Асимптотические и численные методы в исследовании обобщенного уравнения Бюргерса

Борис Дубровин[1], Мария Елаева[2]

[1]SISSA, Trieste, Italy,
Лаборатория геометрических методов математической физики,
МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия
[2]Лаборатория геометрических методов математической физики,
МГУ им. М.В. Ломоносова,
Финансовый университет при правительстве РФ,
Москва, Россия

30 октября – 2 ноября

Постановка задачи

Класс нелинейных уравнений в частных производных

$$u_t + a(u)u_x = \varepsilon[b(u)u_{xx} + c(u)u_x^2],$$

где коэффициенты $a(u)$, $b(u)$, $c(u)$ — гладкие функции, $a'(u) \neq 0$

Задача Коши с ε–независимыми начальными данными

$$u_t + a(u)u_x = \varepsilon[b(u)u_{xx} + c(u)u_x^2]$$

$$u(x, 0; \varepsilon) = F(x)$$

Задача Коши для невязкого уравнения

$$v_t + a(v)v_x = 0$$

$$v(x, 0) = F(x)$$

Постановка задачи

Сравнение решений вязкого и невязкого уравнений

$$|u(x,t;\varepsilon) - v(x,t)| \to 0 \quad \text{for} \quad \varepsilon \to 0+, \quad x \in [x_1, x_2], \quad 0 \le t \le t_1$$

Решение невязкого уравнения определно на $[0, t_0]$

$$t_0 = \min_{x\in\mathbb{R}} \left(-\frac{1}{[a\,(F(x))]_x} \right)$$

Предел

$$\lim_{t\to t_0,\ t<t_0} v(x_0, t) = v_0$$

существует, но производные $v_x(x,t)$ $v_t(x,t)$ терпят разрыв в точке (x_0, t_0)

Задача Коши для невязкого уравнения

$$v_t + a(v)v_x = 0$$

$$v(x,0) = F(x)$$

Решение: $$x = a(v)t + f(v),\ f\left(v(x,0)\right) \equiv x$$

Точка градиентной катастрофы (x_0, t_0)

Значение решения в точке градиентной катастрофы — $v_0 = v(x_0, t_0)$.
Тройка (x_0, t_0, v_0) удовлетворяет системе уравнений

$$x_0 = a_0 t_0 + f_0$$

$$0 = a_0' t_0 + f_0'$$

$$0 = a_0'' t_0 + f_0''$$

$$a_0 = a(v_0), \quad f_0 = f(v_0), \quad a_0' = \left(\frac{da(v)}{dv}\right)_{v=v_0}, \quad a_0'' = \left(\frac{d^2a(v)}{dv^2}\right)_{v=v_0}$$

Лемма

В окрестности точки градиентной катастрофы решение невязкого уравнения допускает следующее представление

$$v(x,t) = v_0 + k^{1/3}\bar{v}(\bar{x},\bar{t}) + \mathcal{O}\left(k^{2/3}\right), \quad k \to 0, \quad t < t_0$$

$$\bar{x} = \frac{x - x_0 - a_0(t-t_0)}{k}, \quad \bar{t} = \frac{t-t_0}{k^{2/3}}, \quad \kappa := -\frac{1}{6}(a_0'''t_0 + f_0''') \neq 0$$

где функция $\bar{v}(\bar{x},\bar{t})$ для $\bar{t} < 0$ определяется корнем (единственным) кубического уравнения

$$\bar{x} = a_0'\bar{v}\,\bar{t} - \kappa\,\bar{v}^3$$

Асимптотическая формула

$$u(x,t;\varepsilon) = v_0 + \gamma\,\varepsilon^{1/4} U\left(\frac{x - x_0 - a_0(t-t_0)}{\alpha\,\varepsilon^{3/4}}, \frac{t-t_0}{\beta\,\varepsilon^{1/2}}\right) + \mathcal{O}\left(\varepsilon^{1/2}\right)$$

Здесь

$$\alpha = \left(\frac{\kappa\, b_0^3}{{a_0'}^3}\right)^{1/4}, \quad \beta = \left(\frac{\kappa\, b_0}{{a_0'}^3}\right)^{1/2}, \quad \gamma = \left(\frac{b_0}{\kappa\, a_0'}\right)^{1/4}$$

$$U(X,T) = -2\frac{\partial}{\partial X}\log\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{8}\left(z^4 - 2z^2 T + 4z\,X\right)} dz$$

В частном случае $b(u) \equiv 1$, $c(u) \equiv 0$ асимптотческая формула была получена А.М. Ильиным

