ЭЙЛЕР

4(15) апр. 1707 – 7(18) сент. 1783

и

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Читайте Эйлера,
читайте Эйлера — это
наш общий учитель.

П. Лаплас

Изучение работ Эйлера остается наилучшей школой в различных областях математики и ничто другое не может это заменить.

К. Ф. Гаусс

13 января 1724 г. Петр I подписывает в Сенате

«Определение об Академии»

22 января на особом заседании Сената он утверждает проект положения об Академии и Университете при ней.

23 января сенатский указ извещал, что

> «Петр Великий...указал учинить Академию, в которой бы учились языкам, также прочим наукам и знатным художествам и переводили б книги».

АКАДЕМИЯ мыслилась как

«собрание ученых и искусных людей, которые

не токмо сии науки в своем роде, в том градусе, в котором оные ныне обретаются, знают,

но и через новые инвенты оные совершить и умножить тщатся».

По своей структуре Академия задумывалась как состоящая из

ТРЕХ КЛАССОВ:

математика	физика	гуманитарные
астрономия	химия	дисциплины
механика	естественные	
география	науки	

При Академии учреждался **Университет** как

> «собрание ученых людей, которые наукам высоким. . . , до какого состояния оные ныне дошли, младых людей обучают».

Членам Академии вменялось в обязанность

составление учебных руководств, в день по часу заниматься публичным преподаванием своего предмета и проводить индивидуальные занятия с более способными студентами.

Каждый член Академии был обязан

подготовить одного или двух воспитанников, которые бы со временем могли занять его место.

При этом Петр высказывал желание, чтобы

таковые были выбираемы «из словенского народа, дабы могли удобнее русских учить. . . ».

Вскоре после опубликования сенатского указа, русским дипломатическим миссиям был послан

«Краткий экстракт» положения о создании Академии

с целью его распространения за рубежом и подбора для Академии ученых

> «чтоб по своим контрактам, без сумнения, следовали сюды, для которых все потребное уготовление учинено, и будут содержаны у нас в особливом нашем призрении».

Среди первых **23** приглашенных ученых (из Швейцарии, немецких княжеств и Пруссии) **семеро** были математиками:

Я. Герман (1678–1733)

Х. Гольдбах (1690–1764)

Ф.-Х. Майер (1697–1729)

Г.-В. Крафт (1701–1754)

$\left.\begin{array}{l}\text{Николай (II) Бернулли (1695–1726)}\\ \text{Даниил Бернулли (1700–1782)}\end{array}\right\}$ сыновья Иоганна (I) Бернулли (1667–1748) — брата Якоба (1654–1702) — автора «Ars conjectandi» (1713)

Л. Эйлер (1707–1783) — ученик Иоганна (I) Бернулли

Я. Герман:

- «Форонолия, или о силах и движениях твердых и жидких тел»,
- «О сфероидальной фигуре Земли»,
- работы по интегрированию обыкновеннных диффе-ренциальных уравнений.

Х. Гольдбах:

- работы по интегрированию обыкновеннных диффе-ренциальных уравнений,
- «проблема Гольдбаха» (в письме к Эйлеру высказал предположение, что всякое целое число, большее единицы, есть сумма не более трех простых чисел),
- занимался историей Петербургской Академии.

Ф.-Х. Майер:

- работы по тригонометрии (улучшил символику тригонометрии), сферической тригонометрии, астрономии.

Г.-В. Крафт:

- астрономия, физика (провел опыты по определению силы притяжения магнитов, силы вытекающий водяной струи, показателя преломления льда, его плотности и др.).

Н. Бернулли:

- интегрирование уравнений Риккати,
«О движении тел, вызванном их соударениями»,
постановка задачи о «Петербургской игре».

Д. Бернулли:

- гидродинамика (закон Бернулли: при установившемся движении жидкости давление ее пропорционально квадрату скорости течения);
- исследования уравнений Риккати ($y' = ax^n + by^2$);
- метод приближенного решения алгебраических уравнений;
- теория вероятностей: «Попытка новой теории вычисления случайных величин» (введено понятие морального ожидания для объяснения парадокса, связанного с понятием <u>справедливой</u> «Петербургской игры» («сколько Петр должен заплатить Павлу за игру, в которой Петр при бросании монеты получит от Павла 2^{n-1} рублей, если монета упадет гербом впервые на n-м шаге»; математическое ожидание выигрыша Петра равно $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} 2^{n-1} = \infty$);

- теория ошибок наблюдений: «наиболее вероятное значение среди нескольких расходящихся между собой наблюдений и устанавливаемое отсюда наиболее близкое к истине заключение»; выбор кривой распределения в форме полуокружности;
- работы по математической физике;
- идея о представлении общего решения линейных уравнений с частными производными в форме бесконечного ряда, составленного из частных решений.

Лейбниц писал Иоганну (I) Бернулли — отцу Даниила:

...Я радуюсь, что и твой сын носит печать Бернулли
и хранит наследственный блеск фамилии...

В 1911–56 были изданы 29 томов Собрания сочинений Эйлера:

Leonhardi Euleri
OPERA OMNIA

Том VII (1923 г.) содержит статьи по

теории вероятностей,
теории обработки наблюдений,
демографии,
страхованию,

а также заметки «Les recréations mathématiques» (Математические развлечения), среди которых рассматривались:

– Les ponts de Königsberg;
– Notice historiques sur les carrés magiques;
– Le problème des 36 officiers. Carrés latins. Carrés eulériens.

Основные темы работ по исчислению вероятностей, вошедших в VII том:

- Notice historique sur la loterie génoise;
- Théorie mathématique de la loterie génoise;
- Les séquences dans la loterie génoise;
- Loterie génoise et coefficients binomiaux;
  - Le jeu de rencontre;
  - Le jeu de Pharaon;
  - Les loteries à plusieurs classes;
  - Le problème de St.-Pétersburg;
- Le problème de la durée du jeu.

Большая часть работ написаны по-французски. Другие — по латыни и на немецком. Общее число работ, вошедших в 29 томов, — порядка 900.

В теории вероятностей Эйлер не стремился к чисто теоретическим исследованиям.

Напомним: знаменитый трактат Якоба Бернулли «Ars conjectandi», в котором была дана первая теорема теории вероятностей — закон больших чисел, вышел в 1713 г.; Эйлер приехал в Россию в 1727 г. в двадцатилетнем возрасте.

