = (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ в качестве алгебры наблюдаемых можно взять *алгебру Гейзенберга* $\mathrm{heis}(\mathbb{R}^{2n})$, которая порождается координатными функциями p_i, q_i, $i = 1, \ldots, n$, и 1, удовлетворяющими коммутационным соотношениям:

$$\{p_i, p_j\} = \{q_i, q_j\} = 0\ ,$$
$$\{p_i, q_j\} = \delta_{ij} \quad \text{при } i, j = 1, \ldots, n.$$

Алгебры наблюдаемых возникают обычно следующим образом. Пусть Г есть некоторая группа Ли, действующая на односвязном фазовом многообразии M симплектическими преобразованиями. Тогда ее алгебру Ли Lie(Г) можно рассматривать как подалгебру алгебры Ли гамильтоновых векторных полей X_f на M, порождаемых гладкими функциями $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$.

В этом случае за алгебру наблюдаемых ham(Г), отвечающую группе Г, можно взять алгебру Ли, состоящую из функций f, для которых $X_f \in \mathrm{Lie}(\Gamma)$, и наделенную скобкой Пуассона в качестве скобки Ли.

Пусть $(M, \mathcal{A})$ есть некоторая классическая система. *Квантованием* этой системы называется неприводимое линейное представление

$$r : \mathcal{A} \longrightarrow \mathrm{End}^{*} H$$

наблюдаемых из $\mathcal{A}$ самосопряженными линейными операторами, действующими в комплексном гильбертовом пространстве H, называемом *пространством квантования.* При этом требуется, чтобы

$$r\left(\{f, g\}\right) = \frac{1}{i}\left[r(f), r(g)\right] = \frac{1}{i}\left(r(f)r(g) - r(g)r(f)\right) \tag{1}$$

для любых $f, g \in \mathcal{A}$ и $r(1) = I$.

Операторы квантования $r(f)$, возникающие в конкретных примерах, оказываются, как правило, неограниченными, поэтому необходимо требовать, чтобы все они имели общую область определения, плотную в H.

Часто бывает удобнее иметь дело с комплексифицированными алгебрами наблюдаемых $\mathcal{A}^{\mathbb{C}}$ или, более общим образом, с *инволютивными* комплексными алгебрами наблюдаемых, т.е. алгебрами Ли $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$, наделенными инволюцией. В этом случае квантование алгебры наблюдаемых $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ будет задаваться неприводимым линейным представлением $r : \mathcal{A}_{\mathbb{C}} \to \operatorname{End} H$ замкнутыми линейными операторами на H, удовлетворяющим помимо условия (1) и нормировки $r(1) = I$ еще и правилу сопряжения: инволюция в $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ переходит под действием r в эрмитово сопряжение.

Мы будем применять приведенное определение квантования к бесконечномерным классическим системам, в которых как фазовые пространства, так и алгебры наблюдаемых являются бесконечномерными. Для бесконечномерных алгебр Ли $\mathcal{A}$ более естественно искать не обычные, а проективные представления. Если нам удастся найти такое представление для заданной алгебры наблюдаемых $\mathcal{A}$, то это будет означать, что мы построили квантование не исходной системы $(M, \mathcal{A})$, а ее расширения $(M, \tilde{\mathcal{A}})$, где $\tilde{\mathcal{A}}$ – подходящее центральное расширение алгебры $\mathcal{A}$, которое определяется коциклом проективного представления.

Применим эти определения к теории замкнутых струн, ограничиваясь для начала гладкими струнами.

Конфигурационное пространство d-мерной бозонной теории гладких замкнутых струн отождествляется с пространством Ω_d гладких петель в d-мерном пространстве Минковского M^d. Иначе говоря, оно состоит из гладких отображений $q : [0, \pi] \to M^d$, все производные которых обращаются в нуль в граничных точках. Ассоциированное с ним *фазовое пространство* состоит из пар отображений (p, q) того же типа, в которых q играет роль "координаты", а p — роль "импульса".

Симплектическая форма на указанном фазовом пространстве задается "струнным аналогом" формы типа "$dp \wedge dq$":

$$\omega(\delta p, \delta q) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \delta p(\sigma) \wedge \delta q(\sigma) d\sigma, \tag{2}$$

где δp, δq – гладкие отображения $[0, \pi] \to M^d$ того же типа, что p и q, интерпретируемые как кокасательные векторы к фазовому пространству.

Рассмотрим отображение, сопоставляющее паре (p, q) отображение $x : [-\pi, \pi] \to M^d$, которое задается формулой

$$x(\sigma) = \begin{cases} p(\sigma) + q'(\sigma) & \text{при } 0 \le \sigma \le \pi\,; \\ p(-\sigma) + q'(-\sigma) & \text{при } -\pi \le \sigma \le 0\,. \end{cases}$$

Это отображение отождествляет введенное фазовое пространство с пространством Ω_d, состоящим из гладких петель в пространстве M^d. Оно также переводит симплектическую форму (2) **на фазовом пространстве в стандартную симплектическую форму на пространстве Ω_d, задаваемую формулой:**

$$\omega(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \langle \xi(\theta), \eta'(\theta) \rangle \, d\theta,$$

где $\xi = \xi(e^{i\theta})$, $\eta = \eta(e^{i\theta})$ – гладкие отображения $[-\pi, \pi] \to M^d$.

Роль *алгебры наблюдаемых* в рассматриваемом случае играет алгебра Ли $\mathcal{A}_d$ группы Ли

$$LM^d \rtimes \mathrm{Diff}_+(S^1),$$

являющейся полупрямым произведением группы петель LM^d и группы $\mathrm{Diff}_+(S^1)$ диффеоморфизмов окружности. Группа петель действует на пространстве Ω_d слева трансляциями, а группа $\mathrm{Diff}_+(S^1)$ справа с помощью репараметризации петель. Будем считать далее для упрощения формул, что $d = 1$, восстанавливая индекс d только там, где это необходимо.

Прежде, чем приступать к квантованию классической системы, отвечающей теории гладких замкнутых струн, построим некоторое гильбертово расширение этой системы.