Обоснование асимптотической формулы

Уравнение

$$u_t + a(u)u_x = \varepsilon[b(u)u_{xx} + c(u)u_x^2]$$

Замена переменных

$$\begin{aligned} x - x_0 - a_0(t - t_0) &= \varepsilon^{3/4}\bar{x} \\ t - t_0 &= \varepsilon^{1/2}\bar{t} \\ u - v_0 &= \varepsilon^{1/4}\bar{u} \end{aligned}$$

полученное уравнение

$$\bar{u}_{\bar{t}} + a_0'\bar{u}\,\bar{u}_{\bar{x}} = b_0\bar{u}_{\bar{x}\bar{x}} + \mathcal{O}\left(\varepsilon^{1/4}\right)$$

Еще одна замена переменных

$$\bar{x} = \alpha X, \quad \bar{t} = \beta T, \quad \bar{u} = \gamma U$$

приводит к уравнению Бюргерса

$$U_T + U U_X = U_{XX}$$

константы удовлетворяют соотношениям

$$a_0' \frac{\beta \gamma}{\alpha} = 1, \quad b_0 \frac{\beta}{\alpha^2} = 1$$

Обоснование асимптотической формулы

Преобразование Коула-Хопфа

$$U(X,T) = -2\frac{\partial}{\partial X}\log W(X,T)$$

где $W = W(X,T)$ решение уравнения теплопроводности

$$W_T = W_{XX}$$

Функция Пирси

$$W(X,T) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{8}\left(z^4-2z^2T+4z\,X\right)}dz$$

Подстановка

$$\bar{u} = -2\gamma\frac{\partial}{\partial X}W(X,T)$$

приводит к

$$\bar{x} = a_0'\bar{u}\,\bar{t} - \kappa\bar{u}^3 + \mathcal{O}\left(\varepsilon^{1/4}\right)$$

Обоснование асимптотической формулы

Выражение для $\bar{u}$

Введем

$$\zeta = \varepsilon^{1/4} z$$

тогда

$$\bar{u} = -2\alpha\,\gamma\,\varepsilon^{3/4}\frac{\partial}{\partial x}\log\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{S(\zeta;x,t)}{\varepsilon}}d\zeta$$

где

$$S(\zeta;x,t) = \frac{1}{8}\left(\zeta^4 - 2\zeta^2\frac{t-t_0}{\beta} + 4\zeta\,\frac{x-x_0-a_0(t-t_0)}{\alpha}\right)$$

$S(\zeta;x,t)$ имеет минимум в точке $\zeta_0 = \zeta_0(x,t)$, определяемой

$$x - x_0 - a_0(t-t_0) = \frac{\alpha}{\beta}(t-t_0)\,\zeta_0 - \alpha\zeta_0^3$$

Формула Лапласа

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{S(\zeta;x,t)}{\varepsilon}} d\zeta = \frac{2\sqrt{\pi\,\varepsilon}}{\sqrt{3\zeta_0^2 - \frac{t-t_0}{\beta}}} e^{-\frac{S(\zeta_0;x,t)}{\varepsilon}} \left(1 + \mathcal{O}\left(\varepsilon\right)\right)$$

Выражение для $\bar{u}$

$$\bar{u} = \gamma\,\varepsilon^{-1/4}\zeta_0 \left(1 + \mathcal{O}\left(\varepsilon\right)\right)$$

Ограничение

Из кубического уравнение

$$\varepsilon^{3/4}(a_0'\bar{u}\bar{t} - \kappa\bar{u}^3) = \frac{\alpha}{\beta}\varepsilon^{1/2}\bar{t}\zeta_0 - \alpha\zeta_0^3$$

получаем ограничение $\dfrac{\alpha}{\gamma^3} = \kappa$

Выражения для констант

Из ограничений

$$a_0' \frac{\beta\,\gamma}{\alpha} = 1, \quad b_0 \frac{\beta}{\alpha^2} = 1, \quad \frac{\alpha}{\gamma^3} = \kappa$$

получаем

$$\alpha = \left(\frac{\kappa\, b_0^3}{{a_0'}^3} \right)^{1/4}, \quad \beta = \left(\frac{\kappa\, b_0}{{a_0'}^3} \right)^{1/2}, \quad \gamma = \left(\frac{b_0}{\kappa\, a_0'} \right)^{1/4}$$