Все работы Эйлера по теории вероятностей и смежным областям были связаны с решением

конкретных проблем, возникающих
из практической деятельности людей.

Вообще, Эйлеру было свойственно участие в решении

конкретных вопросов,

которые были далеки от его непосредственных математических исследований. Достаточно сказать, что он

— написал заключение о качестве **пожарного насоса**;

— занимался вопросом, как **поднять колокол** на одну из московских церквей;

— был экспертом в испытании модели **одноарочного моста** через Неву, предложенной русским изобретателем И. П. Кулибиным.

Эйлер широко известен как **инженер-конструктор**,

- не только создавший теорию гидравлических реактивных турбин,
- но и предложивший свой проект турбины.

Он занимался

картографией,
баллистикой,

написал объемный двухтомный труд по теории корабля

«Морская наука».

Рассматриваемые далее несколько вероятностных и смежных с ними работ Л. Эйлера наглядно показывают, что для него математика была не самоцелью, а

исключительно точным методом

при исследовании конкретных проблем, возникающих из окружавшей его действительности.

Эти работы показывают также, сколь много Эйлером было сделано математических предвидений, сколь много мыслей он стремился как можно скорее изложить на бумаге.

Среди работ Эйлера, относящихся к

ИСЧИСЛЕНИЮ ВЕРОЯТНОСТЕЙ,

особенно известны его работы относительно расчетов в двух

ЛОТЕРЕЯХ — **генуэзской** и **голландской**.

История возникновения этих лотерей и обстоятельства, приведшие Эйлера (в середине его жизни) к расчетам в этих лотереях, таковы.

Генуя, будучи одним из городов-республик (наряду с Римом, Венецией, Пизой и Флоренцией), известна многими своими инновациями, особенно в эпоху Ренессанса (в Италии — 14–16 вв.).

1347 — первый **точно датированный** контракт по **страхованию жизни** «по премии» заключен именно в Генуе;

1430 — в практику страхования были введены контракты по страхованию **беременных женщин и рабов**;

XIV в. — введены контракты по страхованию **морских перевозок**, которые быстро распространились практически во всех морских державах Европы.

Именно в эпоху Возрождения — период преобразований в культурной и социальной жизни Западной Европы — мы находим следы более или менее серьезных дискуссий, в основном философского характера, относительно «вероятностных» рассуждений у

Луки Пачоли (Luca Pacioli, 1445–1517(?)),
Челио Калькаонини (Celio Calcagnini, 1479–1541),
Николы Тартальи (Nicola Fontana Tartaglea, 1500–1557).

Одним из первых, кто стал математически анализировать игровые шансы, по-видимому, был

Джероламо Кардано (Gerolamo Gardano, 1501–1576),

широко известный как изобретатель карданного вала и решивший уравнение третьей степени.

Рукопись Дж. Кардано (около 1525 г.) под названием

Liber de Ludo Aleæ

Книга об азартных играх

не только явилась своего рода практическим пособием для игроков. В ней впервые была высказана

идея комбинаций,

> с помощью которых удобно описывать множество всех возможных исходов (при бросании костей разного рода и в разном числе).

Все это говорит о том, что «дух шанса» витал в воздухе.

Исторически, генуэзской лотерее предшествовали различные **ПАРИ**, которые жители заключали относительно **ШАНСОВ** того,

> кто из 100 сенаторов будет выбран в советники при условии, что случайным образом выбираются пятеро.

Эти пари были (в 16 в.), в конце концов, **запрещены**

> «comme étant immoraux et
> causant la ruine de nombreuses familles».

Однако, в поисках денег для казны, советник Генуэзской республики **Benedito Gentile** предложил устроить лотерею, в основе которой лежала идея описанного пари о выборе 5 из 100 сенаторов.

Вместо 100 сенаторов было предложено 90 цифр $(1, 2, \ldots, 90)$, из которых случайным образом вынимались 5.

ПРАВИЛА: перед розыгрышем каждый игрок

- вносил в кассу ту сумму, какую хотел, и
- записывал по своему желанию 1, 2, 3, 4 или 5 номеров.

Если номера, выбранные игроком, оказывались в числе выпавших, то он получал свою ставку, увеличенную в

15 раз,	если был записан	1 номер,
270 раз,	если были записаны	2 номера,
3 500 раз,	если были записаны	3 номера,
7 500 раз,	если были записаны	4 номера,
110 000 раз,	если были записаны	5 номеров.

Генуэзская лотерея получила широкое распространение в Европе:

1751 — Вена; 1757 — Париж; 1763 — Берлин;

1771 — ее устраивали 26 немецких городов.

1861 — лотерея запрещена в Германии.

По поводу устройства генуэзской лотереи в Пруссии к Эйлеру обратился, письмом от 15.IX.1749, король Фридрих II.

Второй раз Фридрих II обращался к Эйлеру (письмо от 17 авг. 1763) по поводу устройства **ГОЛЛАНДСКОЙ ЛОТЕРЕИ**:

Выпускается 5 серий по 10 000 билетов.
В каждой серии имеется ровно 1 000 выигрышных билетов.
Каждый билет участвует в розыгрыше в каждой из 5 серий.
В некоторых он выигрывает, в некоторых нет.

Устроители лотереи платят, помимо выигранной суммы,
1 дукат на каждый билет, не выигравший ни в одной серии.

$\boxed{\text{Какова вероятность этого события}}$ **?**

Это — лишь один из вопросов, на который Эйлер дает ответ.

В целом же он рассчитывает вероятности во всех случаях, когда билет выигрывает в одной серии, двух и т.д. Эти расчеты представлены в работе

«Решение одного очень трудного вопроса теории вероятностей»
(*Solutions d'une question très dificile dans le calcul des probabilités*),

опубликованной в 1769 г.

Интересно отметить, что в этой работе Эйлер систематически использует для выражения

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdots r}$$

обозначение

$$\left(\frac{n}{r}\right) \quad \text{(иногда, в других работах, } \left[\frac{n}{r}\right]\text{)},$$

что, как мы видим, есть не что иное, как C_n^r, обозначаемое часто также $\binom{n}{r}$, что «ближе» к Эйлеру, нежели C_n^r.

Генуэзской лотерее Эйлер посвятил в общей сложности 4 работы. Он отмечает, что вычисление вероятностей того, что среди 5 выигравших номеров окажется нужное число заранее указанных, не представляет трудностей и хорошо известно.