II. Гильбертово расширение исходной системы.

Введем *соболевское пространство полудифференцируемых функций*

$$V = H_0^{1/2}(S^1, \mathbb{R}),$$

состоящее из функций $f \in L^2(S^1, \mathbb{R})$ с нулевым средним по окружности, имеющих обобщенную производную порядка $1/2$ из $L^2(S^1, \mathbb{R})$.

Иначе говоря, V состоит из функций $f \in L^2(S^1, \mathbb{R})$, ряды Фурье которых имеют вид

$$f(z) = \sum_{n \neq 0} f_n z^n, \quad \bar{f}_n = f_{-n},\ z = e^{i\theta},$$

с конечной соболевской нормой порядка $1/2$

$$\|f\|_{1/2}^2 = \sum_{n \neq 0} |n||f_n|^2 = 2\sum_{n=1}^{\infty} n|f_n|^2 < \infty.$$

Рассмотрим на пространстве V *симплектическую форму* $\omega : V \times V \to \mathbb{R}$, которая определяется в терминах коэффициентов Фурье векторов $\xi, \eta \in V$ по формуле

$$\omega(\xi, \eta) = -i \sum_{n \neq 0} n \xi_n \eta_{-n} = 2 \operatorname{Im} \sum_{n=1}^{\infty} n \xi_n \bar{\eta}_n.$$

Эта форма корректно определена на $H_0^{1/2}(S^1, \mathbb{R})$ и совпадает с продолжением введенной ранее симплектической формы на пространстве гладких петель Ω_d.

Пространство V обладает также *комплексной структурой* J^0, которая определяется в терминах разложений Фурье формулой

$$(J^0 \xi)(z) = -i \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n z^n + i \sum_{n=-\infty}^{-1} \xi_n z^n. \tag{3}$$

Эта комплексная структура совместима с симплектической формой ω в том смысле, что вместе они определяют *риманову метрику* на V по формуле $g^0(\xi,\eta) := \omega(\xi, J^0\eta)$, или в терминах коэффициентов Фурье

$$g^0(\xi,\eta) = \sum_{n\neq 0} |n|\xi_n\bar{\eta}_n = 2\,\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty} n\xi_n\bar{\eta}_n.$$

Иными словами, V является кэлеровым гильбертовым пространством.

Комплексификация

$$V^{\mathbb{C}} = H_0^{1/2}(S^1, \mathbb{C})$$

пространства V является комплексным гильбертовым пространством, состоящим из функций $f \in L^2(S^1, \mathbb{C})$ с разложениями Фурье вида

$$f(z) = \sum_{n \neq 0} f_n z^n, \qquad z = e^{i\theta},$$

и конечной соболевской нормой

$$\|f\|_{1/2}^2 = \sum_{n \neq 0} |n||f_n|^2 < \infty.$$

Риманова метрика g^0 продолжается на $V^{\mathbb{C}}$ до эрмитовой метрики

$$\langle \xi, \eta \rangle = \sum_{n \neq 0} |n| \xi_n \bar{\eta}_n.$$

Продолжим также форму ω и комплексную структуру J^0 комплексно линейно на $V^{\mathbb{C}}$.

Тогда пространство $V^{\mathbb{C}}$ будет допускать разложение в прямую сумму подпространств

$$V^{\mathbb{C}} = W_+ \oplus W_-, \tag{4}$$

где $W_\pm$ есть собственное $(\mp i)$-подпространство линейного оператора $J^0 : V^{\mathbb{C}} \to V^{\mathbb{C}}$. Иными словами,

$$W_+ = \{\xi \in V^{\mathbb{C}} : \ \xi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n z^n\},$$

$$W_- = \{\xi \in V^{\mathbb{C}} : \ \xi(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} \xi_n z^n\}.$$

Подпространства $W_\pm$ изотропны относительно симплектической формы ω, т.е. $\omega(\xi, \eta) = 0$, если одновременно $\xi, \eta \in W_+$ или $\xi, \eta \in W_-$. Разложение (4) является ортогональной прямой суммой относительно эрмитова скалярного произведения $\langle \cdot\, , \cdot \rangle$.

Диффеоморфизмы из группы $\mathrm{Diff}_+(S^1)$ действуют на пространстве V с помощью замены переменной. Иными словами, диффеоморфизму $h \in \mathrm{Diff}_+(S^1)$ сопоставляется оператор T_h, действующий на функции $f \in V$ по формуле

$$(T_h f)(z) = f(h(z)) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(h(e^{i\theta}))d\theta, \quad z = e^{i\theta}. \tag{5}$$

Это действие сохраняет симплектическую форму ω, поэтому группа $\mathrm{Diff}_+(S^1)$ вкладывается в симплектическую группу $\mathrm{Sp}(V)$ соболевского пространства V.

В терминах разложения $V^{\mathbb{C}} = W_+ \oplus W_-$ любой линейный оператор $A \in \mathrm{Sp}(V)$ представляется в блочном виде

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$$

с матричными компонентами, удовлетворяющими соотношениям

$$\bar{a}^t a - b^t \bar{b} = 1, \quad \bar{a}^t b = b^t \bar{a},$$

где a^t, b^t – транспонированные операторы.

В отличие от симплектической структуры, действие (5) сохраняет комплексную структуру (3) тогда и только тогда, когда диффеоморфизм f продолжается до биголоморфного отображения единичного круга Δ, т.е. до дробно-линейного автоморфизма $f \in \mathrm{M\ddot{o}b}(S^1)$.

Таким образом, построенное вложение группы $\mathrm{Diff}_+(S^1)$ в симплектическую группу $\mathrm{Sp}(V)$ порождает вложение факторпространства

$$\mathcal{S} := \mathrm{Diff}_+(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1)$$

в пространство

$$\mathrm{Sp}(V)/\mathrm{U}(W_+).$$

Указанное пространство можно отождествить с пространством $\mathcal{J}(V)$ комплексных структур на пространстве $V^{\mathbb{C}}$, совместимых с симплектической формой ω.

Действительно, любая комплексная структура J такого вида определяет разложение

$$V^{\mathbb{C}} = W \oplus \overline{W} \tag{6}$$

в прямую сумму собственных $(\mp i)$-подпространств оператора J, изотропных относительно ω.