Задача Коши для невязкого уравнения

$$u_t + uu_x = 0$$

$$u(x,0) = F(x)$$

Уравнение для характеристики и решение имеют вид

$$x = a + F(a)t, \quad u(x,t) = F(a(x,t))$$

Из условий опрокидывания

$$x_u = 0, \quad x_{uu} = 0$$

получим

$$x_0 = a_0 + F(a_0)t_0, \quad t_0 = \frac{-1}{F'(a_0)}, \quad u_0 = F(a_0), \quad F''(a_0) = 0.$$

Численное решение уравнения Бюргерса

Начальные данные

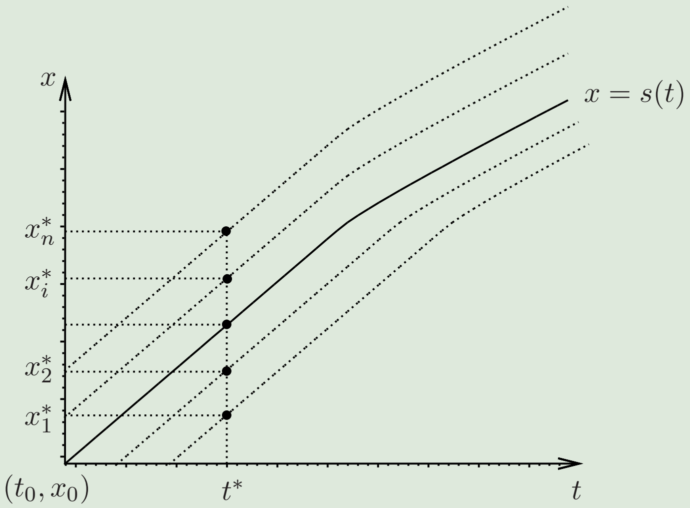
$$F(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Точка градиентной катастрофы

$$x_0 = \sqrt{3}, \quad t_0 = \frac{8\sqrt{3}}{9}, \quad u_0 = \frac{3}{4}$$

Построение линии разрыва

Линия разрыва



Построение линии разрыва

Условия Рэнкина-Гюгонио

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}(F(a_1) + F(a_2)),$$

где $a_1(t)$ и $a_2(t)$ определяются из уравнения характеристик

$$x(t) = a_1 + F(a_1)t, \quad x(t) = a_2 + F(a_2)t$$

Система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}(F(a_1) + F(a_2))$$

$$\frac{da_1}{dt} = \frac{1}{2}\frac{F(a_2) + F(a_1)}{1 + F'(a_1)t} \quad \frac{da_2}{dt} = \frac{1}{2}\frac{F(a_1) - F(a_2)}{1 + F'(a_2)t}$$

Начальные данные

$$a_1(t_0) = a_0, \quad a_2(t_0) = a_0, \quad x(t_0) = x_0$$

Исключаем t

$$t = \frac{a_2 - a_1}{F(a_1) - F(a_2)}$$

Система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}(F(a_1) + F(a_2))$$

$$\frac{da_1}{dt} = \frac{1}{2}\frac{(F(a_1) - F(a_2))^2}{F(a_1) - F(a_2) + F'(a_1)(a_2 - a_1)}$$

$$\frac{da_1}{dt} = \frac{1}{2}\frac{(F(a_1) - F(a_2))^2}{F(a_1) - F(a_2) + F'(a_2)(a_2 - a_1)}$$

Начальные данные

$$a_1(t_0) = a_0, \quad a_2(t_0) = a_0, \quad x(t_0) = x_0$$

Асимптотики функций $a_1(t)$, $a_2(t)$, $x(t)$ в окрестности $t = t_0$

Асимптотика для характеристик $a_1(t)$, $a_2(t)$

Если $a_1(t) < a_0 < a_2(t)$

$$a_1(t) = a_0 - \left(\frac{2F'(a_0)^2}{F'''(a_0)} (t - t_0) \right)^{1/2},$$

$$a_2(t) = a_0 + \left(\frac{2F'(a_0)^2}{F'''(a_0)} (t - t_0) \right)^{1/2}$$

Асимптотика для $x(t)$

$$x = x_0 + F(a_0)(t - t_0)$$

Построение линии разрыва

Начальные условия — асимптотические значения

$$a_1(t_0 + \Delta t) = a_0 - \left(\frac{2F'(a_0)^2}{F'''(a_0)} \Delta t \right)^{1/2},$$

$$a_2(t_0 + \Delta t) = a_0 + \left(\frac{2F'(a_0)^2}{F'''(a_0)} \Delta t \right)^{1/2},$$

$$x(t_0 + \Delta t) = x_0 + F(a_0)\Delta t$$

Здесь Δt — шаг по времени.