Его же основной интерес связан с подсчетами вероятностей появления **последовательностей** (пачек) **чисел, идущих в естественном порядке**. Например,

в наборе $(2, 1, 7, 8, 3)$	есть пара $(7, 8)$ — последовательность двух чисел;
в наборе $(25, 26, 27, 1, 3)$	есть тройка $(25, 26, 27)$, объявляемая последовательностью из трех чисел, идущих в естественном порядке.

При подсчетах для Эйлера характерен метод

«от частного к общему».

Сначала он рассматривает отдельные частные случаи, а затем переходит к общей постановке задачи и ее решению.

ПРИМЕР

из его изложения вопроса о **числе последовательностей**:

(a) Пусть есть n билетов с номерами $1, 2, \ldots, n$. Тогда:

число различных случаев, дающих естественную пару чисел (это пары $(1, 2)$, $(2, 3)$, $\ldots$, $(n-1, n)$), равно: $n - 1$,

общее число возможностей извлечения пары чисел: $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$.

Значит, говорит Эйлер,

вероятность получения естественной пары: $\frac{n-1}{C_n^2} = \frac{2}{n}$,

а вероятность неполучения такой пары: $1 - \frac{2}{n} = \frac{n-2}{n}$.

В случае $n = 90$ вероятность получения естественной пары равна $\frac{2}{n} = \frac{2}{90} = \frac{1}{45}$. Эйлер пишет:

> ...таким образом, можно держать пари 1 против 45, что естественная пара не появится...

(b) Пусть извлекаются три билета. Тогда вероятность естественной пары будет

$$\frac{2 \cdot 3 \cdot (n-3)}{n(n-1)},$$

а вероятность получения натуральной тройки –

$$\frac{2 \cdot 3}{n(n-1)}.$$

(c) При извлечении 5 билетов из 90 Эйлер приводит таблицу вероятностей получения естественных последовательностей $(i), (j), \ldots$, состоящих из i членов, j членов и т.д.:

(5)	$\dfrac{2\cdot3\cdot4\cdot5}{90\cdot89\cdot88\cdot87}=\dfrac{1}{511038}$
$(4),\ (1)$	$\dfrac{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot85}{90\cdot89\cdot88\cdot87}=\dfrac{85}{511038}$
$(3),\ (2)$	$\dfrac{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot85}{90\cdot89\cdot88\cdot87}=\dfrac{85}{511038}$
$(3),\ (1),\ (1)$	$\dfrac{3\cdot4\cdot5\cdot85\cdot84}{90\cdot89\cdot88\cdot87}=\dfrac{3570}{511038}$
$(2),\ (2),\ (1)$	$\dfrac{3\cdot4\cdot5\cdot85\cdot84}{90\cdot89\cdot88\cdot87}=\dfrac{3570}{511038}$
$(2),\ (1),\ (1),\ (1)$	$\dfrac{4\cdot5\cdot85\cdot84\cdot83}{90\cdot89\cdot88\cdot87}=\dfrac{398770}{511038}$
$(1),\ (1),\ (1),\ (1),\ (1)$	$\dfrac{85\cdot84\cdot83\cdot82}{90\cdot89\cdot88\cdot87}=\dfrac{404957}{511038}$

Сделав из этой таблицы «практические выводы», Эйлер переходит затем к общей задаче получения естественных последовательностей при извлечении m чисел из множества $\{1, 2, \ldots, n\}$.

На пути решения этой задачи Эйлер приходит, если пользоваться современным языком, к вопросу об отыскании числа $N(m; n)$ решений $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ со значениями в $\{0, 1, 2, \ldots\}$ (целочисленных решений), удовлетворяющих соотношениям

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n = m$$

при ограничениях

$$X_j \in \{k_j^{(1)}, k_j^{(2)}, \ldots\},$$

где $0 \leq k_j^{(1)} < k_j^{(2)} < \cdots \leq m$, $j = 1, 2, \ldots, n$ и $m \in \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Скажем, если ищутся целочисленные (упорядоченные) решения X_1, X_2, X_3 соотношения

$$X_1 + X_2 + X_3 = 3$$

при ограничениях $0 \leq X_j \leq 3$, $j = 1, 2, 3$, то простым перебором можно найти все 10 решений:

$$\begin{array}{ccccc} (1,1,1) & (0,1,2) & (0,2,1) & (1,0,2) & (1,2,0) \\ (2,0,1) & (2,1,0) & (0,0,3) & (0,3,0) & (3,0,0). \end{array}$$

Разумеется, такой «переборный» способ отыскания решений становится нерациональным при больших n и m.

Рассуждения Эйлера относительно отыскания числа $N(m;n)$ упорядоченных решений $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ соотношений $X_1+X_2+\cdots+X_n=m$, явившиеся основой идеи

метода производящих функций,

состояли в следующем.

Введем в рассмотрение (производящие) функции

$$A_1(x) = x^{k_1^{(1)}} + x^{k_1^{(2)}} + \cdots, \quad \ldots, \quad A_n(x) = x^{k_n^{(1)}} + x^{k_n^{(2)}} + \cdots,$$

построенные с учетом априорных ограничений

$$X_1 \in \{k_1^{(1)}, k_1^{(2)}, \ldots\}, \quad \ldots, \quad X_n \in \{k_n^{(1)}, k_n^{(2)}, \ldots\},$$

где $0 \le k_j^{(1)} < k_j^{(2)} < \cdots \le m$, $j = 1, 2, \ldots, n$ и $m \in \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Составим их произведение

$$A(x) = A_1(x) \cdots A_n(x) = (x^{k_1^{(1)}} + x^{k_1^{(2)}} + \cdots) \cdots (x^{k_n^{(1)}} + x^{k_n^{(2)}} + \cdots).$$

При перемножении скобок в правой части будут возникать члены x^k с некоторыми коэффициентами. Если взять $k = m$, то увидим, что x^k возникает от перемножения членов вида

$$x^{k_1^{(i_1)}}, \ldots, x^{k_n^{(i_n)}} \quad \text{с} \quad k_1^{(i_1)} + \cdots + k_n^{(i_n)} = m.$$

Число же разных возможностей такого типа есть в точности число $N(m;n)$ решений интересующей нас системы

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n = m$$

при ограничениях

$$X_j \in \{k_j^{(1)}, k_j^{(2)}, \ldots\}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Тем самым установлено следующее простое предложение, которое Эйлер систематически использует в своих вычислениях.