Обратно, любое разложение вида (6) пространства $V^{\mathbb{C}}$ в прямую сумму подпространств, изотропных относительно ω, определяет комплексную структуру J на $V^{\mathbb{C}}$, равную $-iI$ на W и $+iI$ на $\overline{W}$ и совместимую с ω.

Тем самым, группа $\mathrm{Sp}(V)$ действует транзитивно на пространстве $\mathcal{J}(V)$ комплексных структур J на V, совместимых с ω, и остается профакторизовать ее по подгруппе преобразований, сохраняющих исходную комплексную структуру J^0, которая совпадает с унитарной группой $\mathrm{U}(W_+)$.

На самом деле образ группы $\mathrm{Diff}_+(S^1)$ в симплектической группе $\mathrm{Sp}(V)$ можно описать более точно. А именно, введем *симплектическую группу Гильберта–Шмидта* $\mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V)$, состоящую из операторов

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(V),$$

для которых b есть оператор Гильберта–Шмидта.

Образ группы $\mathrm{Diff}_+(S^1)$ целиком содержится в этой подгруппе, при этом

$$\mathcal{S} = \mathrm{Diff}_+(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1) \hookrightarrow \mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V)/\mathrm{U}(W_+),$$

где пространство $\mathcal{J}_{\mathrm{HS}}(V) := \mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V)/\mathrm{U}(W_+)$ отождествляется, как и выше, с некоторым множеством комплексных структур на $V^{\mathbb{C}}$, совместимых с симплектической формой ω.

Введем *гильбертово расширение* исходной классической системы, пользуясь построенным вложением

$$\mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{J}_{\mathrm{HS}}(V) = \mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V)/\mathrm{U}(W_+).$$

Роль фазового пространства указанного расширения будет играть соболевское пространство V, а роль алгебры наблюдаемых алгебра Ли группы Ли

$$\mathcal{G} := \mathrm{Heis}(V) \rtimes \mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V),$$

являющейся полупрямым произведением группы Гейзенберга $\mathrm{Heis}(V)$ и симплектической группы Гильберта–Шмидта $\mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V)$.

Указанную группу $\mathcal{G}$ можно рассматривать как гильбертов аналог группы Пуанкаре d-мерного пространства Минковского M^d, совпадающей с полупрямым произведением группы трансляций этого пространства и группы его лоренцевых вращений. В случае гильбертова пространства V роль группы трансляций играет группа Гейзенберга, а группа вращений заменяется на симплектическую группу $\mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V)$.

III. Квантование расширенной системы.

Переходя к квантованию алгебры наблюдаемых расширенной системы, разберемся сначала с представлениями алгебры Гейзенберга $\mathrm{heis}(V)$.

Напомним, как выглядит представление Гейзенберга алгебры $\mathrm{heis}(\mathbb{R}^{2n})$, диктуемое геометрическим квантованием. Оно сопоставляет образующим p_j, q_j этой алгебры операторы

$$r(p_j) = -i\frac{\partial}{\partial q_j}, \quad r(q_j) = q_j + i\frac{\partial}{\partial p_j},$$

действующие в гильбертовом пространстве $H = L^2(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0^n)$. Это представление приводимо, поскольку операторы $i\frac{\partial}{\partial p_j}$ и $p_j + i\frac{\partial}{\partial q_j}$ коммутируют со всеми операторами $r(p_j)$, $r(q_j)$, не будучи скалярными.

Неприводимости указанного представления можно добиться, сужая его на подпространство H, состоящее из функций, зависящих только от (q_j). Тогда это представление сведется к хорошо известному *представлению Гейзенберга* в пространстве $H_{(q)} := L^2(\mathbb{R}^n_{(q)}, d^n q)$, задаваемому посредством

$$r(p_j) = -i\frac{\partial}{\partial q_j}, \quad r(q_j) = q_j.$$

Аналогично, можно построить *двойственное представление Гейзенберга* в пространстве $H_{(p)} := L^2(\mathbb{R}^n_{(p)}, d^n p)$ функций, зависящих только от (p_j), задаваемое посредством

$$r(p_j) = p_j, \quad r(q_j) = i\frac{\partial}{\partial p_j}.$$

"Физическое" объяснение приводимости исходного представления заключается в том, что, согласно принципу неопределенности Гейзенберга, пространство квантования не должно содержать функций, зависящих от какой-либо пары канонических переменных (p_j, q_j) одновременно, как это имеет место в пространстве $H = L^2(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0^n)$.

Другой способ выделения "половины" пространства квантования требует введения комплексных координат $z = (z_1, \dots, z_n)$ путем отождествления $\mathbb{R}^{2n}$ с $\mathbb{C}^n$. В этом случае пространство квантования $H = L^2(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0^n)$ будет совпадать с пространством $L^2(\mathbb{R}^{2n}, e^{-|z|^2/2})$ с гауссовым весом и за искомую "половину" этого пространства можно взять пространство

$$F(\mathbb{C}^n) = L^2_{\mathcal{O}}(\mathbb{C}^n, e^{-|z|^2/2}),$$

состоящее из голоморфных функций и называемое *пространством Баргмана–Фока*.

В этих терминах представление Гейзенберга будет сопоставлять координатным функциям $z_j, \bar{z}_j$ операторы

$$r(z_j) = z_j, \quad r(\bar{z}_j) = \frac{\partial}{\partial z_j},$$

действующие в $F(\mathbb{C}^n)$.

Последний пример подсказывает, каким образом нужно строить представление Гейзенберга в бесконечномерном случае.

Алгебра Гейзенберга **heis(V) соболевского пространства V есть центральное расширение абелевой алгебры Ли V, порождаемой координатными функциями. Иными словами, она совпадает как векторное пространство с heis$(V) = V \oplus \mathbb{R}$ и наделяется скобкой Ли вида**

$$[(x,s),(y,t)] := (0, \omega(x,y))\,, \quad x, y \in V,\ s,t, \in \mathbb{R}.$$

Алгебра Гейзенберга heis(V) является алгеброй Ли ***группы Гейзенберга*** **Heis(V), совпадающей с центральным расширением абелевой группы V. Другими словами, Heis(V) есть прямое произведение Heis$(V) = V \times S^1$, наделенное групповой операцией, задаваемой формулой**

$$(x,\lambda)\cdot(y,\mu) := \left(x+y, \lambda\mu e^{i\omega(x,y)}\right).$$

Роль пространства квантования для алгебры Гейзенберга играет фоковское пространство, построенное по соболевскому пространству V. Оно состоит, как и следует ожидать по аналогии с пространством Баргмана–Фока, из функций на V, голоморфных относительно некоторой комплексной структуры $J \in \mathcal{J}(V)$, совместимой с симплектической формой ω.