Уравнение Бюргерса

$$u_t + uu_x = \varepsilon u_{xx}$$

2D область — вытянутый прямоугольник

$$\Omega = \{(x, y) : 0 \le x \le L_x, 0 \le y \le L_y\},$$

где L_x, L_y — размеры прямоугольника и $L_x \gg L_y$.

Граничные условия

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{y=0,L_y} = 0 \quad \left.\frac{du}{dt}\right|_{x=0,L_x} = 0,$$

где n — внешняя нормаль к границе $\partial\Omega$, $d/dt = \partial/\partial t + u\partial/\partial x$

Начальные условия

$$u|_{t=0} = \frac{1}{1+x^2}$$

Вариационная постановка задачи

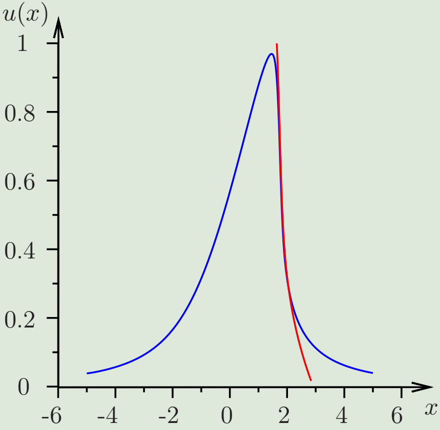
Для аппроксимации по времени используем неявную схему Эйлера

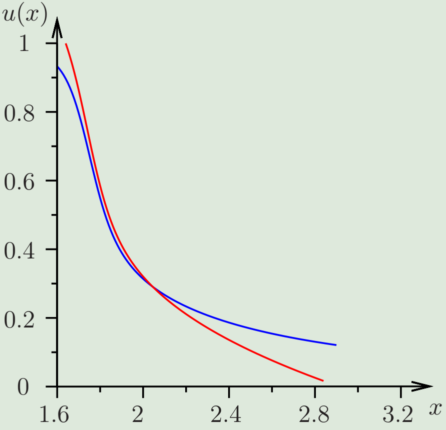
$$\iint\limits_{\Omega} \left(\frac{u^{m+1} - u^m}{\tau}\theta + u^m u_x^{m+1}\theta \right) dxdy = \iint\limits_{\Omega} \varepsilon u_{xx}^{m+1}\theta dxdy$$

или с учетом краевых условий

$$\iint\limits_{\Omega} \left(\frac{u^{m+1} - u^m}{\tau}\theta + u^m u_x^{m+1}\theta + \varepsilon u_x^{m+1}\theta_x \right) dxdy = \int\limits_{\partial\Omega} \theta \frac{\partial u}{\partial n} ds$$

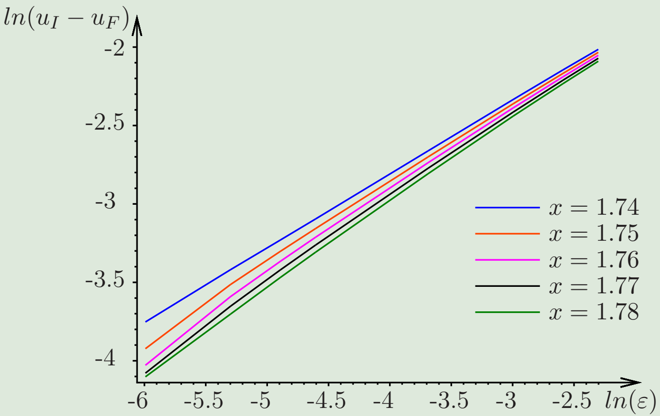
Значения параметров: $t = 1.54$, $\varepsilon = 0.01$





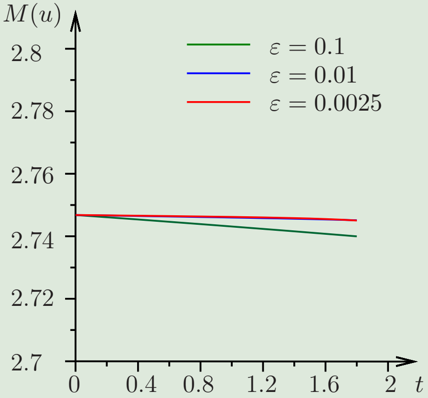
Сравнение численных результатов

Значения параметров: $t = 1.54$, $x^* = \{1.74, 1.75, 1.76, 1.77, 1.78\}$, $\varepsilon = \{0.0025, 0.005, 0.0075, 0.01, 0.025, 0.05, 0.075, 0.1\}$