ЛЕММА 1.

Число $N(m; N)$ *целочисленных решений системы системы*

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n = m$$

при условиях

$$X_j \in \{k_j^{(1)}, k_j^{(2)}, \ldots\}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

есть в точности коэффициент при x^m *в произведении*

$$A_1(x) \cdots A_n(x)$$

производящих функций

$$A_j(x) = x^{k_j^{(1)}} + x^{k_j^{(2)}} + \cdots, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Приведем несколько примеров на применение этой леммы.

ЗАДАЧА О ВЗВЕШИВАНИИ:

Какие грузы можно взвесить гирями в $1, 2, 2^2, \ldots$ граммов и каким числом способов

?

Решение: Пусть

$X_j = 0$, если гиря с номером j (веса 2^j граммов)
не используется при взвешивании, и
$X_j = 2^j$, если используется.

Тогда груз веса m может быть представлен в виде

$$X_1 + X_2 + \cdots = m,$$

где $X_j \in \{k_j^{(1)}, k_j^{(2)}\} \equiv \{0, 2^j\}$, и, очевидно,

$$A_j(x) = x^{k_j^{(1)}} + x^{k_j^{(2)}} = 1 + x^{2^j}.$$

Значит, $\quad A(x) = \prod_{j\geq 1} A_j(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots$.
Перемножая выражения в скобках, найдем, что

$$A(x) = 1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots ,$$

где $\alpha_m = N(m;\infty)$ есть в точности число разных представлений числа m в виде суммы $m = k_1^{(i_1)} + k_2^{(i_2)} + \cdots$, где $k_j^{(i_j)} = 0$ или 2^j.

- Заметим, что Эйлера не беспокоит вопрос о записи $X_1 + X_2 + \cdots = m$ с **бесконечным** числом членов, поскольку ограничения $X_j \in \{0, 2^j\}$ автоматически приводят к тому, что в сумме $X_1 + X_2 + \cdots$, равной m, на самом деле присутствует лишь **конечное** число величин $X_1, X_2, \ldots$.

  Однако Эйлер предпочитает писать «бесконечные» суммы, имея в виду, что интересно найти решение сразу для всех значений m из множества $\{0, 1, 2, \ldots\}$.

Итак, функцию $A(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots$ надо представить в виде

$$A(x) = 1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots\ ,$$

Эйлер поступает так. Он записывает тождества

$$(1-x)(1+x) = 1-x^2, \quad (1-x^2)(1+x^2) = 1-x^4, \quad \ldots,$$

из которых находит, что при $|x| < 1$ верно равенство

$$(1-x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots = 1$$

и, значит,

$$A(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots \quad (= 1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots).$$

Тем самым, $\alpha_m = 1$ для всех $m = 1, 2, \ldots$, и, значит, всякий груз в целое число граммов m можно взвесить гирями веса $1, 2, 2^2, \ldots$ г и притом единственными способом ($\alpha_m = N(m; \infty) = 1$).

ЗАДАЧА О РАЗБИЕНИИ ЧИСЛА:

Рассмотрим представление числа m в виде $m = X_1 + \cdots + X_n$ при ограничениях $X_j \in \{k_j^{(1)}, k_j^{(2)}, \ldots\} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Спрашивается,

- $\boxed{\text{чему равно число } N(m; n) \text{ таких представлений}}$ **?**

Решение: здесь $A_j(x) = (1 + x + x^2 + \cdots)$ для любого $j = 1, \ldots, n$, и, значит,

$$A(x) = \prod_{j=1}^{n} A_j(x) = (1 + x + x^2 + \cdots)^n.$$

Имеем для $|x| < 1$

$$(1 + x + x^2 + \cdots)^n = \left(\frac{1}{1 - x}\right)^n = \alpha_1 + 2\alpha_2 x + 3\alpha_3 x^2 + \cdots .$$

После дифференцирования находим

$$\frac{n}{(1 - x)^{n+1}} = \alpha_1 + 2\alpha_2 x + 3\alpha_3 x^2 + \cdots .$$

Откуда при $x = 0$ получаем $\alpha_1 = n$.

Дифференцируя еще раз и снова полагая $x = 0$, получаем

$$\alpha_2 = \frac{n(n+1)}{2},$$

и после m-кратного дифференцирования найдем, что

$$\alpha_m = \frac{n(n+1)\cdots(n+m-1)}{m!} = C_{n+m-1}^m.$$

В современных руководствах по комбинаторике и дискретной теории вероятностей мы находим много задач, которые решаются прямым применением

метода производящих функций Эйлера.

Приведем некоторые из них.

ЗАДАЧА ГАЛИЛЕЯ [1564 (Пиза) – 1642 (близ Флоренции)]:

Одновременно и независимым образом бросаются три правильные шестигранные кости с нанесенными на их гранях цифрами $1, 2, \ldots, 6$. Спрашивается,

• какова вероятность P_{10}, что сумма выпавших очков равна 10 **?**

(Будет показано, что $P_{10} = 1/8$.)

Решение: Здесь $X_1 + X_2 + X_3 = 10$, $1 \le X_i \le 6$. Общее число возможностей (X_1, X_2, X_3) при бросании трех костей равно $6^3 = 216$. Вероятность

$$P_{10} = \frac{N(10;3)}{216},$$

где $N(10;3)$ есть коэффициент при x^{10} в разложении $(x + x^2 + \cdots + x^6)^3$ по степеням x.

Заметим, что

$$x+x^2+\cdots+x^6 = x(1+x+\cdots+x^5) = x(1-x^6)(1+x+x^2+\cdots).$$

Значит,

$$(x+x^2+\cdots+x^6)^3 = x^3(1-x^6)^3(1+x+x^2+\cdots)^3.$$

Поскольку

$$(1+x+x^2+\cdots)^n = \sum_{r\geq 0} C^r_{n+r-1}x^r \quad \text{и} \quad (a+b)^n \sum_{r=0}^{n} C^r_n a^r b^{n-r},$$

имеем

$$(x+x^2+\cdots+x^6)^3 = x^3(1+3x+6x^2+\cdots+36x^7)(1-3x^6+3x^{12}-x^{18}).$$

Отсюда видим, что коэффициент при x^{10} (т.е. число $N(10;3)$) равен $36-9=27$. Таким образом,

$$P_{10} = \frac{N(10;3)}{216} = \frac{27}{216} = \frac{1}{8}. \qquad \square$$

ЗАДАЧА О «СЧАСТЛИВЫХ» БИЛЕТАХ:

Билеты, общим числом 10^6, имеют номера от 000 000 до 999 999. Спрашивается,

- $\boxed{\text{какова вероятность } P \text{ того, что у купленного билета сумма первых трех цифр равна сумме последних трех}}$ **?**

(Случайность номера означает, что его вероятность равна 10^{-6}.)