Такая структура порождает разложение комплексифицированного пространства $V^{\mathbb{C}}$ в прямую сумму

$$V^{\mathbb{C}} = W \oplus \overline{W}$$

собственных $(\mp i)$-подпространств оператора J, причем указанное разложение ортогонально относительно эрмитова скалярного произведения на $V^{\mathbb{C}}$, порождаемого J и ω:

$$< z, w >_J := \omega(z, Jw).$$

Фоковское пространство $F(V^{\mathbb{C}}, J)$ является пополнением алгебры симметричных полиномов от переменных $z \in W$ по норме, порожденной скалярным произведением $< \cdot, \cdot >_J$.

Более подробно, обозначим через $\mathfrak{S}(W)$ алгебру симметричных полиномов от переменных $z \in W$ и введем на ней скалярное произведение, порождаемое скалярным произведением $< \cdot, \cdot >_J$. На мономах одинаковой степени оно задается формулой

$$\langle z_1 \otimes \ldots \otimes z_n, z'_1 \otimes \ldots \otimes z'_n >_J := \sum_{\{i_1, \ldots, i_n\}} < z_1, z'_{i_1} >_J \cdot \ldots \cdot < z_n, z'_{i_n} >_J,$$

где суммирование ведется по всем перестановкам $\{i_1, \ldots, i_n\}$ множества $\{1, \ldots, n\}$ (скалярное произведение мономов разных степеней полагается равным нулю). Скалярное произведение на мономах продолжается затем по линейности на всю алгебру $\mathfrak{S}(W)$.

Фоковское пространство

$$F_J = F(V^{\mathbb{C}}, J)$$

есть замыкание алгебры $\mathfrak{S}(W)$ по норме $< \cdot, \cdot >_J$.

Если $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ есть ортонормированный базис пространства W, то в качестве ортонормированного базиса фоковского пространства F_J можно взять мономы вида

$$P_K(z) = \frac{1}{\sqrt{k!}} < z, w_1 >_J^{k_1} \cdot \ldots \cdot < z, w_n >_J^{k_n}, \quad z \in W, \tag{7}$$

где $K = (k_1, \ldots, k_n, 0, \ldots)$ – финитный набор натуральных чисел $k_i \in \mathbb{N}$, и $k! = k_1! \cdot \ldots \cdot k_n!$.

Тем самым, фоковское пространство разлагается в прямую сумму

$$F_J = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathfrak{S}_k(W),$$

где $\mathfrak{S}_k(W)$ есть подпространство полиномов степени k в $\mathfrak{S}(W)$.

Построим неприводимое представление алгебры Гейзенберга $\mathrm{heis}(V)$ в фоковском пространстве F_J. Заметим, прежде всего, что элементы алгебры $\mathfrak{S}(W)$ можно рассматривать как голоморфные функции на пространстве $\overline{W}$, отождествляя $z \in W$ с голоморфной функцией

$$\overline{W} \ni \bar{w} \longmapsto < z, w >_J \quad \text{на } \overline{W}.$$

Соответственно, пространство F_J можно рассматривать как пространство функций, голоморфных на $\overline{W}$.

С учетом этого отождествления, *представление Гейзенберга* r_J алгебры Гейзенберга heis(V) в фоковском пространстве F_J будет задаваться формулой

$$V \ni v \longmapsto r_J(v)f(\bar{w}) = \partial_v f(\bar{w}) + < v, w >_J f(\bar{w}), \tag{8}$$

где ∂_v есть оператор дифференцирования в направлении вектора v.

Продолжая r_J на комплексифицированную алгебру heis$^{\mathbb{C}}(V)$ той же формулой (8), получим, что

$$r_J(\bar{z})f(\bar{w}) = \partial_{\bar{z}} f(\bar{w}) \quad \text{при } \bar{z} \in \overline{W},$$
$$r_J(z)f(\bar{w}) = < z, w >_J f(\bar{w}) \quad \text{при } z \in W.$$

Представление Гейзенберга удобно описывать в терминах *операторов рождения* и *уничтожения* на пространстве F_J, которые задаются формулами

$$a_J^*(v) = \frac{r_J(v) + ir_J(Jv)}{2}\ , \quad a_J(v) = \frac{r_J(v) - ir_J(Jv)}{2}\ ,$$

где $v \in V^{\mathbb{C}}$. Отсюда

$$a_J^*(z)f(\bar{w}) =< z, w >_J f(\bar{w}) \quad \text{при } z \in W,$$
$$a_J(\bar{z})f(\bar{w}) = \partial_{\bar{z}} f(\bar{w}) \quad \text{при } \bar{z} \in \overline{W}.$$

Выбирая ортонормированный базис $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ в пространстве W, введем операторы $a_n^* := a^*(w_n)$, $a_n := a(\bar{w}_n)$ при $n = 1, 2, \ldots$, которые удовлетворяют коммутационным соотношениям вида

$$[a_m, a_n] = [a_m^*, a_n^*] = 0, \quad [a_m^*, a_n] = \delta_{mn} I \quad \text{при } m, n \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

Итак, мы построили для каждой комплексной структуры $J \in \mathcal{J}(V)$ неприводимое представление r_J алгебры Гейзенберга $\mathrm{heis}(V)$ в фоковском пространстве F_J.

Перейдем теперь к изучению второй компоненты $\mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V)$ нашей алгебры наблюдаемых. Как было отмечено выше, действие этой группы на соболевском пространстве V не сохраняет, вообще говоря, исходную комплексную структуру J^0 на пространстве V. На самом деле оно переводит фоковское пространство F_0, отвечающее комплексной структуре J^0, в фоковское пространство, отвечающее преобразованной комплексной структуре.