Средний угол наклона равен 0.5175

Контроль массы в зависимости от времени



Для $\varepsilon = 0.1$ относительная погрешность равна 0.0024, для $\varepsilon = 0.01$ — 0.0006, для $\varepsilon = 0.0025$ — 0.0006

Метод конечных элементов

Обощенное уравнение Бюргерса

$$u_t + uu_x = \varepsilon(uu_x)_x$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{y=0,L_y} = 0 \quad \left.\frac{du}{dt}\right|_{x=0,L_x} = 0$$

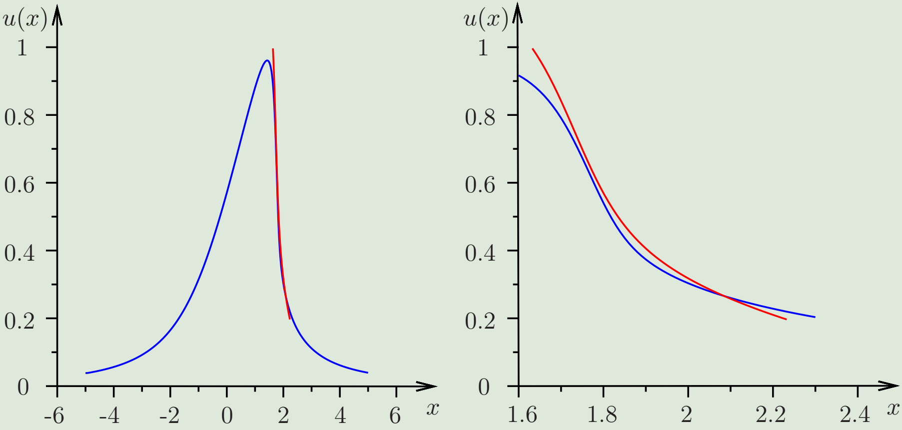
$$u|_{t=0} = \frac{1}{1+x^2}$$

Вариационная постановка задачи

$$\iint\limits_{\Omega} \left(\frac{u^{m+1} - u^m}{\tau}\theta + u^m u_x^{m+1}\theta + \varepsilon u^m u_x^{m+1}\theta_x \right) dxdy = \int\limits_{\partial\Omega} \theta \frac{\partial u}{\partial n} ds$$

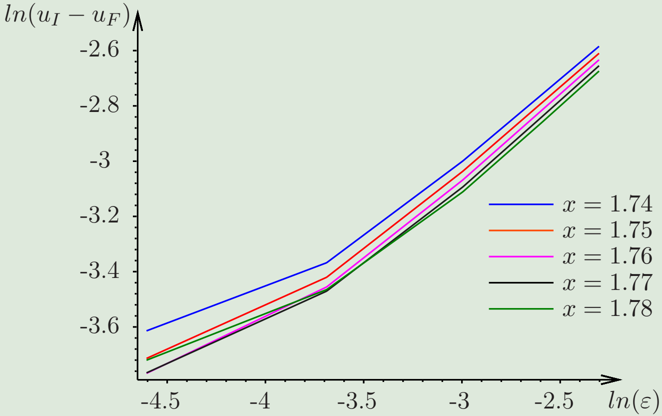
Сравнение численных результатов

Значения параметров: $t = 1.54$, $\varepsilon = 0.01$



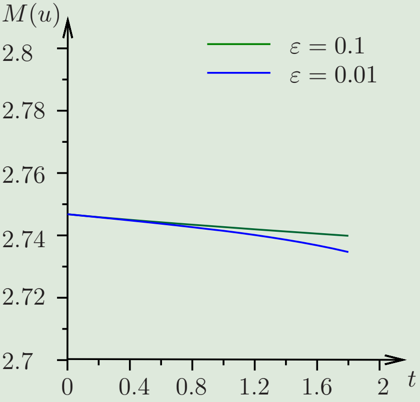
Сравнение численных результатов

Значения параметров: $t = 1.54$, $x^* = \{1.74, 1.75, 1.76, 1.77, 1.78\}$, $\varepsilon = \{0.01, 0.025, 0.05, 0.075, 0.1\}$



Средний угол наклона равен 0.5221

Контроль массы в зависимости от времени



Для $\varepsilon = 0.1$ относительная погрешность равна 0.0025, для $\varepsilon = 0.01$ — 0.0044

Спасибо за внимание!