Решение: Пусть $(X_1, \ldots, X_6)$ – вектор, состоящий из независимых одинаково распределенных величин с

$$p_k = \mathsf{P}(X_i = k) = \frac{1}{10}.$$

Производящая функция

$$A_{X_i}(x) = \mathsf{E}x^{X_i} = \sum_{k=0}^{9} p_k x^k = \frac{1}{10}(1 + x + \cdots + x^9) = \frac{1}{10}\,\frac{1 - x^{10}}{1 - x}.$$

Из предполагаемой независимости величин $X_1, \ldots, X_6$ следует, что

$$A_{X_1+X_2+X_3}(x) = A_{X_4+X_5+X_6}(x) = \frac{1}{10^3} \frac{(1-x^{10})^3}{(1-x)^3},$$

и производящая функция величины $Y = (X_1 + X_2 + X_3) - (X_4 + X_5 + X_6)$ дается выражением

$$A_Y(x) = A_{X_1+X_2+X_3}(x)\, A_{X_4+X_5+X_6}\left(\tfrac{1}{x}\right) = \frac{1}{10^6} \frac{1}{x^{27}} \left(\frac{1-x^{10}}{1-x}\right)^6.$$

Записывая $A_Y(x)$ в виде $A_Y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k$ и производя простые (но несколько громоздкие) выкладки, найдем, что

$$\boxed{q_0 = \frac{55252}{10^6} = 0.05525}\,.$$

Величина $q_0 = \mathsf{P}(Y = 0) = \mathsf{P}(X_1 + X_2 + X_3 = X_4 + X_5 + X_6)$, что и есть интересующая нас вероятность P получения «счастливого» билета.

Весьма сходным образом решается задача о распределении вероятностей $\mathsf{P}(\xi_1-\xi_2=k)$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$, разности $\xi_1-\xi_2$ двух независимых случайных величин ξ_1 и ξ_2, имеющих распределение Пуассона с параметрами λ_1 и λ_2 соответственно.

Имеем

$$A_{\xi_1}(x)=\mathsf{E}x^{\xi_i}=\sum_{k=0}^{\infty}\mathsf{P}(\xi_i=k)x^k=e^{-\lambda_i(1-x)}.$$

Отсюда

$$A_{\xi_1-\xi_2}(x)=A_{\xi_1}(x)A_{\xi_2}(\tfrac{1}{x})=e^{-(\lambda_1+\lambda_2)\sqrt{\lambda_1+\lambda_2}(1+t)/t},$$

где $t=a\sqrt{\lambda_1/\lambda_2}$.

Из анализа известно, что

$$e^{\lambda(1+t)/t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} t^k I_k(2\lambda),$$

где $I_k(2\lambda)$ есть **модифицированная функция Бесселя** первого рода порядка k:

$$I_k(2\lambda) = \lambda^k \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2r}}{r!\,\Gamma(k+r+1)}, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Таким образом,

$$\boxed{\mathsf{P}(\xi_1 - \xi_2 = k) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{k/2} I_k(2\sqrt{\lambda_1\lambda_2})}$$

для всех $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

В частности, при $k = 0$

$$\mathsf{P}(\xi_1 - \xi_2 = 0) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda^r}{r!}\right)^2. \qquad \square$$

Приведем еще одну задачу (о «встрече»), которую рассматривал Эйлер.

В отличие от приведенных выше задач, решаемых Эйлером

методом производящих функций,

эта задача интересна тем, что при ее решении Эйлер, в сущности, использовал тот прием, который теперь называют

методом «включения-исключения»,

методом решета.

ЗАДАЧА О ВСТРЕЧЕ (называемая ныне также задачей о совпадениях) формулируется Эйлером (в работе «Вычисление вероятностей в игре “встреча”») так:

Два игрока (скажем, A и B) имеют каждый по полной колоде карт. Они одновременно извлекают карты, пока не достанут одинаковые — и тогда выигрывает игрок A. Если такого совпадения не происходит, то выигрывает игрок B. Спрашивается,

- $\boxed{\text{каковы вероятности } P_\mathsf{A} \text{ и } P_\mathsf{B} \text{ выигрыша каждого из игроков}}$ **?**

При решении этой задачи (входящей практически во все современные руководства и задачники по теории вероятностей) Эйлер прежде всего заменяет карты занумерованными билетами $1, 2, \ldots, n$ (если колоды состоят из n карт) и затем, следуя своему принципу «от частного к общему», начинает с рассмотрения малых n.

Если $n = 1$, то $\boxed{P_{\text{A}} = 1, \quad P_{\text{B}} = 0}$.

Если $n = 2$, то $\boxed{P_{\text{A}} = \frac{1}{2}, \quad P_{\text{B}} = \frac{1}{2}}$.

Если $n = 3$, то Эйлер замечает, что при подсчете вероятностей P_{A} и P_{B} можно считать, что у игрока А билеты идут в порядке $(1, 2, 3)$. Тогда у игрока В возможны следующие 6 комбинаций:

$$\overbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}}^{\substack{\text{комбинации,}\\ \textbf{благоприятные для игрока А}}}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}}_{\substack{\text{комбинации,}\\ \textbf{благоприятные для игрока В}}}.$$

Тем самым,

$$\boxed{P_{\text{A}} = \frac{6}{4} = \frac{2}{3}, \quad P_{\text{B}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}}.$$

При $n=4$ Эйлер составляет таблицу возможных (в числе 24) комбинаций:

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1\\2\\4\\3\end{pmatrix},\quad \ldots,\quad \begin{pmatrix}4\\3\\2\\1\end{pmatrix}$$

и непосредственно подсчитывает, что $\boxed{P_{\text{A}} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8},\quad P_{\text{B}} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}}$.