Дальнейшая идея построения квантования состоит в том, чтобы, пользуясь указанным действием, отождествить различные фоковские пространства. Инфинитезимальный вариант этого отождествления задает неприводимое представление алгебры наблюдаемых в фоковском пространстве F_0, которое и определяет квантование расширенной системы.

Иными словами, мы хотим построить унитарный оператор $U_J : F_0 \to F_J$, сплетающий представления Гейзенберга r_0 в пространстве F_0 и r_J в пространстве F_J.

ТЕОРЕМА ШЕЙЛА–БЕРЕЗИНА. Пусть комплексная структура $J \in \mathcal{J}(V)$ получается из комплексной структуры J^0 действием элемента $A \in \mathrm{Sp}(V)$. Тогда представления r_0 в пространстве F_0 и r_J в пространстве F_J унитарно эквивалентны тогда и только тогда, когда $A \in \mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V)$. Другими словами, при выполнении последнего условия существует унитарный сплетающий оператор $U_J : F_0 \to F_J$, такой что

$$r_J = U_J \circ r_0 \circ U_J^{-1}.$$

Объединим теперь все фоковские пространства F_J с $J \in \mathcal{J}_{\mathrm{HS}}(V)$ в единое *фоковское расслоение*

$$\mathcal{F} = \bigcup_{J \in \mathcal{J}_{\mathrm{HS}}(V)} F_J \longrightarrow \mathcal{J}_{\mathrm{HS}}(V).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Фоковское расслоение $\mathcal{F} \to \mathcal{J}_{\mathrm{HS}}(V)$ является эрмитовым голоморфным гильбертовым расслоением над множеством $\mathcal{J}_{\mathrm{HS}}(V)$. На нем имеется унитарное проективное действие группы $\mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V)$, накрывающее естественное действие этой группы на $\mathcal{J}_{\mathrm{HS}}(V)$.

Инфинитезимальным вариантом действия симплектической группы Гильберта–Шмидта $\mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V)$ на фоковском расслоении является проективное представление ее алгебры Ли $\mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V)$ в слое $F_0 = F(V^{\mathbb{C}}, J^0)$ фоковского расслоения над точкой J^0.

Приведем явную конструкцию этого представления, принадлежащую Сигалу.

Симплектическая алгебра Ли $\mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V)$ состоит из ограниченных линейных операторов A в пространстве $V^{\mathbb{C}}$, имеющих блочные представления вида

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix},$$

где α – ограниченный косоэрмитов оператор, β – симметричный оператор Гильберта–Шмидта.

Комплексифицированная алгебра Ли $\mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V)^{\mathbb{C}}$ состоит из операторов вида

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\gamma} & -\alpha^t \end{pmatrix},$$

где α – ограниченный оператор, а β и $\bar{\gamma}$ являются симметричными операторами Гильберта–Шмидта.

Проективное представление комплексифицированной симплектической алгебры $\mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V)^{\mathbb{C}}$ в пространстве F_0 задается формулой

$$\mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V)^{\mathbb{C}} \ni A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\gamma} & -\alpha^t \end{pmatrix} \longmapsto \rho(A) = D_\alpha + \frac{1}{2}M_\beta + \frac{1}{2}M_\gamma^*. \qquad (10)$$

Здесь, D_α – оператор дифференцирования, порождаемый оператором $\alpha : W_+ \to W_+$ и определяемый посредством

$$D_\alpha f(\bar{w}) =< \alpha w, \partial_w > f(\bar{w}).$$

Оператор M_β, порождаемый оператором $\beta : W_- = \overline{W}_+ \to W_+$, имеет вид

$$M_\beta f(\bar{w}) =< \bar{\beta} w, w > f(\bar{w}),$$

а оператор M_γ^*, сопряженный к M_γ, действует по формуле

$$M_\gamma^* f(\bar{w}) =< \gamma \partial_w, \partial_w > f(\bar{w}).$$

ТЕОРЕМА СИГАЛА. **Формула** (10) **задает унитарное проективное представление симплектической алгебры Ли $\mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V)^{\mathbb{C}}$ в фоковском пространстве F_0 с коциклом**

$$[\rho(A_1), \rho(A_2)] - \rho([A_1, A_2]) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\bar{\gamma}_2\beta_1 - \bar{\gamma}_1\beta_2)I. \qquad (11)$$

Это представление сплетается с представлением Гейзенберга r_0 алгебры Гейзенберга $\mathrm{heis}(V)$ в пространстве F_0.

Проективное представление алгебры Ли $\mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V)$ определяет квантование расширенной системы

$$\left(\mathcal{J}_{\mathrm{HS}}(V), \widetilde{\mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V)}\right)$$

где $\widetilde{\mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V)}$ есть центральное расширение алгебры Ли $\mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V)$, задаваемое коциклом (11).

Сужение приведенной выше конструкции фоковского расслоения $\mathcal{F} \to \mathcal{J}_{\mathrm{HS}}(V)$ на подмногообразие

$$\mathcal{S} = \mathrm{Diff}_+(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1) \subset \mathcal{J}_{\mathrm{HS}}(V)$$

дает фоковское расслоение

$$\mathcal{F}_{\mathcal{S}} := \bigcup_{J \in \mathcal{S}} F_J \longrightarrow \mathcal{S}$$

над пространством $\mathcal{S}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Фоковское расслоение $\mathcal{F}_{\mathcal{S}} \to \mathcal{S}$ является эрмитовым голоморфным гильбертовым расслоением над пространством $\mathcal{S}$. На этом расслоении имеется унитарное проективное действие группы диффеоморфизмов $\mathrm{Diff}_+(S^1)$, накрывающее естественное действие этой группы на $\mathcal{S}$.

Инфинитезимальным вариантом действия группы $\mathrm{Diff}_+(S^1)$ на фоковском расслоении $\mathcal{F}_\mathcal{S}$ является проективное представление алгебры Ли $\mathrm{Vect}(S^1)$ этой группы в фоковском пространстве F_0.

Конструкцию этого представления, называемого представлением Вирасоро, удобно описать в терминах операторов рождения и уничтожения a_n^*, a_n на пространстве F_0, введенных выше.

Дополним это определение, полагая $a_0 = \lambda I$, $\lambda \in \mathbb{R}$, и $a_{-n} := n a_n^*, n \in \mathbb{N}$, так что для полученных операторов будут выполняться следующие коммутационные соотношения

$$[a_m, a_n] = m\delta_{m,-n} I \quad \text{при } m, n \in \mathbb{Z}.$$

Представление Вирасоро алгебры Ли $\mathrm{Vect}^{\mathbb{C}}(S^1)$ порождается *операторами Вирасоро* L_n, являющимися образами базисных элементов e_n алгебры $\mathrm{Vect}^{\mathbb{C}}(S^1)$.

Эти операторы задаются формулой

$$L_n = \frac{1}{2} \sum_{i=-\infty}^{\infty} :a_{-i}a_{i+n}: \quad , \ n \in \mathbb{Z},$$

где знак $: \, :$ означает *нормальное упорядочение*, определяемое правилом

$$:a_i a_j: = \begin{cases} a_i a_j & \text{при } i \le j, \\ a_j a_i & \text{при } i > j. \end{cases}$$

Из-за нормального упорядочения, при применении оператора L_n к любому полиному P из алгебры $\mathfrak{S}(W_+)$ только конечное число членов в бесконечном ряде, задающем L_nP, будет отлично от нуля, т.е. действие операторов L_n корректно определено на алгебре $\mathfrak{S}(W_+)$ и продолжается на все фоковское пространство $F_0 = \widehat{\mathfrak{S}(W_+)}$ по замыканию.

Операторы L_n, удовлетворяющие коммутационным соотношениям

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \delta_{m,-n}\frac{m^3-m}{12} \tag{12}$$

порождают унитарное проективное представление алгебры Ли $\mathrm{Vect}(S^1)$ в фоковском пространстве F_0.

Построенное проективное представление алгебры Ли $\mathrm{Vect}(S^1)$ в фоковском пространстве F_0 задает квантование системы (V, vir), где vir есть центральное расширение алгебры Ли $\mathrm{Vect}(S^1)$. Это расширение называется *алгеброй Вирасоро* и определяется коциклом представления (12).

IV. Квантование теории негладких замкнутых струн.

Мы объяснили, каким образом можно проквантовать теорию гладких замкнутых струн. Однако то, что мы с самого начала ограничились гладкими струнами, диктовалось исключительно соображениями удобства работы с гладкими объектами. Более того, нам все равно пришлось отказаться от этого ограничения при переходе от исходной классической системы к ее гильбертову расширению.

Какие же классы замкнутых струн следует считать "естественными"? При ответе на этот вопрос мы исходим из того, что основной физической величиной в рассматриваемой нами теории является симплектическая форма ω на пространстве гладких петель Ω_d. Ее естественной областью определения является соболевское пространство полудифференцируемых вектор-функций $V_d := H_0^{1/2}(S^1, M^d)$, поскольку оно является наибольшим в шкале соболевских пространств $H_0^s(S^1, M^d)$, на котором корректно определена указанная форма. Тем самым, можно сказать, что форма ω "сама выбирает" пространство, на котором ей следует "жить". С этой точки зрения выбор пространства V_d в качестве фазового пространства теории струн выглядит более естественным, чем выбор в качестве такового пространства Ω_d.

Выбрав в качестве фазового пространства V_d мы должны указать подходящую группу симплектических преобразований, действующую на этом пространстве. Такая группа также определяется практически единственным образом.

Рассмотрим снова оператор замены переменной T_f, где f – некоторый сохраняющий ориентацию гомеоморфизм окружности S^1и поставим следующий вопрос. Для каких гомеоморфизмов f этот оператор корректно определен и действует в пространстве V? Ответ на этот вопрос дается теоремой Нага–Сулливана, для формулировки которой нам потребуется ввести некоторые новые понятия.

Назовем сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $f : S^1 \to S^1$ *квазисимметричным*, если он продолжается до квазиконформного гомеоморфизма единичного круга Δ. Напомним, что гомеоморфизм $w : \Delta \to \Delta$ называется *квазиконформным*, если он удовлетворяет в обобщенном смысле следующему *уравнению Бельтрами*

$$\bar{\partial} w = \mu \partial w,$$

где $\mu \in L^\infty(\Delta)$ – некоторая ограниченная функция с нормой $\|\mu\|_\infty < 1$. При $\mu \equiv 0$ квазиконформный гомеоморфизм w превращается в конформное отображение.

Квазисимметричные гомеоморфизмы окружности образуют группу относительно композиции, которую мы обозначаем через $\mathrm{QS}(S^1)$. Пространство

$$\mathcal{T} = \mathrm{QS}(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1)$$

называется *универсальным пространством Тейхмюллера.*

ТЕОРЕМА НАГА–СУЛЛИВАНА. Оператор T_f действует из пространства V в себя тогда и только тогда, когда $f \in \mathrm{QS}(S^1)$. Далее, действие операторов $T_f : V \to V$ с $f \in \mathrm{QS}(S^1)$ на соболевском пространстве V является симплектическим, т.е. сохраняет симплектическую структуру ω. Более того, комплексно-линейное продолжение T_f на комплексифицированное пространство $V^{\mathbb{C}}$ сохраняет подпространства $W_\pm$ тогда и только тогда, когда $f \in \mathrm{M\ddot{o}b}(S^1)$ и в этом случае T_f действует на $W_\pm$ как унитарный оператор.

Таким образом, можно снова сказать, что соболевское пространство V само "выбирает" правильную группу, которая на этом пространстве действует, а именно группу $\mathrm{QS}(S^1)$ квазисимметричных гомеоморфизмов. Указанное действие является симплектическим и, если бы оно было гладким, то в качестве классической системы, ассоциированной с рассматриваемой теорией негладких струн, следовало бы взять систему, фазовым пространством которой является соболевское пространство V_d, а алгеброй наблюдаемых – алгебра Ли группы $\mathrm{QS}(S^1)$.

К сожалению, указанное действие не является гладким, поэтому мы не можем сопоставить никакой классической системы фазовому пространству V_d, наделенному симплектическим действием группы $\mathrm{QS}(S^1)$.

Однако мы покажем, что по этому действию можно построить квантовую алгебру наблюдаемых, ассоциированную с данным фазовым пространством.