При $n=5$ число комбинаций равно 120 и Эйлер делает такое замечание:

...Еще большее число карт сделало бы это представление [в виде таблицы комбинаций] **совершенно неосуществимым**. Впрочем, такой действительный подсчет мало бы послужил для определения в общем надежд обоих игороков A и B, как велико бы ни было число карт. Для этого результата нужно сделать общие замечания, которые могут привести нас к **знанию БОЛЬШЕГО числа карт, если нам уже известны вероятности для МЕНЬШЕГО числа**...

Сделанные в частных случаях вычисления приводят Эйлера к следующему выводу:

> ...Если бы число карт было бесконечным, то надежда игрока А выразилась бы следующим бесконечным рядом:
>
> $$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-\frac{1}{24}+\frac{1}{120}-\frac{1}{720}+\text{и т.д.},$$
>
> а надежда В – следующим рядом:
>
> $$1-\left[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-\frac{1}{24}+\frac{1}{120}-\frac{1}{720}+\text{и т.д.}\right].$$
>
> Мы знаем, что этот последний ряд выражается через $1/e$. Значит, для случая $n=\infty$ надежда А будет равна $1-1/e$, а надежда В будет равна $1/e$... и это отношение будет правильным, как только число карт будет больше 20. Вследствие этого оно будет очень точным для этой игры, которую играют, обычно употребляя колоду в 52 карты...

В современном понимании, приведенные рассуждения Эйлера легко следуют (как отмечено выше) из формул «включения-исключения»: если $\mathsf{P}(A)$ – вероятность события A, то

$$\mathsf{P}(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{1 \le i \le n} \mathsf{P}(A_i) - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} \mathsf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_1}) + \dots +$$

$$+ (-1)^{m+1} \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_m \le n} \mathsf{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_m}) +$$

$$+ \dots + (-1)^{n+1} \mathsf{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n),$$

$$\mathsf{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \sum_{1 \le i \le n} \mathsf{P}(A_i) - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} \mathsf{P}(A_{i_1} \cup A_{i_2}) + \dots +$$

$$+ (-1)^{m+1} \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_m \le n} \mathsf{P}(A_{i_1} \cup \dots \cup A_{i_m}) +$$

$$+ \dots + (-1)^{n+1} \mathsf{P}(A_1 \cup \dots \cup A_n).$$

В компактной форме эти формулы могут быть записаны в виде

$$\mathsf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{\varnothing\neq S\subseteq T} (-1)^{N(S)+1}\mathsf{P}\left(\bigcap_{i\in S} A_i\right), \qquad T=\{1,\ldots,n\},$$
$$\mathsf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{\varnothing\neq S\subseteq T} (-1)^{N(S)+1}\mathsf{P}\left(\bigcup_{i\in S} A_i\right),$$

$N(S)$ – число элементов в подмножестве $S\subseteq T$.

Итак, покажем, как из этих формул придти к результатам Эйлера, установленным им «экспериментальным» путем.

Удобно переформулировать рассматриваемую задачу на языке подстановок $\begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & n \\ a_1, & a_2, & \ldots, & a_n \end{pmatrix}$. Очевидно, что интересующая нас вероятность $P_{\text{В}}$ есть вероятность того, что у подстановок отсутствуют номера i со свойством $a_i = i$.

Покажем, что число D_n, $n \ge 1$, таких подстановок («число беспорядков») задается формулой

$$D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \sim \frac{n!}{e} \quad (n \to \infty), \qquad D_0 = 1.$$

Обозначим A_i событие, состоящее в том, что $a_i = i$.

Понятно, что число $N(A_i)$ исходов, приводящих к событию A_i, задается формулой $$N(A_i) = (n-1)!.$$

Аналогично, $$N(A_i A_j) = (n-2)! \quad \text{для } i \ne j$$

и, вообще, $$N(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k}) = (n-k)!.$$

Интересующее нас число D_n равно

$$N\Big(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_n\Big).$$

Мы находимся в рамках **«классической»** теории вероятностей, когда вероятность события $\mathsf{P}(A)$ подсчитывается по формуле

$$\boxed{\mathsf{P}(A) = \frac{N(A)}{N}},$$

N — общее число элементарных исходов,
$N(A)$ — число исходов, приводящих к событию A.

Поэтому для чисел $N(\cdot)$ справедливы те же самые **формулы включения-исключения**, что и для вероятностей $\mathsf{P}(\cdot)$. В частности, с учетом того, что

$$N\left(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_n\right) = N - N(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n),$$

находим, что

$$\begin{aligned} D_n &= N\left(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_n\right) \\ &= N(\Omega) - S_1 + S_2 + \cdots + (-1)^m S_m + \cdots + (-1)^n S_n, \end{aligned}$$

где $\quad S_m = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_m \le n} N(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_m}).$

Число членов в последней сумме равно C_n^m. Поэтому с учетом $N(A_{i_1} \cdots A_{i_k}) = (n-k)!$ находим, что $S_m = (n-m)!\, C_n^m$, и, значит,

$$
\begin{aligned}
D_n = n! - C_n^1(n-1)! + C_n^2(n-2)! + \cdots + \\
+ (-1)^m C_n^m (n-m)! + \cdots + (-1)^n C_n^n \cdot 0! \\
= \sum_{m=0}^{n} (-1)^m C_n^m (n-m)!.
\end{aligned}
$$

Тем самым, вероятность P_{B} того, что нет совпадений $a_i = i$ ни при каких i [т.е. вероятность $\mathsf{P}(\overline{A}_1 \cdots \overline{A}_n)$], задается формулой

$$
P_{\mathsf{B}} = \frac{N(\overline{A}_1 \cdots \overline{A}_n)}{n!} = \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m}{m!} = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} \sim \frac{1}{e}.
$$

Соответственно, вероятность $P_{\mathsf{A}} = 1 - P_{\mathsf{B}}$ будет задаваться формулой

$$1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} \sim 1 - \frac{1}{e},$$

первые члены которой в точности совпадают с теми, которые были указаны Эйлером:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{24} + \frac{1}{120} - \frac{1}{720} + \text{и т.д.},$$

Интересно отметить, что к приведенным результатам можно было бы придти, привлекая метод производящих функций. Действительно, имея $D_0 = 1$ и $D_1 = 0$, находим, что для числа подстановок D_n справедливы рекуррентные соотношения

$$D_n = (n-1)[D_{n-1} + D_{n-2}],$$

из которых следует, что $D_n - nD_{n-1} = -[D_{n-1} - (n-1)D_{n-2}]$.