Напомним, что в основе квантования расширенной системы $(\mathcal{J}_{\mathrm{HS}}(V), \mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V))$ лежал тот факт, что естественное действие группы $\mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V)$ на пространстве $\mathcal{J}_{\mathrm{HS}}(V) = \mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V)/\mathrm{U}(W_+)$ удалось поднять с помощью теоремы Шейла–Березина до проективного действия этой группы на фоковском расслоении

$$\mathcal{F} = \bigcup_{J \in \mathcal{J}_{\mathrm{HS}}(V)} F_J \longrightarrow \mathcal{J}_{\mathrm{HS}}(V).$$

К сожалению, этот метод не применим для всего универсального пространства Тейхмюллера $\mathcal{T}$. Хотя из теоремы Нага–Сулливана вытекает, что имеется вложение

$$\mathcal{T} = \mathrm{QS}(S^1)/\mathrm{M\ddot{o}b}(S^1) \longrightarrow \mathcal{J} = \mathrm{Sp}(V)/\mathrm{U}(W_+)$$

в пространство $\mathcal{J}$ комплексных структур на V, совместимых с симплектической формой ω и мы снова можем построить фоковское расслоение

$$\mathcal{F}_{\mathcal{J}} := \bigcup_{J \in \mathcal{J}(V)} F_J \longrightarrow \mathcal{J}(V),$$

естественное действие группы $\mathrm{Sp}(V)$ на $\mathcal{J}(V)$ нельзя поднять до проективного действия этой группы на $\mathcal{F}_{\mathcal{J}}$, накрывающего ее действие на базе $\mathcal{J}(V)$. Это запрещается теоремой Шейла–Березина.

Поэтому приходится использовать другой подход к квантованию $\mathcal{T}$, основанный на соображениях из некоммутативной геометрии.

Напомним, что в изложенном выше дираковском подходе квантованию подвергались классические системы $(M, \mathcal{A})$, состоящие из фазового пространства M и алгебры наблюдаемых $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\mathbb{C}}$, являющейся инволютивной алгеброй Ли гладких функций на M. Квантование такой системы задается неприводимым линейным представлением r наблюдаемых из $\mathcal{A}$ замкнутыми линейными операторами, действующими в пространстве квантования H, переводящим скобку Пуассона $\{f, g\}$ наблюдаемых $f, g \in \mathcal{A}$ в коммутатор $\frac{1}{i}[r(f), r(g)]$ отвечающих им операторов.

В подходе Конна классическая система задается парой $(M, \mathfrak{A})$, где M снова фазовое пространство, а алгебра наблюдаемых $\mathfrak{A}$ есть ассоциативная инволютивная алгебра, состоящая из гладких функций на M. Квантованием такой системы по Конну называется неприводимое линейное представление π наблюдаемых из $\mathcal{A}$ замкнутыми линейными операторами, действующими в пространстве квантования H, переводящее оператор внешнего дифференцирования d в коммутатор с некоторым *оператором симметрии* S, где S – самосопряженный оператор на H с квадратом $S^2 = I$. Иначе говоря,

$$\pi : df \longmapsto [S, \pi(f)], \quad f \in \mathfrak{A}.$$

Конновский подход можно сформулировать и на языке алгебр Ли. Для этого рассмотрим *алгебру* $Der(\mathfrak{A})$ *дифференцирований* алгебры $\mathfrak{A}$, т.е. линейных отображений $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$, удовлетворяющих правилу Лейбница. Алгебра $\mathrm{Der}(\mathfrak{A})$ является алгеброй Ли, поскольку коммутатор двух дифференцирований из этой алгебры снова является дифференцированием. В терминах алгебры $\mathrm{Der}(\mathfrak{A})$ квантование по Конну есть неприводимое представление алгебры Ли $\mathrm{Der}(\mathfrak{A})$ в алгебре Ли $\mathrm{End}\, H$, наделенной коммутатором в качестве скобки Ли.

Если все наблюдаемые являются гладкими функциями на M (как предполагалось выше), то между двумя подходами к квантованию нет большого различия. Действительно, дифференциал df наблюдаемой f является симплектически двойственным к гамильтонову векторному полю X_f, что устанавливает связь между ассоциативной алгеброй наблюдаемых $\mathfrak{A} \ni f$ и алгеброй Ли гамильтоновых векторных полей $\mathcal{A} \ni X_f$ или двойственной к ней алгеброй Ли гамильтонианов f, порождающих векторные поля X_f.

Оператор симметрии S определяется в этом случае *поляризацией*

$$H = H_+ \oplus H_- \tag{13}$$

пространства квантования H, т.е. разложением H в прямую ортогональную сумму замкнутых бесконечномерных подпространств $H_\pm$. Отвечающий поляризации оператор симметрии полагается равным $S = \pm I$ на $H_\pm$. Этот оператор тесно связан с оператором комплексной структуры J на H, задаваемым разложением (13), а именно, $S = iJ$, так что $J = \pm iI$ на $H_\pm$.

Однако в случае, если мы разрешим алгебре наблюдаемых $\mathcal{A}$ содержать негладкие функции, дираковское определение потеряет смысл.

В конновском подходе дифференциал негладкой наблюдаемой $f \in \mathfrak{A}$ также не определен в классическом смысле, тем не менее его квантовый аналог

$$d^q f := [S, \pi(f)]$$

может быть корректно определен.

Рассмотрим в качестве примера алгебру $\mathfrak{A} = L^\infty(S^1, \mathbb{C})$ ограниченных функций на окружности S^1. Любая функция $f \in \mathfrak{A}$ определяет ограниченный *оператор умножения* M_f в гильбертовом пространстве $H = L^2(S^1)$, действующий по формуле:

$$M_f : h \in H \longmapsto fh \in H.$$

Оператор симметрии S на H задается *преобразованием Гильберта*

$$(Sh)(\phi) = \frac{1}{2\pi}\,\text{P.V.}\int_0^{2\pi} K(\phi,\psi)f(\psi)d\psi, \qquad f \in H, \tag{14}$$

где интеграл берется в смысле *главного значения*, т.е.

$$\text{P.V.}\int_0^{2\pi} K(\phi,\psi)f(\psi)d\psi := \lim_{\epsilon\to 0}\left[\int_0^{\psi-\epsilon} + \int_{\psi+\epsilon}^{2\pi}\right] K(\phi,\psi)f(\psi)d\psi.$$

(Здесь и в дальнейшем мы отождествляем функции $f(z)$ на окружности S^1 с функциями $f(\phi) := f(e^{i\phi})$ на отрезке $[0, 2\pi]$.)

Ядро Гильберта **в формуле** (14) **задается выражением**

$$\boldsymbol{K(\phi,\psi) = 1 + i\,\mathrm{ctg}\,\frac{\phi-\psi}{2}\,.}$$

Заметим, что при $\phi \to \psi$ **оно ведет себя как** $1 + \frac{2i}{\phi-\psi}$**.**

Дифференциал общей наблюдаемой $f \in \mathfrak{A}$ **не определен в классическом смысле, но его квантовый аналог**

$$\boldsymbol{d^q f := [S, M_f]}$$

корректно определен как оператор на H **(этот оператор корректно определен даже для функций из** $\mathrm{BMO}(S^1)$**).**

Для функций $f \in V^{\mathbb{C}} = H_0^{1/2}(S^1, \mathbb{C})$ можно утверждать даже большее.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Функция f принадлежит соболевскому пространству $V^{\mathbb{C}}$ тогда и только тогда, когда ее квантовый дифференциал $d^q f$ является оператором Гильберта–Шмидта на H и следовательно на $V^{\mathbb{C}}$. Более того, норма Гильберта–Шмидта оператора $d^q f$ совпадает с соболевской нормой функции f.

Итак, квантовый дифференциал $d^q f := [S, M_f]$ для функций $f \in V^{\mathbb{C}}$ является интегральным оператором на $V^{\mathbb{C}}$, задаваемым формулой

$$(d^q f)(h)(\phi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} k(\phi,\psi)h(\psi)d\psi, \quad h \in V^{\mathbb{C}}, \tag{15}$$

где

$$k(\phi,\psi) = K(\phi,\psi)(f(\phi) - f(\psi)),$$

а $K(\phi,\psi)$ – ядро Гильберта. При $\phi \to \psi$ ядро $k(\phi,\psi)$ ведет себя как

$$\frac{f(\phi) - f(\psi)}{\phi - \psi}.$$

Можно показать, что квазиклассический предел оператора (15), отвечающий взятию следа оператора (15) при $\phi = \psi$, совпадает с оператором умножения $h \longmapsto f' \cdot h$.

Тем самым, в рассмотренном примере квантование свелось, по существу, к замене производной ее конечно-разностным аналогом.

Выше мы определили естественное действие группы $\mathrm{QS}(S^1)$ квазисимметричных гомеоморфизмов окружности на соболевском пространстве V. Поскольку это действие не является гладким мы не можем сопоставить V никакой естественной классической системы. Однако квантовую систему, ассоциированную с этим пространством, мы построить можем.

Для этого определим сначала *квантованное инфинитезимальное действие* группы $\mathrm{QS}(S^1)$ на соболевском пространстве V, задавая его с помощью квантового дифференциала d^q, определяемого формулой (15):

$$\mathrm{QS}(S^1) \ni f \longmapsto d^q f : V \to V.$$

Далее продолжим этот оператор на все фоковское пространство F_0, определяя его сначала на элементах базиса $P_K(z)$ из формулы (7) по правилу Лейбница, а затем продолжая по линейности на всю алгебру полиномов $\mathfrak{S}(W_+)$. Замыкание полученного оператора даст нам оператор $d^q f$ на фоковском пространстве $F_0 = \widehat{\mathfrak{S}(W_+)}$.

Искомая *квантовая алгебра Ли наблюдаемых* порождается построенными операторами $d^q f$ на F_0 с $f \in \mathrm{QS}(S^1)$. Мы обозначаем ее через $\mathrm{Der}^q(\mathrm{QS})$ и рассматриваем в качестве замены (не существующей) классической алгебры Ли группы $\mathrm{QS}(S^1)$.

Сравним изложенный способ построения квантовой системы с дираковским квантованием расширенной системы $(\mathcal{J}_{\mathrm{HS}}(V), \mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V))$.

В случае системы $(\mathcal{J}_{\mathrm{HS}}(V), \mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V))$:

(1) мы стартуем с $\mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V)$-действия на $\mathcal{J}_{\mathrm{HS}}$;

(2) затем, пользуясь теоремой Шейла–Березина, продолжаем это действие до проективного унитарного действия группы $\mathrm{Sp}_{\mathrm{HS}}(V)$ на фоковских пространствах $F(V, J)$;

(3) инфинитезимальная версия этого действия дает проективное унитарное представление симплектической алгебры Гильберта–Шмидта $\mathrm{sp}_{\mathrm{HS}}(V)$ в фоковском пространстве F_0.

В случае соболевского пространства V, наделенного действием группы $\mathrm{QS}(S^1)$, шаг (2) невозможен, поскольку согласно теореме Шейла–Березина мы не можем продолжить действие $\mathrm{QS}(S^1)$ на фоковские пространства $F(V, J)$:

(2) вместо этого мы вводим квантованное инфинитезимальное действие группы $\mathrm{QS}(S^1)$ на V, задаваемое квантовыми дифференциалами $d^q f$;

(3) продолжая операторы $d^q f$ на фоковское пространство F_0, мы получаем квантовую алгебру Ли $\mathrm{Der}^q(\mathrm{QS})$, порождаемую продолженными операторами $d^q f$.

Итак, конновское квантование соболевского пространства V, наделенного действием группы $\mathrm{QS}(S^1)$, состоит из двух этапов.

I. Первичное квантование: **построение квантованного инфинитезимального действия группы $\mathrm{QS}(S^1)$ на соболевском пространстве V, задаваемого посредством**

$$\mathrm{QS}(S^1) \ni f \longmapsto d^q f = [S, M_f] : V \to V.$$

II. Вторичное квантование: **продолжение операторов $d^q f$ на фоковское пространство F_0 и построение квантовой алгебры наблюдаемых $\mathrm{Der}^q(\mathrm{QS})$, порождаемой операторами $d^q f \in \mathrm{End}\, F_0$ с $f \in \mathrm{QS}(S^1)$.**