Отсюда индукцией назад находим, что

$$D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$$

и, значит, для экспоненциальной производящей функции $E(x)$ последовательности $(D_n)_{n\geq 0}$ получаем

$$E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \frac{x^n}{n!} = 1 + \sum_{n\geq 2} D_n \frac{x^n}{n!} = 1 + \sum_{n\geq 2} \Big\{ nD_n + (-1)^n \Big\} \frac{x^n}{n!}$$

$$= 1 + \sum_{n\geq 0} \frac{D_n}{n!} x^n + \Big[e^{-x} - (1-x) \Big] = xE(x) + \Big[e^{-x} - (1-x) \Big].$$

Тем самым,

$$E(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$$

и, следовательно,

$$E(x) = \Big(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \cdots \Big)(1 + x + x^2 + \cdots).$$

Поскольку в то же самое время $E(x) = \sum_{n \geq 0} D_n x^n / n!$, из сопоставления с предшествующими формулами можно заключить (хотя это не совсем просто), что

$$D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Мы видим из приведенных рассмотрений, что метод включения-исключения, которым, в сущности, пользовался Эйлер, приводит здесь к ответу быстрее, нежели метод производящих функций.

В седьмом томе Избранных трудов Эйлера в разделе «Теория ошибок наблюдений» (La théorie des erreurs d'observation) помещено две работы:

Observationes in praecedentum dissertationem
illustris Bernoulli (1771)

(Замечания к предыдущей статье прославленного Бернулли)

и

Éclaircissement sur le mémoire de Mr. de La Grange
inséré dans le V volume des *Mélanges de Turin*,
concernant la méthode de prendre le milieu entre les résultats
de plusieurs observations, etc. (1785)

(Разъяснения к статье г-на Лагранжа,
помещенной в V томе «Туринских записок»,
посвященной методу составления среднего
из результатов многих измерений и пр.)

Из названий видим, что они связаны с работами Д. Бернулли и Лагранжа об измерениях значений (неизвестного параметра θ по результатам наблюдений $x_1, x_2, \ldots, x_n$).

К такой задаче приводили запросы многих опытных наук (астрономия, геодезия,. . .), где требовалась «правильная» обработка результатов наблюдений.

Уже на ранних этапах было осознано, где ошибки в наблюдениях бывают как

систематические
(вызванные принятой системой наблюдений, используемым прибором для измерения),

так и

случайные
(вызванные точностью измерения, например).

С целью элиминирования случайных ошибок в астрономии, геодезии, ... постоянно использовалось правило «среднего взвешенного».

В XVIII в. вопросу о «правильных» методах измерений было посвящено много работ.

Одним из первых, кто стал рассматривать случайные ошибки измерений как случайные величины, был, видимо,

Th. SIMPSON

“On some curious and very interesting subjects in mechanics, physical astronomy and speculative mathematics”

London, 1757,

предложивший для распределения ошибок использовать распределение с **треугольной плотностью**.

В работе **Д. БЕРНУЛЛИ**

“Diludicatio maxime probabilis plurium observationum discrepantium atque verisimillima inductio inde formanda”,

Acta Ac. sc. Petrop. (1771:1), 1778, 3–23,

была дана развернутая критика метода «средних значений» и в качестве плотности распределения $p_\theta(x)$ была предложена **полуокружность**

$$p_\theta(x) = \sqrt{r^2 - (x-\theta)^2}.$$

(В основе критики Д. Бернулли лежит тот тезис, что правило среднего арифметического может применяться только в том случае, когда вероятности ошибок всех измерений равны, чего на самом деле на практике не происходит.)

Оценкой неизвестного значения Д. Бернулли предлагал брать такое значение θ, на котором достигается максимум функции

$$p_\theta(0)p_\theta(x_1)\cdots p_\theta(x_n).$$

Теперь мы называем так найденное $\widehat{\theta}$

оценкой максимального правдоподобия.

В работе «Замечание к предыдущей статье прославленного Бернулли» Эйлер отмечает, что выбор в качестве закона ошибок **полукругового** распределения

- ничем не обоснован,
- представляет «некоторую метафизику» и к тому же
- приводит к очень сложным вычислениям.

(Лишь только для случая $n = 2$ получается оценка в виде среднего арифметического.)

Взамен Эйлер предлагает в качестве оценки для θ брать **средневзвешенную** величину

$$\boxed{\widehat{\theta} = \frac{\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}},$$

где α_i — «вес» наблюденного значения x_i.

Из вида приведенной оценки следует, что

$$\alpha_1(\widehat{\theta} - x_1) + \alpha_2(\widehat{\theta} - x_2) + \cdots + \alpha_n(\widehat{\theta} - x_n) = 0.$$

В качестве «весов» α_i Эйлер предлагает брать величины

$$\alpha_i = r^2 - (\widehat{\theta} - x_i)^2.$$

Тем самым, метод Эйлера нахождения $\widehat{\theta}$ (являющийся по современной терминологии сочетанием **метода среднего значения** и **метода максимального правдоподобия**) приводит к решению уравнения 3-й степени

$$(\widehat{\theta} - x_i)^3 + \cdots + (\widehat{\theta} - x_n)^3 = r^2[\widehat{\theta} - (x_1 + \cdots + x_n)].$$

Предположим сейчас, что среди наблюдений $x_1, \ldots, x_n$ есть **аномально большие**. Пусть, скажем, таким является значение x_1. Тогда это наблюдение естественно не включать в рассмотрение, т.е. его вес α_1 должен быть равен нулю, а значит,

$$r^2 - (\widehat{\theta} - x_1)^2 = 0.$$

Отсюда вытекает, что приведенное выше уравнение 3-й степени может быть сведено к уравнению 2-й степени вида

$$x(a + b + cx) = d,$$

которое Эйлер предлагает решать **методом цепных дробей**:

$$x = \frac{d}{a + b + cx} \quad \Rightarrow \quad x = \cfrac{d}{a + b + \cfrac{cd}{a + b + \cfrac{cd}{a + b + \cfrac{cd}{a + b + \ddots}}}}$$

Вторая работа Эйлера («Разъяснения к статье г. Лагранжа...») была им написана в связи с большим мемуаром Лагранжа, посвященным методу максимального правдоподобия.

Вопрос, который Эйлер ставит в этой работе, инициированной статьей Лагранжа, таков.

> Пусть при измерении некоторой величины θ совершаются ошибки ε_i, принимающие значения -1, 0, 1 с вероятностями a, b, c соответственно $(a+b+c=1)$. Спрашивается:
>
> - $\boxed{\text{с какой вероятностью среднее арифметическое } \frac{1}{n}(x_1+\cdots+x_n) \text{ принимает те или иные значения}}$ **?**

Следуя своему стилю, Эйлер дает таблицы соответствующих вероятностей для средних арифметических при разных значениях n.

Последние две части VII тома полного Собрания сочинений Эйлера содержат его статьи по

ДЕМОГРАФИИ и **СТРАХОВАНИЮ жизни**.

О большом интересе Эйлера к демографическом проблемам, таким, как

- прирост населения,
- численность населения в последующие годы,
- время удвоения численности населения и т.п.,

свидетельствует то, что в работе

«Введение в анализ бесконечно малых»
глава «О показательных и логарифмических количествах»

он приводит несколько задач демографического характера, которые — несмотря на их простоту — легли в основу

«математической демографии».

Вот один из примеров.

Число жителей некой области увеличивается ежегодно на 1/30 свою часть; вначале область населяли 100000 человек. Спрашивается, каково будет число жителей через 100 лет? Эйлер дает такой ответ: 2654874 и получает его так.

Через год число жителей будет $(1 + \frac{1}{30}) \cdot 100000 = \frac{31}{30} \cdot 100000$. Через два года $(\frac{31}{30})^2 \cdot 100000$, через 100 лет число жителей будет равно

$$\left(\frac{31}{30}\right)^{100} \cdot 100000.$$

Логарифмируя, Эйлер получает

$$100 \cdot \log_{10} \frac{31}{30} + \log_{10} 10^5 = 100 \cdot 0.014240439 + 5 = 6.4240439.$$

Этому логарифму соответствует число 2654874; таким образом, через 100 лет число жителей увеличится в $15\frac{1}{2}$ раза.

Конечно, эта задача есть простейший пример на формулу простых процентов, которую, пользуясь банковской интерпретацией, можно изложить следующим наглядным образом.

Предположим, что Вы открываете «банковский счет с процентной ставкой $r(m)$ начисления процентов m раз в год». Это означает, что через N лет внесенный Вами начальный капитал B_0 станет равным

$$B_N(m) = B_0\left(1 + \frac{r(m)}{m}\right)^{mN}.$$

(В случае непрерывного начисления процентов с процентной ставкой $r = r(\infty)$ начальный капитал B_0 через N лет станет равным $B_N = B_0 e^{rN}$ [формула сложных процентов].)

В связи с этой банковской интерпретацией можно задаться таким вопросом: через какое количество N лет Ваш капитал (при непрерывно начисляемой процентной ставке $r = a/100$) увеличится в два раза? Ясно, что N должно определяться из соотношения

$$2B_0 = B_0 e^{\frac{a}{100}\cdot N},$$

т.е. из соотношения $2 = e^{\frac{a}{100}\cdot N}$. Отсюда

$$N = \frac{\ln 2 \cdot 100}{a} \approx \frac{70}{a}.$$

На практике (при начислении процентов дважды в год) широко распространено так называемое правило 72: если процентная ставка есть $a/100$, то удвоение капитала произойдет через $72/a$ лет.

Следующая таблица дает представление о значениях $B_N(m)$ и $B_N = B_N(\infty)$ для $r(m) = 0.1$ $(a/100 = 10/100 = 0.1)$:

m \ N	1	2	12	∞
1	11000	11025	11047	11052
5	16015	16289	16453	16487
10	25937	26533	27070	27183

Мы умышленно привели эту таблицу – с тем чтобы дать представление о том, что всякий раз, когда речь шла о конкретных вопросах, Эйлер стремился к тому, чтобы «довести вычисления до числа» и представить их в наглядной форме.

Вот примеры других демографических вопросов, на которые Эйлер дает ответ:

- Пусть к концу каждого века число людей удваивается. Каков годовой прирост **?**

  (**Ответ**: 1/144.)

- Пусть число людей увеличивается ежегодно на $\frac{1}{100}$ часть. Через сколько лет число людей удесятерится **?**

  (**Ответ**: 231 год.)

Вопросы эти, и многие аналогичные, просты. Но именно на их примере, следуя своему принципу «от частного к общему», Эйлер обрисовывает тот круг задач, приемов и методов их решения, который привел к созданию

МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ДЕМОГРАФИИ.

Эйлер по праву считается создателем этой теории.

Он заложил математический фундамент под целый ряд основных понятий демографии, таких, например, как

- – понятие вымирания (таблицы смертности),
- – понятие прироста населения и др.

Им были сформулированы основные принципы, на которых должно строиться дело личного страхования.

Приведем в этой связи названия некоторых работ Эйлера по демографии и страхованию:

- «Общие исследования о смертности и умножении человеческого рода»,
- «Об умножении человеческого рода»,
- «Расчеты г. Леонарда Эйлера об организации вдовьей кассы»,
- «Разъяснения о публичных учреждениях в пользу вдов и умерших,. . . »,
- «Решение вопроса теории вероятностей: сколько должны выплатить двое, чтобы после смерти обоих их наследникам была выплачена определенная сумма денег».

Мы заключим это описание примером задачи, которую Эйлер рассматривает (среди 6 задач) в первой упомянутой выше работе «Общие исследования о смертности и умножении человеческого рода»:

Какова вероятность P$(n|m)$ того, что человек в возрасте m лет проживет еще n лет?

Рассуждения Эйлера здесь таковы.

Пусть

N — количество одновременно родившихся людей и

$(k) \cdot N$ — количество людей, оставшихся в живых через k лет.

(Следовательно, (k) есть вероятность выживания в течение k лет; в современных обозначениях, принятых на Международном актуарном конгрессе в Париже в 1900 г., эта вероятность (k) обозначается ${}_kp_0$.)

Тогда вероятность $\mathsf{P}(n|m)$ того, что человек в возрасте n лет проживет еще m лет, определяется формулой

$$\mathsf{P}(n|m) = \frac{(m+n)}{(n)},$$

которая с точки зрения условных вероятностей вполне понятна.

Заметим, что при конкретных численных расчетах значения (m) Эйлер брал из различных демографических таблиц, отмечая при этом, что они

> не носят универсального характера и могут быть применены при расчетах только для тех регионов, для которых они были составлены.